Giuseppe Peano

La geometria basata sulle idee di punto e distanza

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: La geometria basata sulle idee di punto e distanza
AUTORE: Peano, Giuseppe
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE: Il testo è presente in formato immagine sul sito della Biblioteca dell'Università degli studi di Torino: http://www.opal.unito.it/.

CODICE ISBN E-BOOK: n. d.

COPERTINA: n. d.

TRATTO DA: La geometria basata sulle idee di punto e distanza / nota di Giuseppe Peano. - Torino : C. Clausen, 1902. - 7 p. ; 25 cm. - Estr. da: Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, v. 38, anno 1902.

CODICE ISBN FONTE: n. d.

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 22 dicembre 2021

INDICE DI AFFIDABILITÀ: 1
0: affidabilità bassa
1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
MATEMATICA / Generale

DIGITALIZZAZIONE:
Giuseppe Piero Perduca, lcevgi@libero.it

REVISIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

IMPAGINAZIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

PUBBLICAZIONE:
Claudio Paganelli, paganelli@mclink.it

ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1902-903)

LA
GEOMETRIA
BASATA SULLE
IDEE DI PUNTO E DISTANZA

NOTA
DEL SOCIO

GIUSEPPE PEANO

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1902

Estr. dagli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXVIII.
Adunanza del 16 Novembre 1902.

Torino – Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona

L’analisi delle idee fondamentali o primitive della Geometria, cioè di quelle che non si possono definire ma che dobbiamo ricavare dal mondo fisico, diede luogo a numerosi lavori, specialmente in questi ultimi tempi.

Il sig. M. Pasch, nelle sue *Vorlesungen über Geometrie* dell’a. 1882, espresse tutte le idee geometriche mediante quattro: *punto, segmento, piano, moto*.

Nel 1889, nell’opuscolo *I principii di Geometria*, io applicai la Logica matematica, allora eretta a sistema, per analizzare i fondamenti della Geometria. Eliminai dal gruppo delle idee primitive quella del piano; scomposi gli assiomi introdotti dal Pasch nei loro elementi. Risultò così che una gran parte della Geometria, cioè quella che si suol chiamare *Geometria di posizione*, si può sviluppare con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *segmento*. In un successivo articolo, comparso nella *Rivista di Matematica*, a. 1894, p. 51, espressi le idee della Geometria metrica colle precedenti e con quella di moto.

Il prof. M. Pieri, in una serie di lavori pubblicati dal 1897 in poi, di cui parecchi nei volumi delle nostre “Memorie„ analizzò dapprima le idee primitive della Geometria projettiva, e in seguito quelle della Geometria elementare. Ed arrivò al risultato, notevole sotto ogni aspetto, che la Geometria si possa costrurre con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *distanza* di due punti. E anzi che questa seconda idea non sia necessario di assumerla come una relazione fra quattro punti *a, b, c, d* sotto la forma “la distanza da *a* a *b* è eguale a quella da *c* a *d*„, ma basti assumere come primitiva la relazione fra tre punti *a, b, c*: “i punti *a* e *b* sono equidistanti da *c*„. Veggansi gli atti del *Congrès de Philosophie* tenutosi nel 1900 a Parigi, t. 3°, pag. 386. Uno sviluppo completo della idea geniale del prof. Pieri è vivamente a desiderare.

Seguendo un altro indirizzo, nel mio articolo: *Analisi della teoria dei vettori*, pubblicato negli “Atti„ di questa Accademia nel 1898, sviluppai una parte della Geometria colle idee primitive di *punto* e *vettore*, per completarla occorreva un'altra idea primitiva, che assunsi sotto la forma di prodotto interno di due vettori. Questo lavoro è riprodotto nel *Formulaire Mathématique*, a. 1902, p. 253 e segg., insieme alle citazioni di altri autori, quali SCHUR, MOORE, PADOA, e altri che si occuparono dello stesso soggetto.

Qui mi propongo di collegare il sistema di idee primitive del Pieri con quello della mia teoria dei vettori.

Continuerò a far uso delle notazioni della Logica matematica, le quali vanno sempre più diffondendosi, e recentemente per opera dei sigg. RUSSELL e WHITEHEAD furono applicate alle più astruse teorie matematiche (“*American Journal of Mathematics*„, a. 1902, fascicolo 4°).

Idee primitive.

p si legge “punto„.

Essendo a, b, c dei punti, $\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)$ si legge "la distanza da a a c è eguale a quella da b a c,,.

Queste idee si assumono come primitive.

La relazione $\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)$ si può risolvere rispetto ad uno qualunque dei punti che contiene, e si ha:

$b, c \in \mathrm{p} \,.\, \supset .\, \mathrm{p} \cap a \ni [\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)] =$ (sfera di centro c passante per b).

"Dati due punti b e c, il luogo dei punti a che soddisfano alla relazione considerata, è la sfera indicata,,.

$a, b \in \mathrm{p} \,.\, \supset .\, \mathrm{p} \cap c \ni [\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)] =$ (piano normale al segmento ab nel suo punto medio).

Quindi la relazione primitiva considerata si può sostituire con quella sfera o con questo piano. Sono diverse forme di una stessa idea.

Definizioni della retta per due punti e del piano per tre punti.

Queste definizioni devonsi a Leibniz, che ne vide l'importanza, e parlando della seconda dice esplicitamente: "Haec definitio mihi est,, (Veggasi il *Formulaire*, p. 265). Esse sono :

$a, b \in \mathrm{p} \,.\, a \sim= b \,.\, \supset .\, \mathrm{recta}\,(a, b) = \mathrm{p} \cap x \ni [y \in \mathrm{p} \,.\, \mathrm{d}(y, a) = \mathrm{d}(x, a) \,.\, \mathrm{d}(y, b) = \mathrm{d}(x, b) \,.\, \supset_y .\, y = x]$ Df

"Essendo a e b due punti distinti fra loro, per retta (a, b) si intende l'insieme dei punti x tali che, comunque si prenda il punto y che disti da a quanto x, e da b pure quanto x, necessariamente questo y coincida con x

Si può anche dire che la retta (a, b) è il luogo dei punti di contatto delle sfere di centri a e b.

$a \in \mathrm{p} \,.\, b \in \mathrm{p} \sim \iota a \,.\, c \in \mathrm{p} \sim \mathrm{recta}\,(a, b) \,.\, \supset .\, \mathrm{plan}\,(a, b, c) = \mathrm{p} \cap x \ni [y \in \mathrm{p} \,.\, \mathrm{d}(y, a) = \mathrm{d}(x, a) \,.\, \mathrm{d}\,(y, b) = \mathrm{d}(x, b) \,.\, \mathrm{d}(y, c) = \mathrm{d}(x, c) \,.\, \supset_y .\, y = x]$. Df

"Dato un punto a, un punto b distinto da a, e un punto c non sulla retta (a, b), per piano (a, b, c) si intende l'insieme dei punti x aventi la proprietà che ogni punto y che disti da a, b, c quanto x, necessariamente coincida con x.

Definizione del punto medio di due punti e dell'eguaglianza di due vettori.

Il punto medio dei punti a e b si indica con $(a + b)/2$, secondo Möbius, Grassmann e altri. Esso si definisce:

$a, b \in \mathrm{p} \,.\, a \sim= b \,.\, \supset .\, (a + b)/2 = \iota\, \mathrm{recta}(a, b) \cap x \ni [\mathrm{d}(x, a) = \mathrm{d}(x, b)]$ Df

$$a \in \mathrm{p} \,.\, \supset .\, (a + a)/2 = a. \qquad \text{Df}$$

"Dati due punti a, b, se essi sono distinti, il loro punto medio è per definizione quell'elemento (punto) della retta (a, b) equidistante da a e da b. Se essi coincidono, il loro punto medio è la loro posizione comune,,.

$a, b, c, d \in \mathrm{p} \,.\, \supset : a - b = c - d \,.=.\, (a + d)/2 = (b + c)/2.$

“Dati quattro punti *a, b, c, d*, si dice che il vettore che va da *a* a *b* eguale al vettore che va da *c* a *d*, quando il punto medio di *a* e *d* coincide col punto medio di *b* e *c*„.

Così, partendo dall’idea di distanza, essendo giunti a definire l’eguaglianza dei vettori, che nel *Formulaire* era assunta come idea primitiva, possiamo supporre trascritte le definizioni successive contenute nel *Formulaire*, e basate su quella sola idea (p. 255-259); e precisamente il simbolo *v* per indicare “vettore„, il vettore nullo (§ vctP3·0·1), la somma d’un punto con un vettore (P4·0), la somma di due vettori (P5·0), il prodotto d’un vettore per un numero razionale (P6 — 9), e il baricentro di più punti con masse razionali (P10).

Per procedere oltre senza introdurre alcuna altra idea primitiva (quale quella di prodotto interno, assunta nel *Formulaire* a p. 260), occorre costrurre una nuova via.

Definizione dell’eguaglianza dei valori assoluti o moduli di due vettori.

$u, v \in \mathrm{v} \,.\, \supset .\because.\, \mathrm{mod}u = \mathrm{mod}v \,.=:\, a \in \mathrm{p} \,.\, \supset_a .\, \mathrm{d}(a, a + u) = \mathrm{d}(a, a + v).$

“Dati due vettori *u* e *v*, diremo che essi hanno egual lunghezza, se, comunque si prenda il punto *a*, la sua distanza dal punto *a* + *u* eguagli quella da *a* + *v*„.

La Prop(§vctP22·1)

$$a, b \in \mathrm{p} \,.\supset .\, \mathrm{d}(a, b) = \mathrm{mod}(b - a) \qquad \mathrm{Df}$$

unita colla precedente, ci dà il significato della relazione "la distanza da a a b eguaglia quella da c a d,, che non si è assunta come primitiva.

Definizione della perpendicolarità fra due vettori.

Per non introdurre simboli nuovi, consideriamo la scrittura $u \times v = 0$ (seguendo le notazioni del Calcolo geometrico), come un simbolo per dire che i vettori u e v sono perpendicolari; lo si definisce come segue:

$$u, v \in \mathrm{v} \,.\supset .\therefore u \times v = 0 \,.=: a \quad \mathrm{p} \,.\supset_a .\, \mathrm{d}(a + u, a + v) = \mathrm{d}(a + u, a - v).$$

"Due vettori u e v diconsi perpendicolari, quando comunque si prenda il punto a, il punto $a + u$ è equidistante da $a + v$ e da $a - v$,,.

Relazione > fra lunghezze.

$$u, v \in \mathrm{v} \,.\supset: \mathrm{mod}u \geq \mathrm{mod}v \,.=.\, \exists \mathrm{v} \cap w \ni [w \times v = 0 \,.\, \mathrm{mod}u = \mathrm{mod}(v + w)] \qquad \mathrm{Df}$$

"Dati due vettori u e v, dire che la lunghezza del primo è maggiore o eguale a quella del secondo, equivale a dire che si può determinare un vettore w tale che esso sia normale a v, e tale che la lunghezza di u eguagli quella di $v + w$,,.

Definita la relazione $\geq$, risulta definita la relazione >, escludendo l'eguaglianza.

In altri termini, la proprietà che la perpendicolare abbassata da un punto su d'una retta è minore dell'obliqua, opportunamente trasformata, acquista la forma d'una definizione.

Se *a* e *b* sono punti, si può definire l'insieme dei punti interni alla sfera di centro *a* e passante per *b* come

$$= \mathrm{p} \cap c \ni [\mathrm{d}(c, a) < \mathrm{d}(c, b)],$$

e il segmento di retta compreso fra *a* e *b* come la parte della retta interna alla sfera di centro a passante per *b* e alla sfera di centro *b* e passante per *a*.

È per noi interessante l'osservare che colla relazione < fra distanze risulta senz'altro definita la figura limite d'una data figura o complesso di punti, e quindi il prodotto d'un vettore per un numero reale, anche irrazionale (§ vct P 25-26), e le coordinate cartesiane dei punti e dei vettori (P 83), sicché si può continuare colla Geometria analitica.

Del resto sussistono inalterate le definizioni, contenute nel *Formulaire*, della projezione d'un punto su d'una retta, o su di un piano (§vct P 43), delle simmetrie centrali, assiali, ecc. e infine quella del Movimento (P 67), risultando distinta la congruenza diretta di due figure dalla congruenza inversa o specchiamento.