Progetto Manuzio

Vito Volterra

Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali

www.liberliber.it

Questo e-book è stato realizzato anche grazie al sostegno di:

E-text
Editoria, Web design, Multimedia
http://www.e-text.it/

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

DIRITTI D'AUTORE: no

LICENZA: questo testo è distribuito con la licenza specificata al seguente indirizzo Internet: http://www.liberliber.it/biblioteca/licenze/

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche; 4: 1914-1925. - Roma : Accademia nazionale dei Lincei, 1960. - 540 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
  0: affidabilità bassa
  1: affidabilità media
  2: affidabilità buona

3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

REVISIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

Informazioni sul "progetto Manuzio"

Il "progetto Manuzio" è una iniziativa dell'associazione culturale Liber Liber. Aperto a chiunque voglia collaborare, si pone come scopo la pubblicazione e la diffusione gratuita di opere letterarie in formato elettronico. Ulteriori informazioni sono disponibili sul sito Internet:
http://www.liberliber.it/

Aiuta anche tu il "progetto Manuzio"

Se questo "libro elettronico" è stato di tuo gradimento, o se condividi le finalità del "progetto Manuzio", invia una donazione a Liber Liber. Il tuo sostegno ci aiuterà a far crescere ulteriormente la nostra biblioteca. Qui le istruzioni:
http://www.liberliber.it/sostieni/

III

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI ED EQUAZIONI ALLE DERIVATE FUNZIONALI

«Rend. Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. XXIII$_1$, 1914$_1$;
pp. 551-577.

1. Nel § 3 della mia Nota: *Sulle equazioni alle derivate funzionali*[1], ho messo in luce la relazione fra equazioni integro-differenziali del 1° ordine ed equazioni alle derivate funzionali, limitandomi al caso della linearità per esaminare l'esempio più semplice. Mi permetto ora di estendere i detti risultati.

2. Sia $F\left|\left[\theta\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right), x, z\right]\right|$ una funzione che dipende da tutti i valori di $\theta(\xi)$ nell'intervallo 0 , 1 e da due parametri x e z. Se $\theta(\xi)$ dipenderà anche da un parametro α, avremo che F sarà una funzione ordinaria di x , z , α; ed in particolare, se prenderemo $z = \alpha$, F sarà una funzione ordinaria di x , z. Prendiamo dunque $\theta(\xi) = f(\xi , z)$ e consideriamo[2]

[1] «Rend. Acc. Linc.», 15 marzo 1914. [In questo volume delle «Opere », II, pp. 5-12].

[2] Cfr. la nota al § 3 della citata Memoria, p. 395.

$$\mathrm{F}\left|\left[f\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), x, z \right]\right|$$

e l'equazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = \mathrm{F}\left|\left[f\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), x, z \right]\right|.$$

Per semplicità supponiamo che $\mathrm{F}\left|\left[\theta\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right]\right|$ possa considerarsi indipendente dalle derivate di θ(ξ)[3]; allora diremo che la (I) è una *equazione integro-differenziale del 1° ordine per rapporto a z*.

Per giustificare questa denominazione, basta pensare che F, sotto certe condizioni almeno, potrà esprimersi o per mezzo di una serie analoga a quella di Taylor[4] o analoga a quelle polinomiali di Weierstrass[5], e quindi, per mezzo di integrazioni multiple applicate alla *f*.

Nel caso particolare in cui F è della forma

$$\int_0^1 f(\xi, z)\varphi(x, \xi)\, d\xi,$$

in cui φ(*x*, ξ) è una funzione determinata, si ricade nella equazione integro-differenziale considerata nel § 3 della

[3] Considereremo in altri lavori il caso adesso escluso.

[4] Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[5] Cfr. Gateaux, *Sur la représentation des fonctionnelles continues*, «Rend. Acc. Linc.», 21 dicembre 1913, p. 646. Le serie analoghe a quelle polinomiali di Weierstrass furono date dapprima dal sig. Fréchet.

Nota citata.

3. Supponiamo l'assoluta continuità di F rispetto agli elementi variabili; e supponiamo che, qualunque siano x e z, purché $1 \geq x \geq 0$, $a + l \geq z \geq a - l$, si abbia

$$\left| \mathrm{F}\left\|\left[\theta\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, x, z \right]\right\| - \mathrm{F}\left\|\left[\theta_1\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, x, z \right]\right\| \right| < \mathrm{A}\varepsilon ,$$

se $|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon$ per ξ compreso fra 0 e 1, e $\theta(\xi)$ e $\theta_1(\xi)$ compresi fra $\psi(\xi) + k$ e $\psi(\xi) - k$; ove A denota una certa quantità costante e $\psi(\xi)$ una funzione continua. Allora, applicando il metodo delle approssimazioni successive, l'integrale della equazione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$f(x,z) = \psi(x) + \Theta \left\|\left[\psi\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, x, z \right]\right\|, \tag{1}$$

in cui Θ si annulla per $z = a$. La detta forma dell'integrale f sarà valida per $1 \geq x \geq 0$, e z compreso in un certo intorno del punto a. È evidente che $\psi(x)$ rappresenta il valore iniziale di $f(x , z)$ per $z = a$.

L'equazione (1) si può anche scrivere

$$f(x,z) = \lambda\, \psi(x) + \int_0^z \mathrm{F}\left\|\left[f(\xi, \zeta), x, \zeta \right]\right\| d\zeta , \tag{1'}$$

la quale dovrà coincidere colla (1) se si fa il parametro costante λ eguale ad 1.

Nella ipotesi, che la $\mathrm{F}\left\|\left[\theta\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, x, z \right]\right\|$ sia sviluppabile in serie analoga a quella di TAYLOR rispetto a $\theta(\xi)$, ed i nuclei dei varî termini siano funzioni olomorfe di z nell'intorno di $z = a$, si potrà sviluppare $f(x\ , z)$ in serie di potenze di λ e di $z - a$, seguendo un procedimento analogo a quello che ho impiegato nel § XVI del Cap. III delle mie lezioni sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. In tal caso ci si può evidentemente estendere, per rapporto a z, dal campo reale al campo complesso.

Consideriamo z come un parametro costante, e risolviamo l'equazione (1) rispetto a $\psi(x)$[6]. Avremo

$$\psi(x) = f(x,z) + \Theta_1 \left\| \left[f\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), x, z \right] \right\|.$$

Si riconosce facilmente che, se si indica con

$$\Theta \left\| \left[\theta\left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right\|,$$

una quantità che dipende arbitrariamente da $\theta(x)$ per x compresa fra 0 e 1 (senza punti eccezionali), e se per $\theta(x)$ si sostituisce

$$\varphi(x) + \Theta_1 \left\| \left[\varphi\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right] \right\|,$$

si avrà

$$\Phi \left\| \left[\varphi(x) + \Theta_1 \left\| \left[\varphi\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right] \right\| \right] \right\| = \Omega \left\| \left[\varphi\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z \right] \right\|,$$

la quale soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

[6] Cfr. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. IV.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \int_0^1 \Omega' \left| \left[\varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right| \mathrm{F} \left| \left[\varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), x, z \right] \right| dx = 0,$$

ove

$$\Omega' \left| \left[\varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right|$$

denota la derivata di Ω rispetto a φ fatta nel punto x. Questa proposizione costituisce una facile estensione del teorema dato nella precedente Nota (§ 3).

4. Di speciale interesse sono le equazioni del tipo canonico.

Abbiasi

$$\mathrm{H} \left| \left[f \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), \varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), z \right] \right|,$$

e supponiamo che, nell'ipotesi di z costante, sia

$$\delta \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{H}'_f \left| \left[f \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), \varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right| \delta f(x) dx + \int_0^1 \mathrm{H}'_\varphi \left| \left[f \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), \varphi \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right| \delta \varphi (x) dx.$$

Le equazioni

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q(x,z)}{\partial z} &= \mathrm{H}'_\varphi \left| \left[q \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi, z \\ 0 \end{matrix} \right), p \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi, z \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right| \\ \frac{\partial p(x,z)}{\partial z} &= - \mathrm{H}'_f \left| \left[q \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi, z \\ 0 \end{matrix} \right), p \left(\begin{matrix} 1 \\ \xi, z \\ 0 \end{matrix} \right), z, x \right] \right| \end{aligned} \right.$$

si diranno di tipo canonico.

Siano le derivate di

$$(2) \qquad \Phi \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), a\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z \right] \right\|,$$

fatte rispetto a $q(\xi)$ e $a(\xi)$ nel punto x, rispettivamente

$$(3) \qquad \Phi'_q \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), a\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z, x \right] \right\| \quad , \quad \Phi'_a \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), a\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z, x \right] \right\|.$$

Denotiamole, per semplicità, con

$$(4) \qquad \Phi'_q(z,x) \quad , \quad \Phi'_a(z,x).$$

Se Φ non ha punti eccezionali e soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mathrm{H} \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), \Phi'_q\left(z, \overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z \right] \right\| = 0,$$

gl'integrali delle equazioni (II) si potranno ricavare dalle relazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} \Phi'_a \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z\right), a\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z, x \right] \right\| = b(x) \\[2ex] \Phi'_q \left\| \left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z\right), a\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), z, x \right] \right\| = p(x,z), \end{cases}$$

ove $b(x)$ rappresenta una funzione continua arbitraria, purché si ammetta, inoltre, che, nell'ipotesi di z e x e $a(\xi)$ invariabili, sia

$$\delta \Phi'_a \| [q(\xi), a(\xi), z, x] \| = \mathrm{A} \delta q(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} \| [q(\xi), a(\xi), z, x, y] \| \delta q(y) dy,$$

e l'equazione integrale

$$\mathrm{A}\psi(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq}\left\|q(\xi), a(\xi), z, x, y\right\|\psi(y)dy = \theta(x)$$

abbia, almeno entro un certo campo, per la incognita $\psi(x)$ una soluzione unica, determinata e finita[7].

5. Nella ipotesi che H non contenga z, prendiamo Φ indipendente da z, onde sopprimiamo nelle espressioni (2), (3) e (4) la variabile z e scriviamo queste ultime

$$\text{(4')} \qquad \Phi'_q(x) \quad , \quad \Phi'_a(x).$$

Supponiamo che, invece della (III), sia soddisfatta la relazione

$$\text{(IV)} \qquad h + \mathrm{H}\left\|\left[q\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad \Phi'_q\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\| = 0$$

con

$$h = \Omega\left\|\left[a\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\| \quad , \quad \delta h = \int_0^1 \Omega'_a\left\|\left[a\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}, x\right]\right\|\delta a(x)dx.$$

Allora, alle (5), potremo sostituire le altre

$$\text{(5')} \qquad \begin{cases} \Phi'_a\left\|\left[q\begin{pmatrix}1\\ \xi, z\\ 0\end{pmatrix}, a\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}, x\right]\right\| = b(x) + z\Omega'_a\left\|\left[a\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}, x\right]\right\| \\ \Phi'_q\left\|\left[q\begin{pmatrix}1\\ \xi, z\\ 0\end{pmatrix}, a\begin{pmatrix}1\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}, x\right]\right\| = p(x, z). \end{cases}$$

6. Come esempio mi permetto di svolgere un caso particolare che corrisponde al caso di STÄCKEL della se-

[7] VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IV.

parazione delle variabili[8].

Sia $g\,(x\,,\,y\,,\,q(x)) = \gamma(x\,,\,y)$ una funzione composta di $q(x)$ nel senso ordinario.

Calcoliamo $\Gamma(x\,,\,y)$, tale che il teorema di reciprocità sia soddisfatto[9],

$$\gamma(x,y) + \Gamma(x,y) = -\int_0^1 \gamma(x,\xi)\Gamma(\xi,y)\,d\xi,$$

nell'ipotesi del determinante diverso da zero. $\Gamma(x\,,\,y)$ dipenderà da tutti i valori di $q(x)$ per x compreso fra 0 e 1, onde potremo scrivere

$$\Gamma(x,y) = \mathrm{G}\left\|\left[x, y, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\|.$$

Prendiamo

$$\mathrm{A}\left\|\left[x, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| = 2\lambda(x) + 2\int_0^1 \mathrm{G}\left\|\left[x, y, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\|\lambda(y)\,dy$$

$$\mathrm{U}\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{A}\left\|\left[x, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\|\psi\left(x, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right)dx,$$

ove $y(x)$ è una funzione arbitraria e $\psi(x\,,\,q(x))$ pure una funzione arbitraria composta, nel senso ordinario, di $q(x)$.

Formiamo

---

[8] Cfr. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, tomo I, Leipzig 1902, p. 77 e sg.

[9] VOLTERRA, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 105.

$$\mathrm{H}\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right), p\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{A}\left\|\left[x, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| p^2(x)dx - \mathrm{U}\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\|.$$

Ciò premesso, calcoliamo

$$\mathrm{F}(x,q) = \int_0^q \sqrt{\psi(x,q) + a(x) + \int_0^1 a(\xi)g(x,\xi,q)d\xi}\, dq$$

$$\Phi\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right) a\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| = \int_0^1 \mathrm{F}(x, q(x))dx.$$

Si dimostra che

$$\int_0^1 \mathrm{A}\left\|\left[x, q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| \Phi_q^{'2}(x)dx = 2\mathrm{U}\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\| + 2\int_0^1 \lambda(\xi)a(\xi)d\xi,$$

ossia che l'equazione (IV) è soddisfatta prendendo

$$h = \int_0^1 \lambda(\xi)a(\xi)d\xi.$$

Gli integrali (5') saranno quindi

$$(5'')\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{q(x,2)} \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{D}(x,q)}} + \int_0^1 dy \int_0^{q(y,z)} \frac{g(y,x,q)dq}{\sqrt{\mathrm{D}(y,q)}} = \lambda(x)z + b(x) \\ \sqrt{\mathrm{D}(x, q(x,z))} = p(x,z). \end{cases}$$

7. L'annullarsi della variazione dell'integrale

$$\int_0^{z_0}\left\{ H\left\|\left[q\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}, z\right), p\left(\begin{matrix}1\\ \xi\\ 0\end{matrix}, z\right), z\right]\right\| - \int_0^1 \frac{\partial q(\xi,z)}{\partial z} p(\xi,z)d\xi\right\} dz,$$

facendo variare di infinitamente poco q e p, conduce evidentemente alle equazioni integro-differenziali (II), e quindi alla equazione alle derivate funzionali (III).

8. È interessante di mettere a confronto i tipi diversi di equazioni alle derivate funzionali che si manifestano allorché si parte da equazioni alle derivate parziali[10] o da equazioni integro-differenziali, derivanti, le une e le altre, da questioni di calcolo delle variazioni.

9. Problemi meccanici che conducano ad equazioni del tipo (II) si presentano, per esempio, allorché si considerano sciami di corpuscoli del tipo di quelli che si presentano nello studio dell'anello di Saturno, che possono sotto un certo aspetto trattarsi come sistemi continui senza che fra gli elementi esistano vincoli esprimibili con equazioni di tipo differenziale.

[10] VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. III. § 8.