Vito Volterra

Sulle equazioni alle derivate funzionali

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Sulle equazioni alle derivate funzionali
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche; 4: 1914-1925. - Roma : Accademia nazionale dei Lincei, 1960. - 540 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
  0: affidabilità bassa
  1: affidabilità media
  2: affidabilità buona

3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

REVISIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

II

SULLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE FUNZIONALI

«Rend. Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. XXIII_1, 1914_1;
pp. 393-399.

1. Nella classificazione dei problemi che dipendono dai concetti di funzioni di linee, dopo quelli di tipo algebrico (equazioni integrali ed equazioni funzionali) vengono le equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali. Fra queste ultime, di speciale interesse sono quelle che appartengono al tipo delle equazioni ai differenziali totali, che vennero in modo particolare studiate; ma conviene segnalarne altre di diverso tipo che pure è utile di esaminare. È ciò che mi permetto fare in questa brevissima Nota, limitandomi a darne degli esempi.

2. Denotiamo con $\mathrm{F}\left|\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right|$ una quantità che dipende da tutti i valori di $f(x)$ nell'intervallo 0 , 1, che sia derivabile e non abbia punti eccezionali[1]. Vogliamo che essa soddisfi alla condizione

[1] VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 29.

(1) $$\int_0^1 f(\xi)\,\mathrm{F}'\left\|f(x),\xi\right\|d\xi = 0,$$

ove $\mathrm{F}'\left\|f(x),\xi\right\|$ denota la derivata di $\mathrm{F}\left\|f(x)\right\|$ eseguita nel punto ξ. Troviamo facilmente che la funzione

$$\Phi\left\|\left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}\right]\right\|,$$

ove con Φ si denota una quantità che dipende in modo arbitrario da $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}$, ed è continua derivabile e senza punti eccezionali, soddisfa alla (1). Reciprocamente se F soddisfa la (1) essa può mettersi sotto la forma precedente, perché non deve cambiare moltiplicando $f(x)$ per una costante qualunque.

La (1) rappresenta una delle equazioni del nuovo tipo.

3. Consideriamo

$$\mathrm{F}\left\|\left[\alpha\,, f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right)\right]\right\|$$

ove F dipende dal parametro α e dai valori di $f(x)$ in tutto l'intervallo 0 , 1 e non ha punti eccezionali. Esaminiamo la equazione

(2) $$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \alpha} + \int_0^1 \mathrm{F}'\left\|\alpha\,, f(x), \xi\right\|d\xi \int_0^1 \varphi(\xi,\eta)\,f(\eta)\,d\eta = 0,$$

nella quale φ (ξ , η) rappresenta una funzione nota delle due variabili ξ e η, e

$$F'\left\| \alpha , f(x), \xi \right\|$$

indica la derivata funzionale di F rispetto a *f*, eseguita nel punto ξ.

La (2) rappresenta pure una delle equazioni del nuovo tipo.

La sua risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione della equazione integro-differenziale[2]

(3) $$\frac{\partial f(\xi,\alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \varphi(\xi,\eta) f(\eta,\alpha) d\eta .$$

Posto

$$\Lambda(\xi,\eta \mid \alpha) = \alpha\, \varphi(\xi,\eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \overset{\times\times}{\varphi}{}^2(\xi,\eta) + \frac{\alpha^3}{3!} \overset{\times\times}{\varphi}{}^3(\xi,\eta) + \ldots,$$

ove gli asterischi denotano operazioni di composizione di 2ª specie, la soluzione della (3) è data da

$$f(\xi,\alpha) = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Lambda(\xi,\eta \mid \alpha) \Psi(\eta) d\eta ,$$

essendo Ψ(ξ) una funzione arbitraria.

Ciò premesso, risolviamo l'equazione integrale

$$f(\xi) = \Psi(\xi,\alpha) + \int_0^1 \Lambda(\xi,\eta \mid \alpha) \Psi(\eta,\alpha) d\eta ,$$

nella quale α figura come un parametro costante, e sia

---

[2] Vedi lezioni precedentemente citate cap. XIII.

$$\Psi(\xi,\alpha) = f(\xi) + \int_0^1 \Lambda(\xi,\eta \mid \alpha) f(\eta)\, d\eta ,$$

la soluzione.

Il nucleo $\lambda(\xi , \eta \mid \alpha)$ si otterrà facilmente e sarà

$$\lambda(\xi,\eta \mid \alpha) = -\alpha\,\varphi(\xi,\eta) + \frac{\alpha^2}{2!}\overset{\times\times}{\varphi}{}^{2}(\xi,\eta) - \frac{\alpha^3}{3!}\overset{\times\times}{\varphi}{}^{3}(\xi,\eta) + \ldots$$

giacché si verifica immediatamente che

$$\Lambda(\xi,\eta \mid \alpha) + \lambda(\xi,\eta \mid \alpha) = -\int_0^1 \Lambda(\xi,\zeta \mid \alpha)\lambda(\zeta,\eta \mid \alpha)\, d\zeta .$$

Denoti ora $\Phi\left|\left[\theta\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}\right]\right|$ il simbolo di una quantità che dipende arbitrariamente da tutti i valori di $\theta(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sia continua derivabile e senza punti eccezionali. Se $\theta(x)$ dipenderà anche da un parametro α , Φ resulterà una funzione ordinaria del parametro stesso. In particolare si sostituisca, per $\theta(x)$, $\Psi(x , \alpha)$; resulterà allora Φ una quantità che dipenderà da tutti i valori di $f(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sarà una funzione ordinaria del parametro α, cioè avremo[3]

---

[3] Se per esempio prendiamo

$$\Phi\left|\left[\theta\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}\right]\right| = \int_0^1 \lambda(x)\theta(x)\, dx,$$

ove $\lambda(x)$ è una certa funzione determinata, sarà

$$F\left|\left[f\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix},\alpha\right]\right| = \int_0^1 \lambda(x)\Psi(x,\alpha)\, dx.$$

Se prendiamo invece

$$\text{(I)} \qquad F\left\|\left[\alpha, f\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}\right]\right\| = \Phi\left\|\left[f(x) + \int_0^1 \lambda(x,\eta\mid\alpha) f(\eta)\,d\eta\right]\right\|.$$

Proviamo adesso che la (I) *soddisfa l'equazione* (2). La verifica è molto semplice. Deriviamo $\Phi|[\theta(x)]|$ per rapporto a $\theta(x)$ nel punto ξ: otterremo una quantità che oltre dipendere da $\theta(x)$ è una funzione di ξ. Scriviamola per semplicità $\Phi'(\xi)$. Calcoliamo ora δF. Resulterà

$$\delta F = \int_0^1 \Phi'(\xi)\left\{\delta f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi,\eta\mid\alpha)\delta f(\eta)\,d\eta + \int_0^1 \frac{\partial\lambda(\xi,\eta\mid\alpha)}{\partial\alpha} f(\eta)\,d\eta\,\delta\alpha\right\} d\xi,$$

quindi

$$F'\|[\alpha, f(x), \xi]\| = \Phi'(\xi) + \int_0^1 \Phi'(\eta)\lambda(\eta,\xi\mid\alpha)\,d\eta,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \int_0^1 \Phi'(\xi)\,d\xi \int_0^1 \frac{\partial\lambda(\xi,\eta\mid\alpha)}{\partial\alpha} f(\eta)\,d\eta.$$

Onde il primo membro della (2) si scriverà, sostituendovi le espressioni precedenti,

$$\text{(4)} \quad \int_0^1 \Phi'(\xi)\,d\xi \int_0^1 f(\eta)\,d\eta \times \left[\frac{\partial\lambda(\xi,\eta\mid\alpha)}{\partial\alpha} + \varphi(\xi,\eta) + \int_0^1 \lambda(\xi,\zeta\mid\alpha)\varphi(\zeta,\eta)\,d\zeta\right].$$

Ma dalla espressione trovata superiormente per $\lambda(\xi\,,\,\eta\mid$

$$\Phi\left\|\left[\theta\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}\right]\right\| = \int_0^1\int_0^1 \mu(x,y)\theta(x)\theta(y)\,dx\,dy$$

sarà

$$F\left\|\left[f\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}, \alpha\right]\right\| = \int_0^1\int_0^1 \mu(x,y)\Psi(x,\alpha)\Psi(y,\alpha)\,dx\,dy,$$

e così di seguito.

α) si ricava

$$\frac{\partial\lambda(\xi,\eta\mid\alpha)}{\partial\alpha}+\varphi(\xi\cdot\eta)+\int_0^1\lambda(\xi,\zeta\mid\alpha)\varphi(\zeta\cdot\eta)d\zeta = 0,$$

dunque la (4) sarà nulla qualunque siano Φ'(ξ) e f(η), e per conseguenza la (2) è verificata comunque si prendano Φ ed f.

4. I procedimenti indicati, come in tutti i casi analoghi, possono facilmente farsi discendere dal noto concetto di passaggio dal finito all'infinito, che informa tutti i procedimenti dell'analisi a cui appartengono le questioni trattate. È interessante osservare come negli integrali compariscono delle *funzioni arbitrarie di linee*.

5. Di uno speciale interesse sono la equazione

$$(5)\qquad \int_0^1\int_0^1 F''\left[f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right),\xi,\eta\right]K(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0,$$

in cui F'' è la derivata seconda di $F\left\|\left[f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right)\right]\right\|$ eseguita nei punti ξ e η, e l'altra analoga

$$(5')\qquad \int_0^1 F''\|[f(x),\xi,\xi]\|d\xi+\int_0^1\int_0^1 F''\|[f(x),\xi,\eta]\|H(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = 0,$$

ove

$$F''\|[f(x),\xi,\xi]\| = \lim_{\eta\to\xi}F''\|[f(x),\xi,\eta]\|.$$

Esse possono considerarsi come equazioni tipiche corrispondenti alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti, e possono rispettivamente chiamarsi *equazioni lineari alle derivate funzionali del 2° ordine di 1ª e di 2ª specie*.

6. Supponiamo, nella (5),

$$K(\xi,\eta)=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s a_{is}\varphi_i(\xi)\varphi_s(\eta) \quad , \quad a_{is}=a_{si},$$

ove le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono normalizzate.

Prendiamo la forma reciproca

$$G(\xi,\eta)=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s b_{is}\varphi_i(\xi)\varphi_s(\eta) \quad , \quad b_{is}=b_{si}$$

tale, cioè, che

$$\sum_1^n{}_h a_{ih}b_{hs}=\begin{cases}0, i\neq s\\ 1, i=s.\end{cases}$$

Poniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\xi,\eta)f(\xi)f(\eta)d\xi\, d\eta=\rho$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(\rho)=F\left|\left[f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right)\right]\right|$$

che soddisfano la (5).

Avremo

$$F'|[f(x),\xi]|=\theta'(\rho)\int_0^1 G(\xi,x)f(x)dx$$

$$F''|[f(x),\xi,\eta]|=\theta''(\rho)\int_0^1 G(\xi,x)f(x)dx\int_0^1 G(\eta,y)f(y)dy+\theta'(\rho)G(\xi,\eta),$$

e quindi

$$\int_0^1\int_0^1 F''\left|\left[f(x),\xi,\eta\right]\right|K(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 2\theta''(\rho)\rho + n\theta'(\rho).$$

Se dunque la (5) deve essere soddisfatta, sarà

(II) $$\theta(r) = A\rho^{-\frac{n}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

7. Passiamo adesso alla (5'). Potremo sempre supporre H (x , y) simmetrica. Calcoliamo L (x , y) tale da soddisfare il principio di reciprocità[4], cioè

(6) $$H(x,y) + L(x,y) = -\int_0^1 H(x,\xi)L(\xi,y)\,d\xi,$$

ammesso diverso da zero il determinante.

Si riconosce facilmente che L (x , y) sarà simmetrico, e che H ed L saranno permutabili di 2ª specie.

Poniamo

$$r = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 L(\xi,\eta)f(\xi)f(\eta)\,d\xi\,d\eta$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(r) = F\left|\left[f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right)\right]\right|$$

che soddisfano la (5'). Avremo

(7) $$F'\left|\left[f(x),\xi\right]\right| = \theta'(r)\left\{f(\xi) + \int_0^1 L(\xi,x)f(x)\,dx\right\},$$

[4] Vedi Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 105.

$$
(7') \qquad F''\left\| f(x), \xi, \eta \right\| = \theta''(r) \left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi, x) f(x) dx \right\} \times
$$

$$
\times \left\{ f(\eta) + \int_0^1 L(y, \eta) f(y) dy \right\} + \theta'(r) L(\xi, \eta).
$$

Per conseguenza,

$$
(8) \qquad \int_0^1 F''\left\| f(x), \xi, \xi \right\| d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''\left\| f(x), \xi, \eta \right\| H(\xi, \eta) d\xi\, d\eta
$$

$$
= \theta''(r) \left\{ f^2(\xi) d\xi + \int_0^1 \int_0^1 M(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi\, d\eta \right\}
$$

$$
+ \theta'(r) \left\{ \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) H(\xi, \eta) d\xi\, d\eta + \int_0^1 L(\xi, \xi) d\xi \right\}.
$$

ove

$$
M = H + 2 \overset{\times\times}{H} \overset{\times\times}{L} + \overset{\times\times}{H} \overset{\times\times}{L^2} + \overset{\times\times}{L^2} + 2L
$$

in cui si è fatto uso, come precedentemente nel § 3, della notazione che rappresenta la composizione di 2ª specie[5].

Ma in virtù della (6), che si può scrivere

$$
H + L = - \overset{\times\times}{H} \overset{\times\times}{L},
$$

abbiamo

$$
\overset{\times\times}{H} \overset{\times\times}{L^2} = - \overset{\times\times}{L^2} + H + L :
$$

quindi

[5] Vedi Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 179.

$$M = H - 2H - 2L - \overset{\times\times}{L}^2 + H + L + \overset{\times\times}{L}^2 + 2L = L.$$

Si ha poi,

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi,\eta)H(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = -\int_0^1 \{L(\xi,\xi) + H(\xi,\xi)\}d\xi,$$

onde la (8) si scriverà

$$\Omega = \int_0^1 F''|[f(x),\xi,\xi]|d\xi + \int\int F''|[f(x),\xi,\eta]|H(\xi,\eta)d\xi\, d\eta =$$

$$= 2\theta''(r)r - h\theta'(r),$$

ove

$$h = \int_0^1 H(\xi,\xi)d\xi.$$

Affinché la (5') sia soddisfatta, basterà dunque prendere

(III) $$\theta(r) = Ar^{\frac{h}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

Si è così riusciti ad ottenere gli integrali (II) e (III) delle equazioni del 2° ordine lineari alle derivate funzionali di 1ª e di 2ª specie considerate, analoghi a quelli sui quali si applica l'analisi di GREEN.

8. Dalla (7) segue

$$\delta F'|[f(x),\xi]| = \theta'(r)\delta f(\xi) + \int_0^1 F''|[f(x),\xi,\eta]|\delta f(\eta)d\eta;$$

il punto ξ è quindi eccezionale[6] e $\theta'(r)$ è il coefficiente differenziale di $\delta f(x)$.

Facendo uso di una notazione adottata fino dai miei primi lavori sopra questo soggetto[7] potremo scrivere

$$\left(F'\left\|\left[f(x),\xi\right]\right\|\right)'_{f(\xi)} = \theta'(r).$$

Avremo dunque

$$\Omega + \int_0^1 \left(F'\left\|\left[f(x),\xi\right]\right\|\right)'_{f(\xi)} M(\xi)d\xi = 2\theta''(r)r + (m-h)\theta'(r),$$

ove si è posto

$$m = \int_0^1 M(\xi)d\xi.$$

Preso dunque

$$\text{(IV)} \qquad F\left\|\left[f\left(\begin{matrix}1\\x\\0\end{matrix}\right)\right]\right\| = \theta(r) = Ar^{\frac{k-m}{2}+1} + B$$

con A e B costanti, essa verificherà l'equazione

$$\int_0^1 F''\left\|\left[f(x),\xi,\xi\right]\right\|d\xi + \int_0^1\int_0^1 F''\left\|\left[f(x),\xi,\eta\right]\right\|H(\xi,\eta)d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int_0^1 \left(F'\left\|\left[f(x),\xi\right]\right\|\right)'_{f(\xi)} M(\xi)d\xi = 0.$$

---

[6] VOLTERRA, *Leçons sur les équation intégrales el intégro-différentielles*, Chap. I, § VII.

[7] *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Nota II, § 4, 14. «Rend. Acc. Linc.», 18 sett. 1887. [In queste «Opere», volume primo, XVII, p. 306].