Progetto Manuzio

Vito Volterra

Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche; 4: 1914-1925. - Roma : Accademia nazionale dei Lincei, 1960. - 540 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
0: affidabilità bassa
1: affidabilità media

2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

REVISIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

I.

OSSERVAZIONI SUI NUCLEI DELLE EQUAZIONI INTEGRALI

«Rend. Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. XXIII$_1$, 1914$_1$;
pp. 266-269.

1. Sia

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) f_1(\xi, x) d\xi$$

l'equazione risolvente dell'equazione integrale

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) f(\xi, x) d\xi$$

Fra il nucleo dell'equazione primitiva e quello della risolvente passano le relazioni[1]

$$f(x,y) + f_1(x,y) = -\int_x^y f(x,\xi) f_1(\xi, y) d\xi = -\int_x^y f_1(x,\xi) f(\xi, y) d\xi .$$

Se il nucleo dell'equazione primitiva è della forma $f(x - \xi)$, ossia appartiene al *gruppo del ciclo chiuso*, vi apparterrà anche il nucleo risolvente che avrà quindi la forma $f_1(x - \xi)$; e l'equazione precedente si scriverà:

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 67, form. (E) e (E').

$$(1)\qquad f(x) + f_1(x) = -\int_0^x f(\xi) f_1(x-\xi) d\xi = -\int_0^x f_1(\xi) f(x-\xi) d\xi .$$

Il prof. TEDONE, in una recente Nota[2], si domanda quando il nucleo risolvente possa ottenersi dal primitivo mediante un numero finito di operazioni di derivazione e d'integrazione.

Risolviamo il problema nel caso in cui il nucleo risolvente si voglia che resulti dato da una espressione lineare a coefficienti costanti delle derivate e di integrali del nucleo primitivo; cioè:

$$(1)\qquad f_1(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x) + b_0 + b_1 \int_0^x f(\xi) d\xi +$$

$$+ b_2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta + \ldots$$

2. Facendo uso delle notazioni impiegate per la composizione[3], la (1) si scriverà:

$$(2)\qquad \overset{\times}{f} + f_1 = -\overset{\times}{f}\,\overset{\times}{f}_1$$

ossia

$$f_1 = \frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}} .$$

D'altra parte,

[2] «Rend. Acc. Linc.», seduta 1° febbraio 1914.

[3] Vedi le lezioni precedenti citate, cap. IX.

$$\int_0^x f(\xi)d\xi = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}$$

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)d\eta = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^2$$

. . . .

Sia

$f(0)=c_0$, $f'(0)=c_1$, $f''(0)=2c_2$, . . . , $f^{(m)}(0)=m!c_m$;

sarà

$$f - c_0 = \overset{\times}{f'}\overset{\times}{1}, f - c_0 - c_1x = \overset{\times}{f''}\overset{\times}{1}{}^2, ..., f - c_0 - c_1x - ... - c_m x^m = \overset{\times}{f^{(m)}}\, 1^m$$

e, facendo uso del simbolo di divisione[4],

$$\frac{\times}{(f - c_0}\ \overset{\times}{1}{}^{-1} = f' \quad , \quad \frac{\times}{(f_0 - c_0 - c_1x)}\ \overset{\times}{1}{}^{-2} = f'', ...$$

$$\frac{\times}{f - c_0 - c_1x - ... - c_m x^{m-1}}\ \overset{\times}{1}{}^{-m} = f^{(m)}.$$

Avremo dunque[5]

$$a_0 f + a_1 \frac{\times}{(f - c_0)}\ \overset{\times}{1}{}^{-1} + a_2 \frac{\times}{(f_0 - c_0 - c_1x)}\ \overset{\times}{1}{}^{-2} + ... + b_0 + b_1 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1} +$$

---

[4] Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 16.

[5] L'uso di questo simbolo è qui intuitivo. L'ho già impiegato più in generale nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton, che vedranno presto la luce [in questo volume delle «Opere», V, pp. 43-73].

$$+ b_2 \overset{\times}{f} \overset{\times}{1}^2 + \ldots = - \frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}}.$$

Le operazioni simboliche di divisione e di moltiplicazione possono trattarsi come operazioni algebriche; quindi, riducendo a forma intera, avremo:

$$(3) \quad \left[a_0 \overset{\times}{f} \overset{\times}{1}^m + a_1 \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}} \, \overset{\times}{1}^{m-1} + \ldots + a_m (f - c_0 - c_1 x - \ldots - c_m x^{m-1}) + \right.$$

$$\left. + \overset{\times}{b^0} \overset{\times}{1}^m + b_1 \overset{\times}{f} \overset{\times}{1}^{m+1} + b_2 \overset{\times}{f} \overset{\times}{1}^{m+2} + \ldots \right](1 + \overset{\times}{f}) = - \overset{\times}{f} \overset{\times}{1}^m.$$

Questa è una equazione integrale di secondo grado della cui soluzione mi sono occupato nelle mie lezioni sulle funzioni di linee[6].

3. Come esempio, risolviamo il problema di *trovare un nucleo tale che il nucleo risolvente sia la derivata del primitivo*, cioè si abbia

$$f + f' = - \overset{\times}{f} \overset{\times}{f'}$$

ossia

$$f' = \frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}}.$$

Ma

$$f' = \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}} \, \overset{\times}{1}^{-1}$$

[6] Per trasformare la equazione (2) nella (3) sarebbe bastato applicare *m* volte la integrazione alla equazione (2).

quindi

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\;\overset{\times}{1}^{-1} = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}$$

e, riducendo a forma intera,

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\;(1+\overset{\times}{f}) = -\overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}.$$

Questa equazione integrale si scrive, supponendo $c_0 = 1$ per trattare il caso più semplice,

$$\overset{\times}{f}^{2} + f - 1 = 0.$$

Per risolverla, basta considerare l'equazione algebrica[7]

$$y_2 + y - z = 0,$$

da cui segue

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4^z}}{2}.$$

Prendiamo la radice che si annulla per $z = 0$ e sviluppiamola in serie di potenze di z. Si otterrà

$$y = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!} z^n.$$

Sostituiamo, al posto di z , $\overset{\times}{1}$ e consideriamone le potenze simboliche come composizioni, cioè

[7] Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 13.

$$\overset{x}{1}{}^{2} = x \quad , \quad \overset{x}{1}{}^{3} = \frac{x^2}{2!} \quad , \; . \; . \; . \; . \; , \quad \overset{x}{1}{}^{n} = \frac{x^{n} - 1}{(n-1)!}.$$

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!(n-1)!} x^{n-1}.$$

Questa funzione resulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione *f* doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.