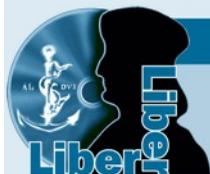


# Progetto Manuzio



Vito Volterra

## Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali



[www.liberliber.it](http://www.liberliber.it)

Questo e-book è stato realizzato anche grazie al  
sostegno di:



**E-text**

Editoria, Web design, Multimedia

<http://www.e-text.it/>

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Osservazioni sui nuclei delle equazioni in-  
tegrali

AUTORE: Volterra, Vito

TRADUTTORE:

CURATORE:

NOTE:

DIRITTI D'AUTORE: no

LICENZA: questo testo è distribuito con la licenza  
specificata al seguente indirizzo Internet:  
<http://www.liberliber.it/biblioteca/licenze/>

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito  
Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia naziona-  
le dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale  
delle ricerche; 4: 1914-1925. - Roma : Accademia na-  
zionale dei Lincei, 1960. - 540 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1

0: affidabilità bassa

1: affidabilità media

2: affidabilità buona  
3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:  
Catia Righi, [catia\\_righi@tin.it](mailto:catia_righi@tin.it)

REVISIONE:  
Paolo Alberti, [paoloalberti@iol.it](mailto:paoloalberti@iol.it)

PUBBLICAZIONE:  
Catia Righi, [catia\\_righi@tin.it](mailto:catia_righi@tin.it)

### **Informazioni sul "progetto Manuzio"**

Il "progetto Manuzio" è una iniziativa dell'associazione culturale Liber Liber. Aperto a chiunque voglia collaborare, si pone come scopo la pubblicazione e la diffusione gratuita di opere letterarie in formato elettronico. Ulteriori informazioni sono disponibili sul sito Internet:

<http://www.liberliber.it/>

### **Aiuta anche tu il "progetto Manuzio"**

Se questo "libro elettronico" è stato di tuo gradimento, o se condividi le finalità del "progetto Manuzio", invia una donazione a Liber Liber. Il tuo sostegno ci aiuterà a far crescere ulteriormente la nostra biblioteca. Qui le istruzioni:

<http://www.liberliber.it/sostieni/>

**I.**

**OSSERVAZIONI SUI NUCLEI  
DELLE EQUAZIONI INTEGRALI**

«Rend. Acc. Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXIII<sub>1</sub>, 1914<sub>1</sub>;  
pp. 266-269.

1. Sia

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) f_1(\xi, x) d\xi$$

l'equazione risolvente dell'equazione integrale

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) f(\xi, x) d\xi$$

Fra il nucleo dell'equazione primitiva e quello della risolvente passano le relazioni<sup>1</sup>

$$f(x, y) + f_1(x, y) = - \int_x^y f(x, \xi) f_1(\xi, y) d\xi = - \int_x^y f_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi.$$

Se il nucleo dell'equazione primitiva è della forma  $f(x - \xi)$ , ossia appartiene al *gruppo del ciclo chiuso*, vi apparterrà anche il nucleo risolvente che avrà quindi la forma  $f_1(x - \xi)$ ; e l'equazione precedente si scriverà:

---

<sup>1</sup> VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 67, form. (E) e (E').

$$(1) \quad f(x) + f_1(x) = - \int_0^x f(\xi) f_1(x - \xi) d\xi = - \int_0^x f_1(\xi) f(x - \xi) d\xi.$$

Il prof. TEDONE, in una recente Nota<sup>2</sup>, si domanda quando il nucleo risolvente possa ottenersi dal primitivo mediante un numero finito di operazioni di derivazione e d'integrazione.

Risolviamo il problema nel caso in cui il nucleo risolvente si voglia che resulti dato da una espressione lineare a coefficienti costanti delle derivate e di integrali del nucleo primitivo; cioè:

$$(1) \quad f_1(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x) + b_0 + b_1 \int_0^x f(\xi) d\xi + \\ + b_2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta + \dots$$

2. Facendo uso delle notazioni impiegate per la composizione<sup>3</sup>, la (1) si scriverà:

$$(2) \quad f + f_1 = - f \overset{x}{f} \overset{x}{f}_1$$

ossia

$$f_1 = \frac{\overset{x}{f}}{1 + \overset{x}{f}}.$$

D'altra parte,

<sup>2</sup> «Rend. Acc. Linc.», seduta 1° febbraio 1914.

<sup>3</sup> Vedi le lezioni precedenti citate, cap. IX.

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = f^x 1^x$$

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta = f^x 1^{2x}$$

.....

Sia

$$f(0)=c_0 \quad , \quad f'(0)=c_1 \quad , \quad f''(0)=2c_2 \quad , \dots \quad , \quad f^{(m)}(0)=m!c_m;$$

sarà

$$f - c_0 = f^x 1^x, \quad f - c_0 - c_1 x = f^{xx} 1^{2x}, \dots, \quad f - c_0 - c_1 x - \dots - c_m x^m = f^{(m)} 1^m$$

e, facendo uso del simbolo di divisione<sup>4</sup>,

$$\frac{x}{(f - c_0)} \quad 1^{-1} = f^x \quad , \quad \frac{x}{(f_0 - c_0 - c_1 x)} \quad 1^{-2} = f^{xx}, \dots$$

$$\frac{x}{f - c_0 - c_1 x - \dots - c_m x^{m-1}} \quad 1^{-m} = f^{(m)}.$$

Avremo dunque<sup>5</sup>

$$a_0 f + a_1 \frac{x}{(f - c_0)} 1^x + a_2 \frac{x}{(f_0 - c_0 - c_1 x)} 1^{2x} + \dots + b_0 + b_1 f^x 1^x$$

<sup>4</sup> Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 16.

<sup>5</sup> L'uso di questo simbolo è qui intuitivo. L'ho già impiegato più in generale nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton, che vedranno presto la luce [in questo volume delle «Opere», V, pp. 43-73].

$$+ b_2 \overset{x}{f} \overset{x}{1}^2 + \dots = - \frac{\overset{x}{f}}{1 + \overset{x}{f}}.$$

Le operazioni simboliche di divisione e di moltiplicazione possono trattarsi come operazioni algebriche; quindi, riducendo a forma intera, avremo:

$$(3) \left[ a_0 \overset{x}{f} \overset{x}{1}^m + a_1 \frac{\overset{x}{f}}{\overset{x}{(f - c_0)}} \overset{x}{1}^{m-1} + \dots + a_m (f - c_0 - c_1 x - \dots - c_m x^{m-1}) + b^0 \overset{x}{1}^m + b_1 \overset{x}{f} \overset{x}{1}^{m+1} + b_2 \overset{x}{f} \overset{x}{1}^{m+2} + \dots \right] (1 + \overset{x}{f}) = - \overset{x}{f} \overset{x}{1}^m.$$

Questa è una equazione integrale di secondo grado della cui soluzione mi sono occupato nelle mie lezioni sulle funzioni di linee<sup>6</sup>.

3. Come esempio, risolviamo il problema di *trovare un nucleo tale che il nucleo risolvente sia la derivata del primitivo*, cioè si abbia

$$f + f' = - \overset{x}{f} \overset{x}{f}'$$

ossia

$$f' = \frac{\overset{x}{f}}{1 + \overset{x}{f}}.$$

Ma

$$f' = \frac{\overset{x}{f}}{\overset{x}{(f - c_0)}} \overset{x}{1}^{-1}$$

---

<sup>6</sup> Per trasformare la equazione (2) nella (3) sarebbe bastato applicare  $m$  volte la integrazione alla equazione (2).

quindi

$$\frac{x}{(f - c_0)} 1^{-1} = - \frac{f}{1 + f}$$

e, riducendo a forma intera,

$$\frac{x}{(f - c_0)} (1 + f) = - f 1.$$

Questa equazione integrale si scrive, supponendo  $c_0 = 1$  per trattare il caso più semplice,

$$f^2 + f - 1 = 0.$$

Per risolverla, basta considerare l'equazione algebrica<sup>7</sup>

$$y^2 + y - z = 0,$$

da cui segue

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4z}}{2}.$$

Prendiamo la radice che si annulla per  $z = 0$  e sviluppiamola in serie di potenze di  $z$ . Si otterrà

$$y = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n!} z^n.$$

Sostituiamo, al posto di  $z$ ,  $1$  e consideriamone le potenze simboliche come composizioni, cioè

---

<sup>7</sup> Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 13.

$$1^{\times 2} = x \quad , \quad 1^{\times 3} = \frac{x^2}{2!} \quad , \quad \dots \quad , \quad 1^{\times n} = \frac{x^n - 1}{(n-1)!}.$$

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n!(n-1)!} x^{n-1}.$$

Questa funzione risulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione  $f$  doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.