Padoa Alessandro

Frequenza, previsione, probabilità

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Frequenza, previsione, probabilità
AUTORE: Padoa, Alessandro
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE: Il testo è presente in formato immagine sul sito della Biblioteca dell'Università degli studi di Torino: http://www.opal.unito.it/.

CODICE ISBN E-BOOK: n. d.

COPERTINA: n.d.

TRATTO DA: Frequenza, previsione, probabilita : nota / di Alessandro Padoa. - Torino : V. Bona, 1912. - 11 p. ; 25 cm. - Estr. da: Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. 47 (1912)

CODICE ISBN FONTE: n. d.

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 21 dicembre 2021

INDICE DI AFFIDABILITÀ: 1
0: affidabilità bassa
1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
MATEMATICA / Probabilità e Statistica / Generale

DIGITALIZZAZIONE:
Giuseppe Piero Perduca, lcevgi@libero.it

REVISIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

IMPAGINAZIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

PUBBLICAZIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1911-1912)

FREQUENZA, PREVISIONE, PROBABILITÀ

NOTA
DI
ALESSANDRO PADOA

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*. Vol. XLVII
Adunanza del 26 Maggio 1912.

§ 1. La logica formale permette di rispondere esaurientemente alle domande: — Che cosa significa *applicare* una proposizione scientifica? Quali proposizioni sono *suscettibili* di applicazione? Quand'è che un'applicazione spetta alla *scienza stessa* e quando invece alla *pratica*?

Anzitutto: che cos'è, sotto l'aspetto *formale*, una proposizione scientifica?

Chiamo *costante* ogni simbolo cui è stato attribuito un significato, *variabile* ogni simbolo cui può venir sostituita una costante arbitraria, *interpretazione* di una variabile ogni costante che ci si propone di sostituire alla variabile considerata. Secondochè una proposizione, in senso *grammaticale*, che contenga una variabile, è o non è vera per *qualunque* interpretazione della variabile, dico che questa è *apparente* o *reale* nella proposizione considerata.

Ad es., sono formate di sole costanti le proposizioni[1]:

(1) $7 \in \mathrm{Np}$, $10 \in (\mathrm{N}_1 + 1)$,

$10 \sim \in (7\,\mathrm{N})$, $7\text{-}1=6$,

$10^6\text{-}1=999999$;

a e *b* sono variabili reali in ciascuna delle proposizioni:

(2) $a \in \mathrm{Np}$

$b \in (\mathrm{N}_1 + 1)$

$b \sim \in (a\,\mathrm{N})$

[1] Delle quali le prime tre si leggono: "7 *è un* numero primo" "10 *è un* numero intero maggiore di 1" "10 *non è un* multiplo di 7"

$(b^{a-1} - 1) \in (a\,\mathrm{N})$

a e b sono variabili apparenti nella proposizione:

(3) $a \in \mathrm{Np} \bullet b \in (\mathrm{N}_1 + 1) \bullet b \sim\in (a\,\mathrm{N}) \bullet \supset \bullet (b^{a-1} - 1) \in (a\,\mathrm{N})$

che si può leggere: “SE a è un numero primo, SE b è un numero intero maggiore di 1 E SE b non è divisibile per a, ALLORA b^{a-1} - 1 è divisibile per a„ e significa: “(OGNI INTERPRETAZIONE di a e di b è tale che) a NON è un numero primo, OVVERO b non è un numero intero maggiore di 1, OVVERO b È divisibile per a, OVVERO b^{a-1} - 1 è divisibile per a„.

Le (1), (2), (3) dànno esempio di tre tipi diversi di proposizioni, che si possono distinguere ordinatamente coi nomi di *asserzioni, condizioni, implicazioni*. Quanto precede o segue il segno “⊃„ di implicazione chiamasi rispettivamente *ipotesi* e *tesi*; separatamente considerate, esse sono condizioni. L’ipotesi della (3) è una condizione che risulta dall’*affermazione simultanea* di tre condizioni.

Soltanto le asserzioni e le implicazioni sono *proposizioni*, in senso *scientifico*; non sono tali invece le condizioni, isolatamente considerate.

§ 2. — *Applicare* un’*implicazione* significa:

1) trovare una *interpretazione* delle (o di alcune) sue variabili, per cui ciascuna delle *condizioni* (simultaneamente affermate nell’ipotesi) nelle quali entrano *soltanto* le variabili interpretate diventi un’*asserzione vera*;

2) enunciare la proposizione che risulta *cancellando* tali asserzioni e *sostituendo* ovunque le dette interpretazioni alle dette variabili (Se risultasse cancellata tutta l'ipotesi, si cancellerà anche il segno di implicazione).

Chiamo *applicazione* dell'implicazione data ogni proposizione così ottenuta; essa può essere un'*asserzione* o un'*implicazione*, nel qual caso essa è nuovamente suscettibile di applicazione; e questa è ancora un'applicazione della implicazione data (cioè può derivare da essa con un solo procedimento, anziché con due successivi).

Ad es., a cagione delle (1), per l'interpretazione 7 di *a*, la (3) dà l'implicazione:

(3´) $b \in \mathrm{N}_1 + 1 \bullet b \sim \in (7\,\mathrm{N}) \bullet \supset \bullet (b^6 - 1) \in (7\,\mathrm{N})$

invece, per l'interpretazione 10 di *b*, dà l'implicazione:

(3´´) $a \in \mathrm{Np} \bullet 10 \sim \in (a\,\mathrm{N}) \bullet \supset \bullet (10^{a-1} - 1) \in (a\,\mathrm{N})$

infine la (3´) per l'interpretazione 10 di *b*, ovvero la (3 ´´) per l'interpretazione 7 di *a*, ovvero la (3) per l'interpretazione 7 di *a* e 10 di *b*, danno l'asserzione:

(3´´´) $999999 \in (7\,\mathrm{N})$

Ciascuna delle (3´) (3´´) (3´´´) è un'applicazione della (3).

Le *asserzioni* non sono suscettibili di applicazione; esse forniscono invece i *dati* per l'applicazione di *implicazioni*.

§ 3. Secondochè, quali interpretazioni delle variabili di un'implicazione spettante ad una scienza, si usano costanti *tutte* o *non tutte* spettanti alla scienza stessa, l'applicazione risulta rispettivamente una proposizione della *scienza stessa* (che io chiamo *corollario* dell'implicazione data) o una *conclusione pratica* (tale essendo, rispetto alla scienza considerata, anche una proposizione spettante ad altra scienza). Infatti, soltanto nel primo caso, la scienza stessa deve e può *accertare* la *verità* delle *asserzioni* in cui si trasformano alcune condizioni dell'ipotesi, per la prescelta interpretazione delle variabili (asserzioni che andranno eliminate nell'applicazione); mentre, nel secondo caso, le asserzioni stesse non sono più di pertinenza della scienza considerata, la quale perciò nè *deve* nè *potrebbe* in alcun modo accertarne la verità, senza esorbitare dal proprio campo.

Ad es., la implicazione (3) e le asserzioni (1) appartenendo all'Aritmetica, anche le applicazioni (3′) (3′′) (3′′′) appartengono all'Aritmetica, e sono perciò corollari della (3). Anzi la (3) è suscettibile soltanto di *corollari* e non di *conclusioni pratiche*, perchè nessuna delle condizioni della sua ipotesi potrebbe diventare un'asserzione *vera* per interpretazioni non aritmetiche delle variabili.

Sia invece, ad es., l'implicazione:

$$(4)\quad a, b \in \mathrm{Cls} \bullet \mathrm{Num}\, a, \mathrm{Num}\, b \in \mathrm{N}_0 \bullet a \cap b = \Lambda \bullet \supset \bullet \; \mathrm{Num}\, a + \mathrm{Num}\, b = \mathrm{Num}\,(a \cup b)$$

cioè: “se *a* e *b* sono *classi*, a ciascuna delle quali appartiene un *numero finito* (0 non escluso) di *oggetti arbitrari*, e se nessuno di questi è *comune* ad *a* e a *b*, allora la *somma* del numero degli *a* e del numero dei *b* è il numero degli oggetti della *riunione* di *a* e di *b*„.

Quest'implicazione può essere applicata in due modi: sostituendo ad *a* e a *b* gruppi di *numeri*, ovvero gruppi di *altri* oggetti qualunque (mele, castagne, ecc.); l'applicazione sarà rispettivamente un *corollario* della (*4*) *o una conclusione pratica*.

Ecco un es. di applicazione del primo tipo. Premesso che:

$$m, n \in N_0 \bullet \supset \bullet\, m \cdots n = N_0 \cap x \ni (m \leq x \leq n)$$

cioè: "se *m* ed *n* sono numeri interi assoluti, la scrittura $m \cdots n$ rappresenta l'insieme dei numeri interi assoluti che non sono minori di *m* nè maggiori di *n*„ e supposte note le asserzioni:

$(1 \,^{\wedge}\, 5) \cap \mathrm{Cls}$

$5 \in N_0$

$(1 \,^{\wedge}\, 5) \cap (6 \,^{\wedge}\, 8) = \Lambda$

$(6 \,^{\wedge}\, 8) \in \mathrm{Cls}$

$\mathrm{Num}\,(6 \,^{\wedge}\, 8) = 3$

$(1 \,^{\wedge}\, 5) \cup (6 \,^{\wedge}\, 8) = 1 \,^{\wedge}\, 8$

$\mathrm{Num}\,(1 \,^{\wedge}\, 5) = 5$

$3 \in N_0$

$$\mathrm{Num}\,(1 \hat{\ } 8) = 8$$

(le quali, alla lor volta, sono applicazioni di altre implicazioni aritmetiche), la (4) dà il *corollario*:

$$5 + 3 = 8$$

Quanto alle applicazioni del secondo tipo di cui è suscettibile la (4), cioè *conclusioni pratiche*, è vero che la *Logica* stabilisce il *significato* della condizione:

$$a, b \in \mathrm{Cls} \bullet a \cap b = \Lambda$$

e l'*Aritmetica* quello della condizione:

$$a, b \in \mathrm{Cls} \bullet \mathrm{Num}\, a, \mathrm{Num}\, b \in N_0$$

ma nessuna di queste due scienze può rendersi garante di un accertamento di tal genere, per classi formate di oggetti che non siano di loro pertinenza, e che perciò esse non hanno nemmeno la possibilità di *designare*.

§ 4. — Risposto così alle domande enunciate da principio, esaminiamo la recente *definizione di probabilità* del Peano:

(5) $a, b \in \mathrm{Cls} \bullet \mathrm{Num}\, a \in N_1 \bullet \supset \bullet P(b, a) = \dfrac{\mathrm{Num}\,(a \cap b)}{\mathrm{Num}\,(a)}$

cioè: "se *a* e *b* sono classi e se il numero degli individui della classe a è finito e diverso da 0, allora la nuova scrittura P (*b, a*) vale il numero degli individui comuni ad *a* e a *b*, diviso per il numero degli *a*„[2].

Per quanto precede, la (5) è un'implicazione [§ 1] e perciò suscettibile di applicazioni [§ 2] che possono essere suoi corollari o conclusioni pratiche [§ 3], delle quali nè la Logica, nè l'Aritmetica sono garanti.

Ora, pur accettando la detta definizione, io mi domando se non gioverebbe cambiare la *denominazione* della scrittura "P (*b, a*) definita con costanti logiche ed aritmetiche e perciò spettante all'Aritmetica, chiamandola ad es. "*frequenza* dei *b* fra gli *a*„ per riserbare la denominazione di *probabilità* ad altra scrittura altrimenti definita, come propongo più innanzi. Intanto, accettata la mia denominazione, si potranno subordinatamente accogliere le denominazioni di frequenza *nulla, scarsa, media, abbondante, totale* corrispondentemente ai suoi valori 0, fra 0 e $\frac{1}{2}$, fra $\frac{1}{2}$ ed 1, 1.

In *tutte* le questioni *aritmetiche*, dette di *probabilità*, effettivamente si tratta sempre e soltanto di *frequenza* degli individui di una certa classe *b* fra quelli di una certa classe *a*, nel senso dichiarato, e perciò il cambiamen-

---

[2] "Reale Accademia dei Lincei„ vol. XXI, serie 5ª, 1° sem., fase. 7°.
Secondo questa definizione, la probabilità non si presenta come funzione di una sola variabile, cioè "probabilità d'un avvenimento„ ma quale funzione di due variabili, cioè "probabilità dell'avvenimento *b* fra gli avvenimenti *a*„; e perciò devono esser date le due classi *a* e *b*. Inoltre, non si deve aggiungere la frase solita: "Supposto che i casi possibili siano egualmente possibili, o probabili, o verosimili„ la quale aggiunta crea il circolo vizioso tanto dibattuto; il quale però è solo apparente, poichè la frase accennata, mentre manca di precisione quale avvertimento per chi voglia fare un'applicazione pratica della formola, rispetto a questa è una vana superfetazione.

to di *nomenclatura* non può portare alcun inconveniente.

§ 5. — In pratica, per *probabilità di un avvenimento* s'intende una *valutazione numerica della legittimità dell'attesa* (speranza o timore) dell'avvenimento dichiarato. Ora a me sembra che soltanto *alcune* di tali questioni siano *applicazioni immediate* della (5); e cioè quelle in cui le classi *a* e *b* sono *ben determinate* dalla questione stessa ed in cui, ancorché si *parli* di *un* individuo di *a* s'intende effettivamente di *riferirsi* ad *un qualunque* individuo di *a* e quindi al *numero* degli *a* (ad es., nelle varie questioni di probabilità relative al comune gioco del lotto, non si considera in particolar modo *una* delle estrazioni, ma il *numero* delle estrazioni diverse, cioè delle combinazioni o disposizioni di 90 oggetti a 5 a 5; e, riferendosi invece ad una lotteria, non si considera *un* biglietto, ma il *numero* dei biglietti emessi in relazione al numero ed al valore dei premi da sorteggiare).

§ 6. — Ma vi sono altri casi, in cui la questione è posta per *un solo avvenimento* futuro ed in cui la questione stessa *non determina* la classe *a*.

Dice il Peano: "La questione "qual'è la probabilità che domani piova,, non ha senso, perchè non sono enunciate le due classi *a* e *b* da cui dipende la probabilità. Vi si può rispondere completando la frase ellittica, per esempio cosi: la pluviosità in questo mese, o stagione, o in tutto l'anno, cioè il rapporto fra il numero dei giorni di pioggia e il numero totale dei giorni del mese, o stagione, o anno, è tanta„.

E sta bene, sotto l'aspetto aritmetico. Ma in pratica, un agricoltore, un navigante, ecc., quando pone la domanda accennata, non intende affatto che il *domani* di cui parla sia considerato come un *giorno qualunque*; una risposta che gli venisse data nel modo indicato, con *scelta arbitraria* della classe *a*, gli apparirebbe uno scherzo da dilettante di statistica. Potendo, egli si rivolgerebbe invece ad un meteorologo perfetto (fornito di dati esaurienti e di leggi infallibili) e gli chiederebbe senz'altro una *previsione sicura*; in mancanza di ciò, egli chiede al *meteorologo-statistico* una valutazione numerica della legittimità dell'attesa che domani piova, in un luogo determinato, *intendendo* ch'egli si valga delle *leggi note* e dei *dati meteorologici attuali*, estendendo eventualmente l'indagine nel tempo (ad istanti anteriori all'attuale) e nello spazio (ad una sfera avente centro in quel punto e raggio opportuno), secondo il tempo che deve trascorrere dall'istante in cui la domanda *vien posta* a quello cui essa *si riferisce*.

Ed il meteorologo-statistico può seguire utilmente una via di mezzo fra la *valutazione arbitraria* e la *previsione sicura*, ricorrendo ad un concetto di *probabilità a quattro variabili*, che qui definisco:

(6) $t, d \in \mathrm{Cls'q} \bullet t_1 \in t \bullet d_1 \in d \bullet a = t \cap x \ni [c(x) = c(t_1)] \bullet b \in \mathrm{Cls'}t \bullet \supset \bullet \mathrm{P}(t_1, c, d_1, b) = \dfrac{\mathrm{Num}[(a + d1) \cap b]}{\mathrm{Num}\, a}$

Prima di commentarla, si osservi che, tranne la nuova scrittura "P (t_1, c, d_1, b),,, tutte le costanti [§ 1] in essa adoperate sono logiche od aritmetiche[3], e perciò essa spetta all'Aritmetica; essa ha forma di implicazione e perciò è suscettibile di applicazioni [§ 2], fra cui conclusioni pratiche [§ 3], delle quali, come d'ogni altra, nè la Logica nè l'Aritmetica devono o possono rendersi garanti.

Ciò premesso, ecco un sistema d'*interpretazioni pratiche* delle *variabili* contenute nella (6): sia t la classe degli *istanti* e sia t_1 un istante *precisato* (quello in cui vien posta la domanda); sia d la classe delle *durate* (fra un istante arbitrario e un istante pure arbitrario ma *distinto* dal primo e *successivo* ad esso) e sia d_1 una durata *precisata* (quella che deve trascorrere dall'istante t_1 all'istante $t_1 + d_1$ cui si riferisce la domanda); sia c un *sistema di circostanze precisate* (ciascuna delle quali sia valutabile, qualitativamente o quantitativamente o in ambo i modi, in ciascun istante) qui considerato quale *funzione univoca* degli istanti; tale funzione *non* essendo necessariamente biunivoca, sia a l'insieme degli istanti x per ciascuno dei quali (in pratica, per ciascuno dei quali *è noto che*) "$c(x) = c(t_1)$,,; e sia b l'insieme degli istanti in cui (in pratica, in cui *è noto che*) *accadde* un avvenimento quale l'*atteso*; allora "la probabilità nell'istante t_1, rispetto alle circostanze c, che al termine della durata d_1 si avveri un avvenimento b,, è la finzione

[3] La scrittura d Cls'q,, significa "classe di quantità (numeri reali),,.

che ha per denominatore il numero degli a e per numeratore il numero degli “$a + d_1$„ (istanti che seguono gli a di d_1) che sono dei b.

È chiaro che, se l’avvenimento fosse atteso non in un *istante* precisato “$t_1 + d_1$„ ma entro un precisato *intervallo continuo di tempo*, i cui estremi seguano t_1 delle durate d_1 e d_2, e che si potrà rappresentare con “$(t_1 + d_1)$ ¯ $(t_1 + d_2)$„, invece del gruppo di istanti “$a + d_1$„ si dovrà considerare il gruppo di intervalli “$(a + d_1)$ ¯ $(a + d_2)$„. E può anche darsi, come ho accennato, che, per uno studio più complesso della questione, la valutazione di c in ciascun istante esiga un'indagine retrospettiva per un intervallo continuo di tempo avente per secondo estremo t_1, il quale rimarrà la sola variabile di c quando la durata d' dell’intervallo stesso sia una costante già determinata quale funzione di d_1.

Per contro, volendo semplificar le cose, basta osservare che sempre

$$\text{Num}\,(a + d_1) = \text{Num}\,a$$

per concludere che la *probabilità* definita dalla (6) è la *frequenza dei b* fra gli “$a + d_1$„ quale è definita dalla (5). Ma la (6) costringe *più esplicitamente* della (5), chi voglia trarne un’applicazione *pratica*, a precisare alcuni dati essenziali della questione (circostanze che accompagnano o precedono l’istante della previsione e durata fra esso e l’istante dell'attesa). L’accorgimento nel servirsi di un tale procedimento, mediante una prima raccolta di dati statistici (che andrà man mano arricchendosi) e mediante una selezione sempre più accurata delle circostanze e così che i risultati forniti dalla formola s'allontanino dal valore ($\frac{1}{2}$ *dubbio*), per accostarsi ai valori estremi 0 ed 1 (*impossibilità* e *certezza*) — conduce ad una determinazione *sempre piu approssimata*, delle *circostanze precorritrici* del fenomeno esaminato (che, anziché meteorologico, potrà essere fisico, fisiologico, storico, ecc.) e rende così la statistica collaboratrice non trascurabile dell'indagine scientifica.

§ 7. — Un notevole divario fra le questioni pratiche accennate nel § 5 e nel § 6 sta nel fatto che per le prime il *numero dei casi possibili* si ottiene mediante *operazioni aritmetiche* determinate, da eseguirsi coi dati numerici della questione; mentre per le seconde lo si ottiene *contando i dati statistici* forniti da tabelle, la cui maggiore o minore estensione è del tutto indipendente dai dati della questione.

Ma è doveroso soggiungere che, se di *circostanze precorritrici* si è parlato soltanto a proposito delle seconde, a ben guardare, tale divario è solo apparente.

Invero, gli *atti* compiuti per imbussolare, mescolare ed estrarre i numeri d'una lotteria costituiscono *le sole circostanze precorritrici decisive* di ciascuna estrazione. Ma poiché quegli atti, quantunque possano sembrare innocentemente semplici e uniformi, nel loro insieme sono invece complicatissimi, così (quando non vi sia intenzione o sospetto di frode) si *rinuncia* a valutare la *dipendenza* dell'estrazione da essi; e, con decisione altrettanto comoda quanto ingiustificata, si *ammette* che essa ne sia *indipendente*!

È dunque tutt'altro che equo l'abituale diverso atteggiamento di fronte alle due categorie di questioni, per cui ogni divergenza fra i *risultati statistici* delle estrazioni *compiute* e le *probabilità calcolate* sulle estrazioni *possibili* viene attribuita al *caso*, mentre ogni divergenza analoga a proposito di fenomeni meteorologici, economici, storici, ecc., suscita troppo facili accuse di *ignoranza*. Tuttavia, esso trova la sua ragion d'essere nell'indole diversa delle circostanze precorritrici delle due categorie di avvenimenti: in quanto le prime, mentre sfuggono all'osservatore superficiale, non attraggono lo scienziato che le considera quali *modalità convenzionali e modificabili a piacere*; le seconde invece, essendo totalmente o parzialmente *estranee alla volontà umana*, eccitano la curiosità, così del profano che dello scienziato, a scoprirne le *mutue dipendenze*.

Genova, 13 maggio 1912.