

Progetto Manuzio



Roberto Bonola

La geometria non-euclidea



www.liberaliber.it

Questo e-book è stato realizzato anche grazie al sostegno di:

E-text

Editoria, Web design, Multimedia

<http://www.e-text.it/>

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: La Geometria non-euclidea

AUTORE: Bonola, Roberto

TRADUTTORE:

CURATORE:

NOTE:

DIRITTI D'AUTORE: no

LICENZA: questo testo è distribuito con la licenza specificata al seguente indirizzo Internet:
<http://www.liberliber.it/biblioteca/licenze/>

TRATTO DA: Roberto Bonola
La Geometria non-euclidea.
Esposizione storico-critica del suo sviluppo
con 69 figure
Bologna
Ditta Nicola Zanichelli editore
1906

CODICE ISBN: informazione non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 22 marzo 2007

INDICE DI AFFIDABILITA': 1

0: affidabilità bassa

1: affidabilità media

2: affidabilità buona

3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:

Catia Righi, catia_righi@tin.it

Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

REVISIONE:

Catia Righi, catia_righi@tin.it

Edouard Gout, edouardgout@free.fr

PUBBLICATO DA:

Catia Righi, catia_righi@tin.it

Informazioni sul "progetto Manuzio"

Il "progetto Manuzio" è una iniziativa dell'associazione culturale Liber Liber. Aperto a chiunque voglia collaborare, si pone come scopo la pubblicazione e la diffusione gratuita di opere letterarie in formato elettronico. Ulteriori informazioni sono disponibili sul sito Internet: <http://www.liberliber.it/>

Aiuta anche tu il "progetto Manuzio"

Se questo "libro elettronico" è stato di tuo gradimento, o se condividi le finalità del "progetto Manuzio", invia una donazione a Liber Liber. Il tuo sostegno ci aiuterà a far crescere ulteriormente la nostra biblioteca. Qui le istruzioni:
<http://www.liberliber.it/sostieni/>

ROBERTO BONOLA

LA
GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

ESPOSIZIONE STORICO-CRITICA
DEL SUO SVILUPPO

CON 69 FIGURE

BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1906

INDICE

Prefazione.

CAPITOLO I.

I dimostratori del V postulato euclideo.

- § 1-5. Il postulato delle parallele presso i geometri greci
- § 6. Il postulato delle parallele presso gli arabi
- § 7-10. Il postulato delle parallele durante il Rinascimento ed il XVII secolo

CAPITOLO II.

I precursori della Geometria non-euclidea.

- § 11-17. Gerolamo Saccheri [1667-1733]
- § 18-22. Giovanni Enrico Lambert [1728-1777]
- § 23-26. I geometri francesi alla fine del XVIII secolo
- § 27-28. Adriano Maria Legendre [1752-1833]
- § 29. Wolfgang Bolyai [1775-1856]
- § 30. Federico Lodovico Wachter [1792-1817]

CAPITOLO III.

I fondatori della Geometria non-euclidea.

- § 31-34. Carlo Federico Gauss [1777-1855]
- § 35. Ferdinando Carlo Schweikart [1780-1859]
- § 36-38. Francesco Adolfo Taurinus [1794-1874]

CAPITOLO IV.

I fondatori della Geometria non-euclidea.

[seguito]

- § 39-45. Nicola Ivanovic Lobacefski [1793-1856]
- § 46-55. Giovanni Bolyai [1802-1860]
- § 56-58. La trigonometria assoluta
- § 59. Ipotesi equivalenti al postulato euclideo
- § 60-65. La diffusione della geometria non-euclidea

CAPITOLO V.

I successivi sviluppi della Geometria non-euclidea.

§ 66.

Indirizzo metrico-differenziale

- § 67-69. La geometria sopra una superficie
- § 70-76. Fondamenti d'una geometria piana secondo le idee di Riemann
- § 77. Fondamenti d'una geometria spaziale secondo Riemann
- § 78. L'opera di H.Helmoltz e le ricerche di S. Lie

Indirizzo proiettivo.

- § 79-83. Subordinazione della geometria metrica alla proiettiva
- § 84-91. Rappresentazione della geometria di Lobacefski-Bolyai sul piano euclideo
- § 92. Rappresentazione della geometria ellittica di Riemann nello spazio euclideo
- § 93. Fondazione della geometria partendo da concetti grafici
- § 94. Sulla indimostrabilità del postulato d'Euclide

NOTA I.

**I principi fondamentali della Statica
e il postulato d'Euclide.**

- § 1-3. Sul principio della leva
- § 4-8. Sulla composizione delle forze concorrenti
- § 9-10. La statica non-euclidea
- § 11-12. Deduzione statica della trigonometria piana

NOTA II.

**Le parallele e la superficie di Clifford.
Cenni sul problema di Clifford-Klein.**

- § 1-4. Le parallele di Clifford
- § 5-8. La quadrica di Clifford
- § 9-11. Cenni sul problema di Clifford-Klein

Elenco degli autori citati

PREFAZIONE

Il materiale da tempo raccolto intorno alle origini e allo sviluppo della Geometria non-euclidea, l'interesse che hanno acquistato le esposizioni storico-critiche dei fondamenti delle discipline scientifiche mi hanno indotto ad allargare i confini della prima parte del mio articolo «*Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee.*» comparso, or sono sei anni, fra le «*Questioni riguardanti la geometria elementare*»⁽¹⁾, raccolte e coordinate dal prof. F. ENRIQUES.

L'articolo, completamente rifatto per la versione tedesca di quell'opera, tratta prevalentemente la parte costruttiva del tema; questo libro è dedicato invece a una diffusa esposizione della storia delle parallele ed allo sviluppo storico delle geometrie di LOBACEFSKI-BOLYAI e di RIEMANN.

Nel I CAPITOLO, prendendo le mosse da EUCLIDE e dai più antichi commentatori del *V postulato*, ho riprodotto i ragionamenti più caratteristici con cui i greci, gli arabi, i geometri della Rinascenza pretesero stabilire su basi più solide la teoria delle parallele. Nel II CAPITOLO principalmente con l'opera di SACCHERI, LAMBERT, LEGENDRE, ho cercato di lumeggiare il trapasso dalle antiche alle nuove idee, sorte sul principio del XIX secolo; nel III e IV CAPITOLO, attraverso le ricerche di GAUSS, SCHWEIKART, TAURINUS e l'opera costruttiva di LOBACEFSKI e BOLYAI, ho esposto i fondamenti del primo dei sistemi geometrici edificati sulla negazione della V ipotesi di EUCLIDE. Nel V CAPITOLO ho delineato sinteticamente i successivi sviluppi della Geometria non-euclidea, che sorsero dalle indagini di RIEMANN ed HELMHOLTZ sulla struttura dello spazio, e dalla estensione proiettiva di CAYLEY del concetto di *proprietà metrica*.

In tutto il corso della esposizione mi sono studiato di presentare i vari argomenti secondo il loro ordine storico: quando però tale ordine mi avrebbe troppo allontanato dalla semplicità espositiva che mi ero prefissa, l'ho sacrificato volentieri, pur di mantenere al libro un carattere strettamente elementare.

Fra i tanti postulati equivalenti al V euclideo, di cui i più notevoli sono riportati in fine al IV capitolo, ve n'è uno d'indole *statica*, che, verificato sperimentalmente, potrebbe fornire una base empirica alla teoria delle parallele. Da ciò un importante legame fra la *Geometria* e la *Statica* [GENOCCHI], al quale, non avendo trovato un posto adatto nei precedenti capitoli, ho dedicato la prima delle due NOTE con cui termina il libro.

La II NOTA si riferisce ad un argomento non meno interessante. Le ricerche di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI sulla teoria delle parallele hanno la loro origine nella estensione d'uno dei concetti fondamentali della Geometria classica. Ma un concetto si può estendere generalmente in varie direzioni.

Nel nostro caso, il parallelismo ordinario, fondato sull'ipotesi di rette non secantisi, coplanari ed equidistanti, fu esteso dai predetti geometri lasciando cadere il *V postulato* di EUCLIDE [equidistanza], e in seguito da CLIFFORD, abbandonando l'*ipotesi della coplanarità*.

Delle parallele di CLIFFORD, studiate prima con metodo proiettivo [CLIFFORD-KLEIN], poi col sussidio della Geometria differenziale [BIANCHI, FUBINI], mancava una trattazione elementare: la II NOTA, è dedicata, in gran parte, alla esposizione sintetico-elementare delle più semplici ed eleganti proprietà che loro competono. La nota termina con un rapido cenno del problema di CLIFFORD-KLEIN, che storicamente si riattacca al parallelismo di CLIFFORD, e che mira a caratterizzare la struttura geometrica dello spazio in base al più ristretto sistema di postulati compatibili coi dati sperimentali e col principio d'omogeneità dello spazio.

Ecco, brevemente, il contenuto del libro.

Prima di affidare la modesta opera al giudizio dei benevoli lettori, sento il dovere di ringraziare vivamente il mio amato maestro, prof. FEDERIGO ENRIQUES, per i preziosi consigli con cui mi

⁽¹⁾ Bologna, Zanichelli, 1900.

ha soccorso per la disposizione e pel contenuto critico della materia; il prof. CORRADO SEGRE, che gentilmente ha posto a mia disposizione il manoscritto di un *Corso di lezioni* sulla Geometria non-euclidea, da lui dettato, or son tre anni, nell'Università di Torino; il caro amico prof. GIOVANNI VAILATI, per le preziose indicazioni fornitemi intorno alla Geometria greca e l'aiuto prestatomi nella revisione delle bozze.

Finalmente anche all'ottimo Comm. CESARE ZANICHELLI, che ha sollecitamente accolto il mio lavoro nella sua collezione di opere scientifiche, vadano pure i miei più sentiti ringraziamenti.

Pavia, marzo 1906.

ROBERTO BONOLA.

LA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

CAPITOLO I.

I dimostratori del V postulato euclideo.

IL POSTULATO DELLE PARALLELE PRESSO I GEOMETRI GRECI

§ 1. EUCLIDE [330-275 circa a. C.] chiama parallele due rette coplanari che prolungate comunque non s'incontrano [Def. XXIII]⁽²⁾. Dimostra [Prop. XXVII, XXVIII] che due rette che formano con una loro trasversale angoli alterni interni uguali, ovvero angoli corrispondenti uguali, od angoli interni da una stessa parte supplementari sono parallele. Per dimostrare poi le inverse di queste proposizioni EUCLIDE si giova del seguente *postulato* [V]:

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due prolungate da questa parte si incontrano.

La teoria euclidea delle parallele è poi completata dai seguenti teoremi:

Linee rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro [Prop. XXX].

Per un punto dato si può tracciare una sola retta parallela ad una retta data [Prop. XXXI].

Segmenti compresi fra segmenti uguali e paralleli sono uguali e paralleli [Prop. XXXII].

Dall'ultimo teorema si deduce l'equidistanza di due parallele. Fra le conseguenze più notevoli di questa teoria si trovano il noto teorema sulla somma degli angoli d'un triangolo e le proprietà delle figure simili.

§ 2. Fino i più antichi commentatori del testo euclideo ritennero che il *V postulato* non fosse abbastanza evidente per accettarlo senza dimostrazione, per cui essi cercarono di dedurlo come conseguenza di altre proposizioni. Per raggiungere lo scopo sostituirono talvolta la definizione euclidea di parallele, di forma grammaticale negativa, con altre definizioni, che non presentano detta forma, ritenuta difettosa.

PROCLO [410-485], nel suo *Commento al I libro di Euclide*⁽³⁾, ci trasmette preziose notizie circa i primi tentativi fatti in proposito. Riferisce, ad esempio, che POSIDONIO [I° secolo a. C.] aveva proposto di chiamare parallele due rette coplanari ed equidistanti. Questa definizione e quella euclidea corrispondono però a due fatti che possono presentarsi separatamente, e PROCLO [pag. 177], riferendosi ad una trattazione di GEMINO [1° sec. a. C.] adduce in proposito gli esempi dell'iperbole, della concoide e del loro comportarsi rispetto ai relativi asintoti, per far vedere che vi potrebbero essere linee parallele nel senso euclideo, cioè linee che prolungate all'infinito non s'incontrano, e tuttavia non parallele nel senso di POSIDONIO, cioè non equidistanti.

Tale fatto è qualificato da GEMINO, sempre al dire di PROCLO, come *il più paradossale* [παροδοξότατον] di tutta la geometria.

Volendo poi accordare la definizione euclidea con quella di POSIDONIO è necessario dimostrare che due rette coplanari che non s'incontrano sono equidistanti; ovvero che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta. Per tale dimostrazione EUCLIDE si giova appunto del suo postulato.

PROCLO [pag. 364] si rifiuta però di annoverarlo fra i postulati, osservando, a conferma di tale sua opinione, il fatto che la sua inversa [«La somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti»], è un teorema dimostrato da EUCLIDE [Prop. XVII], non sembrandogli possibile che una proposizione, la cui inversa è dimostrabile, non sia alla sua volta dimostrabile. Mette anche in

⁽²⁾ Per quanto riguarda il testo euclideo ci riferiremo sempre all'edizione critica di J. L. HEIBERG [Lipsia, Teubner, 1883].

⁽³⁾ Per quanto riguarda il testo di PROCLO ci riferiremo all'edizione curata da G. FRIEDLEIN: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii* [Lipsia, Teubner, 1873].

guardia contro gli abusivi appelli all'evidenza ed insiste sulla possibile [ipotetica] esistenza di rette asintotiche [pag. 191-2].

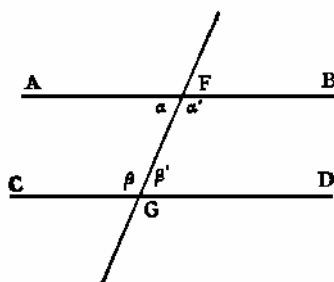


Fig. 1.

TOLOMEO [2° sec. d. C.], sempre al dire di PROCLO [p. 362-5], tentò di risolvere la questione con questo curioso ragionamento. Siano AB, CD due parallele, FG una trasversale, α e β i due angoli interni a sinistra di FG, ed α' e β' i due angoli interni a destra. Ciò posto la somma $\alpha + \beta$ sarà o maggiore o minore ovvero uguale a due angoli retti. Si *ammetta* che se per una coppia di parallele si verifica, ad es., il 1° caso [$\alpha + \beta > 2$ retti], altrettanto avvenga per ogni altra coppia. Allora poichè le rette FB, GD sono fra loro parallele, come sono parallele le rette FA, GC, così da: $\alpha + \beta > 2$ retti, si deduce: $\alpha' + \beta' > 2$ retti. Seguirebbe: $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4$ retti, il che è manifestamente assurdo. Dunque non può essere $\alpha + \beta > 2$ retti. Nello stesso modo si dimostra che non può essere $\alpha + \beta < 2$ retti, quindi sarà $\alpha + \beta = 2$ retti [PROCLO, pag. 365].

Da questo risultato si trae facilmente il *postulato* euclideo.

§ 3. PROCLO [pag. 371], dopo aver criticato il ragionamento di TOLOMEO, tenta raggiungere lo stesso scopo per altra via. La dimostrazione di PROCLO riposa sulla seguente proposizione, che egli assume come evidente. *La distanza fra due punti situati su due rette che si tagliano può rendersi grande quanto si vuole, prolungando sufficientemente le due rette*⁽⁴⁾. Da questa deduce il lemma:

Una retta che incontra una di due parallele incontra necessariamente anche l'altra.

Ecco la dimostrazione del lemma data da PROCLO. Siano AB, CD due parallele ed EG una trasversale, incidente in F alla prima. La distanza di un punto variabile sul raggio FG dalla retta AB cresce oltre ogni limite quando il punto si allontana indefinitamente da F; e poichè la distanza di due parallele è finita, la retta EG dovrà necessariamente incontrare CD.

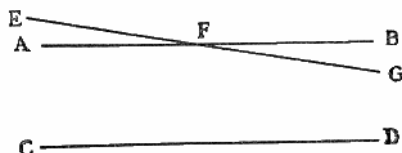


Fig. 2.

PROCLO introdusse dunque l'ipotesi che la distanza di due parallele si mantenga finita, ipotesi da cui logicamente si deduce quella d'Euclide.

§ 4. Che il *postulato d'Euclide* fosse oggetto di discussioni e ricerche presso i greci risulta ancora dalla seguente paradossale argomentazione, con cui, al dire di PROCLO [pag. 369], si pretendeva dimostrare che due rette tagliate da una terza non s'incontrano, anche quando la somma degli angoli interni da una stessa parte è minore di due angoli retti.

Sia AC una trasversale delle due rette AB, CD ed E il punto medio di AC. Da quella parte di AC, in cui la somma degli angoli interni è minore di due angoli retti, si prendano su AB e CD i segmenti AF, CG uguali ad AE. Le due rette AB, CD non possono incontrarsi fra i punti A, F e C, G, perchè in un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.

⁽⁴⁾ Questa proposizione, assunta come evidente, è da PROCLO appoggiata coll'autorità di ARISTOTILE: cfr. «De Coelo, I, 5». Una rigorosa dimostrazione della prop. in discorso fu data dal Padre G. SACCHERI, nell'opera citata a p. 20.

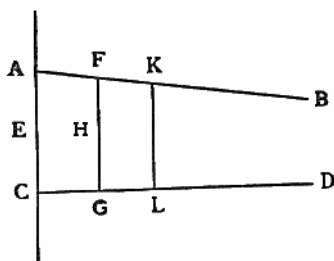


Fig. 3.

Congiunti poi i punti F, G, a partire dal segmento FG, si ripeta la precedente costruzione, cioè si determinino su AB, CD i due segmenti FK, GL, ciascuno eguale alla metà di FG. Le due rette AB, CD non potranno incontrarsi fra i punti F, K e G, L. E poichè questa operazione può ripetersi indefinitamente, si volle concludere che le due rette AB, CD non si sarebbero mai incontrate.

Il vizio principale dell'argomentazione risiede nell'uso dell'infinito, poichè i segmenti AF, FK,... potrebbero, per successive diminuzioni, tendere a zero e la loro *serie* essere finita. L'autore del paradosso ha fatto uso dello stesso principio con cui ZENONE [495-435 a. C.] pretendeva dimostrare che ACHILLE non raggiungerebbe la testuggine, pur muovendosi con velocità doppia della velocità di quest'ultima.

Ciò è notato, sotto altra forma, da PROCLO [pag. 369-70] dicendo che ciò che così si dimostra è che, col suddetto processo non si può raggiungere il punto d'incontro [determinare: $\delta\rho\iota\zeta\epsilon\upsilon\nu$], non che esso non esista.

PROCLO osserva inoltre che, «poichè la somma di due angoli d'un triangolo è minore di due angoli retti [EUCLIDE, XVII], esistono delle rette che tagliate da una terza s'incontrano da quella parte in cui la somma degli angoli interni è minore di due angoli retti; così a chi asserisce che per una qualunque differenza fra detta somma e due angoli retti le due rette non s'incontrano, si può rispondere che per differenze minori le rette s'incontrano».

«Ma se per *alcune* coppie di rette formanti con una terza angoli interni da una stessa parte la cui somma è minore di due angoli retti, esiste un punto d'incontro, resta a vedere se ciò accade per *tutte* le coppie. Poichè *alcuno potrebbe osservare che vi fosse una certa deficienza* [da due angoli retti] *per la quale esse [rette] non s'incontrano, incontrandosi invece tutte le altre per le quali tale deficienza fosse ulteriore*, [PROCLO, pag. 371]». Dal seguito risulterà che il dubbio qui affacciato da PROCLO ha fondamento soltanto nel caso in cui il segmento AC della trasversale [Fig. 3] rimane invariabile, mentre le due rette della coppia, ruotando intorno ai punti A e C, fanno variare la loro *deficienza*.

§ 5. Un'altra dimostrazione assai antica del V postulato, riportata nel Commento arabo di AL-NIRIZI ⁽⁵⁾[IX secolo], pervenutoci ancora attraverso la traduzione latina di GHERARDO DA CREMONA ⁽⁶⁾[XII secolo], è attribuita ad AGANIS ⁽⁷⁾.

La parte di questo commento, relativa alle definizioni, postulati, assiomi, contiene frequenti riferimenti al nome di SAMBELICHIUS, che s'identifica facilmente con SIMPLICIUS, il celebre commentatore di ARISTOTILE, vissuto nel VI secolo. SIMPLICIUS avrebbe adunque scritto una *Introduzione* al I libro di Euclide, esprimendo in essa idee simili a quelle di GEMINO e POSIDONIO, affermando che il V postulato non è evidente e riportando la dimostrazione del suo compagno AGANIS.

Questa dimostrazione è fondata sull'ipotesi che esistano rette equidistanti, rette che AGANIS, come già POSIDONIO, chiama parallele. Da tale ipotesi egli deduce che la minima distanza di due pa-

⁽⁵⁾ Cfr. R.-O. BESTHORN ed J.-L. HEIBERG. «*Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschschadsch cum commentariis Al-Narizii*». [Copenhagen, F. Hegel, 1893-97].

⁽⁶⁾ Cfr. M. CURTZE: «*Anarithi in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata*. [Lipsia, Teubner, 1899].

⁽⁷⁾ A proposito di AGANIS è bene notare che è da CURTZE ed HEIBERG identificato con GEMINO. Invece P. TANNERY, rigetta tale identificazione. Cfr. TANNERY: «*Le philosophe Aganis est il identique a Geminus?*» Biblioteca Math. (3), t. 2, p. 9-11 [1901].

rallele è un segmento perpendicolare comune alle due rette; che due rette perpendicolari ad una terza sono fra loro parallele; che due parallele tagliate da una terza formano angoli interni da una stessa parte supplementari e reciprocamente.

La semplicità con cui si dimostrano queste proposizioni ci dispensa dal riportare i ragionamenti di AGANIS. Dopo aver notato che da esse seguono le Prop. XXX, XXXII di EUCLIDE [cfr. p. 1], indichiamo come AGANIS costruisca il punto d'incontro di due rette non equidistanti.

Siano AB, GD due rette intersecate dalla trasversale EZ e tali che la somma degli angoli interni AEZ, EZD sia minore di due retti. Senza togliere nulla alla generalità della figura si può supporre che AEZ sia retto.

Si fissi allora su ZD un punto arbitrario T, dal quale si conduca TL perpendicolare a ZE ; poi si divida, col punto P, il segmento EZ in due parti uguali, indi, col punto M, il segmento PZ in due parti uguali, successivamente MZ in due parti uguali, ecc.... fino a che uno dei punti medi P, M,... cada nel segmento LZ. Se questo, ad es., è il punto M, si tracci in M la retta perpendicolare ad EZ, che incontrerà in N la ZD. Si costruisca finalmente su ZD il segmento ZC, multiplo di ZN come ZE è multiplo di ZM. Nel nostro caso è: $ZC = 4 \cdot ZN$. Il punto C così ottenuto è il punto d'incontro delle due rette AB e GD.

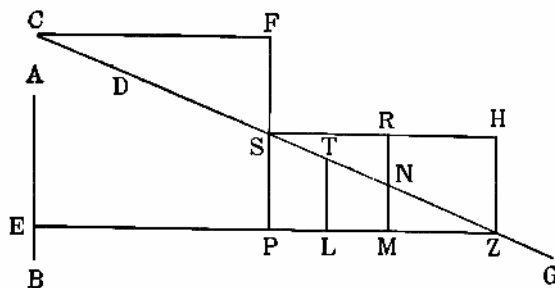


Fig. 4.

Per provare ciò bisognerebbe dimostrare che i segmenti consecutivi ed uguali ZN, NS,... della retta ZD, hanno proiezioni uguali sulla ZE. Non ci fermiamo su questo fatto perchè dovremo tornarvi in seguito. Del resto il ragionamento è suggerito dalla figura stessa di AGANIS.

Rileviamo la caratteristica della precedente costruzione: essa risiede nell'uso [implicito] del cosiddetto *postulato di Archimede*, necessario per assegnare il segmento MZ, sottomultiplo di EZ e minore di LZ.

Il postulato delle parallele presso gli arabi.

§ 6. Gli arabi, successori dei greci nel primato delle matematiche, si occuparono come questi del V postulato. Alcuni però accettarono senz'altro le idee e le dimostrazioni dei loro maestri, come, ad es., AL-NIRIZI [IX secolo], il cui commento alle definizioni, postulati, ed assiomi del I libro è modellato, sulla introduzione agli «Elementi» dovuta a SIMPLICIUS, e la cui dimostrazione della *V ipotesi euclidea* è quella sopra accennata [§ 5] di AGANIS.

Altri portarono un contributo personale alla questione. NASÎR-EDDÎN [1201-1274], ad es., benchè dimostri il *V postulato*, informandosi al criterio seguito da AGANIS, merita di essere ricordato, per la veduta originale di premettere esplicitamente il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, e per la forma esauriente del suo ragionamento⁽⁸⁾.

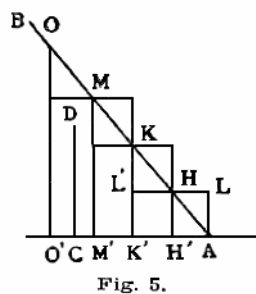
Ecco la parte essenziale dell'ipotesi ch'egli ammette. *Se due rette r ed s sono la prima perpendicolare, l'altra obliqua al segmento AB, i segmenti di perpendicolare calati da s su r sono minori di AB dalla banda in cui AB forma con s angolo acuto, maggiori di AB dalla banda di cui AB forma con s angolo ottuso.* Segue immediatamente che se due segmenti uguali AB, A'B' cadono da una stessa banda e perpendicolarmente su la retta BB', la retta AA' sarà perpendicolare essa pure ai

⁽⁸⁾ Cfr. «Euclidis elementorum libri XII studio Nassiredini» [Roma, 1594]. Quest'opera, scritta in lingua araba, fu riprodotta nel 1657, 1801. Non ne esiste alcuna traduzione in altra lingua.

due segmenti dati. Inoltre si avrà $AA' = BB'$, vale a dire la figura $AA'B'B$ è un quadrilatero con gli angoli retti e i lati opposti uguali, cioè un *rettangolo*.

Da questo risultato NASÎR-EDDÎN ricava facilmente che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti. Per il triangolo rettangolo la cosa è manifesta, essendo esso metà di un rettangolo; per il triangolo qualunque si ottiene lo scopo mediante la decomposizione del triangolo in due triangoli rettangoli.

Ciò posto ecco rapidamente come il geometra arabo dimostra il *postulato euclideo* [cfr. AGANIS].



Siano AB, CD due raggi, l'uno obliquo l'altro perpendicolare alla retta AC . Su AB si fissi il segmento AH e da H si cali la perpendicolare HH' su AC . Se il punto H' cade in C , ovvero da banda opposta di A rispetto a C , i due raggi AB, CD s'incontrano senz'altro. Se poi H' cade fra A e C si tracci il segmento AL , perpendicolare ad AC ed uguale ad HH' . Allora, per quanto sopra si disse sarà : $HL = AH'$. Consecutivamente ad AH si prenda HK uguale ad AH e da K si cali la perpendicolare KK' su AC . Essendo $KK' > HH'$, si formi $K'L' = H'H$ e si congiunga H con L' . Essendo i due quadrilateri $K'H'HL', H'ALH$ entrambi rettangoli i tre punti L', H, L sono in linea retta.

Segue: $\hat{L}'HK = \hat{AHL}$ e conseguentemente l'uguaglianza dei due triangoli $AHL, HL'K$. Quindi: $L'H = HL$, e per le proprietà dei rettangoli : $K'H' = H'A$.

Prendasi ora KM uguale e consecutivo ad HK e da M si cali MM' perpendicolare ad AC . Con un ragionamento uguale a quello ora svolto si dimostra:

$$M'K' = K'H' = H'A.$$

Ottenuto questo primo risultato si prenda un multiplo di AH' maggiore di AC [*postulato di ARCHIMEDE*]. Sia, ad esempio, $AO' = 4$. $AH' > AC$. Allora su AB si costruisca $AO = 4$. AH e da O si cali la perpendicolare ad AC . Questa perpendicolare sarà evidentemente OO' . Allora nel triangolo rettangolo $AO'O$ la retta CD , perpendicolare al cateto $O'A$, non potendo incontrare l'altro cateto OO' , incontrerà necessariamente l'ipotenusa OA . Con ciò rimane dimostrato che due rette AB, CD , l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale AC , si incontrano. In altre parole si è dimostrato il *postulato euclideo* nel caso in cui uno degli angoli interni sia retto. Facendo poi uso del teorema sulla somma degli angoli d'un triangolo, NASÎR-EDDÎN riconduce il caso generale a questo caso particolare. Non riproduciamo il ragionamento perchè nel seguito dovremo riportarne uno uguale [cfr. § 15]⁽⁹⁾¹⁰.

Il postulato delle parallele durante il Rinascimento ed il XVII secolo.

§ 7. Tanto le prime versioni degli «*Elementi*», fatte nel XII e XIII secolo sui testi arabi, quanto le successive compilate sui testi greci alla fine del XV e nella prima metà del XVI non portano in generale alcuna annotazione critica al *V postulato*. La critica rinasce dopo il 1550, principalmente per impulso del *Commento* di PROCLO⁽¹¹⁾. Per meglio seguirla citiamo brevemente le vedute dei più autorevoli commentatori dei secoli XVI e XVII.

⁽⁹⁾ La dimostrazione di NASÎR-EDDÎN del *V postulato* è riportata per disteso dal geometra inglese J. WALLIS, nel II volume delle sue opere (cfr. nota n. 18), e da G. CASTILLON, in un suo scritto pubblicato nei «*Mém. de l'Académie Royale de Sciences et Belles-lettres*» di Berlino, T. XVIII, p. 175-183 [1788-89]. Inoltre di essa fanno cenno parecchi altri scrittori, fra cui rammenteremo principalmente G. S. KLÜGEL (cfr. nota 12), J. HOFFMAN [*Critik der Parallelen-Theorie*, Jena 1807]; V. FLAUTI [*Nuova dimostrazione del postulato quinto...*, Napoli 1818].

¹⁰ Nell'edizione elettronica Manuzio, i rimandi a pagine del testo sono stati sostituiti con rimandi ai paragrafi.

⁽¹¹⁾ Il *Commento* di PROCLO fu stampato per la prima volta a Basilea [1533] nel testo originale; poi a Padova [1560] nella traduzione latina del BAROZZI.

F. COMMANDINO [1509-1575] nella definizione euclidea di parallele aggiunge, senza giustificazione, il concetto di equidistanza ; intorno al *V postutato* riporta il giudizio e la dimostrazione di PROCLO⁽¹²⁾.

C. CLAVIO [1537-1612], nella sua traduzione latina del testo euclideo⁽¹³⁾, riporta e critica la dimostrazione di PROCLO. Porge poi una nuova dimostrazione dell'ipotesi euclidea basandosi sul teorema: «*La linea equidistante da una retta è una retta*», ch'egli cerca di giustificare con ragionamenti analogici. La dimostrazione di CLAVIO ha molti punti di contatto con quella di NASÎR-EDDÎN.

P. A. CATALDI [? -1626] è il primo geometra moderno che pubblica un lavoro esclusivamente dedicato alla questione delle parallele⁽¹⁴⁾. Il CATALDI muove dal concetto di rette equidistanti e non equidistanti, ma per provare l'effettiva esistenza di rette equidistanti ricorre all'ipotesi che «*rette non equidistanti in un verso convergono e nell'altro divergono*». [cfr. NASÎR-EDDÎN]⁽¹⁵⁾.

G. A. BORELLI [1608-1679] ammette, cercando di giustificarlo, il seguente assioma [XIV]: «*Se sopra una retta linea trasportata lateralmente nello stesso piano sopra d'un'altra retta linea, la tocchi sempre mai con l'estremo suo punto, et in tutto il suo corso sia a quella perpendicolarmente elevata: l'altro suo punto estremo descriverà col suo moto una retta linea*».

Successivamente dimostra che due rette perpendicolari ad una terza sono equidistanti e definisce le parallele come rette equidistanti. Segue la teoria delle parallele⁽¹⁶⁾.

§ 8. GIORDANO VITALE [1608-1711], riattaccandosi al concetto di equidistanza formulato da POSIDONIO, sente con PROCLO la necessità di escludere che le parallele di EUCLIDE possano avere un comportamento asintotico. Allo scopo definisce parallele due rette equidistanti e cerca di provare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta⁽¹⁷⁾.

La dimostrazione riposa sostanzialmente su questo lemma: *Se fra due punti A, C, presi in qualunque linea curva, il cui concavo sia verso X, sia tirata la retta AC e se dagli infiniti punti dell'arco AC cadono delle perpendicolari a qualche retta, dico essere impossibile che quelle perpendicolari siano fra loro uguali.*

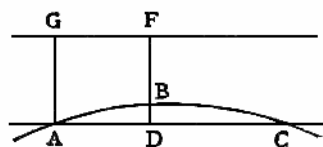


Fig. 6.

La «*qualche retta*» di cui si parla nell'enunciato, non è una retta qualunque del piano, ma una retta costruita nel seguente modo: Dal punto B dell'arco AC si cali BD, perpendicolarmente alla corda AC; poi in A si innalzi AG, pure perpendicolarmente ad AC; finalmente presi i due segmenti uguali AG e DF sulle due perpendicolari costruite, si congiungano gli estremi G, F. La GF è la retta che GIORDANO considera nella sua dimostrazione, retta rispetto alla quale l'arco AB non è certamente una linea equidistante.

Ma quando l'autore vuol dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è pure una retta, applica il precedente lemma ad una figura in cui non sono verificate le relazioni che intercedono fra l'arco ABC e la retta GF, onde le conseguenze ch'egli deduce sulla esistenza di rette equidistanti non sono affatto lecite.

Ma quando l'autore vuol dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è pure una retta, applica il precedente lemma ad una figura in cui non sono verificate le relazioni che intercedono fra l'arco ABC e la retta GF, onde le conseguenze ch'egli deduce sulla esistenza di rette equidistanti non sono affatto lecite.

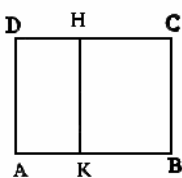


Fig. 7.

Sotto questo aspetto la dimostrazione di GIORDANO non offre alcun vantaggio sulle precedenti; essa però contiene una notevolissima proposizione, il cui concetto acquisterà nel seguito un maggiore sviluppo.

Sia ABCD un quadrilatero con gli angoli A, B retti ed i lati AD, BC uguali; sia inoltre HK una perpendicolare calata da un punto H del segmento DC sulla base AB del quadrilatero. GIORDANO dimostra: 1°) che gli angoli D, C sono uguali.

⁽¹²⁾ *Elementorum libri XV* [Pesaro, 1572].

⁽¹³⁾ *Euclidis elementorum libri XV* [Roma, 1574].

⁽¹⁴⁾ «*Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti*» [Bologna, 1603].

⁽¹⁵⁾ Ulteriori osservazioni sull'argomento furono fatte dal CATALDI nell'«*Aggiunta all'operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti*» [Bologna, 1604].

⁽¹⁶⁾ BORELLI: «*Euclides restitutus*» [Pisa, 1658].

⁽¹⁷⁾ GIORDANO VITALE: *Euclide restituito ovvero gli antichi elementi geometrici restaurati, e facilitati. Libri XV* [Roma, 1680].

li, 2°) che ove il segmento HK sia uguale al segmento AD i due angoli D, C sono retti e che CD è equidistante da AB.

Con questo teorema GIORDANO riconduce la questione delle rette equidistanti a dimostrare l'esistenza di un punto H su DC, la cui distanza da AB sia uguale ai due segmenti AD, CB. Questo ci sembra uno dei risultati più notevoli ottenuto fino a quell'epoca, intorno alla teoria delle parallele⁽¹⁸⁾.

§ 9. J. WALLIS [1616-1703], abbandonando il concetto di equidistanza, sfruttato inutilmente dai precedenti geometri, diede una nuova dimostrazione del V postulato, fondandosi sulla nozione comune: *Di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria*. Ecco rapidamente come procede il WALLIS⁽¹⁹⁾.

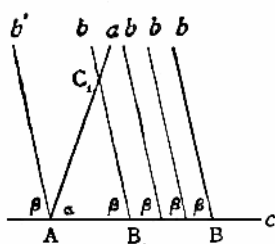


Fig. 8.

Siano a, b due rette intersecate in A, B dalla trasversale c ; ed α, β gli angoli interni da una stessa parte di c , tali che $\alpha + \beta$ sia minore di due angoli retti. Tracciata per A la retta b' in modo che b e b' formino con c angoli corrispondenti uguali è chiaro che b' cadrà nell'angolo adiacente ad α . Se ora spostiamo con continuità la retta b , in modo che B percorra il segmento AB e che l'angolo ch'essa forma con c si mantenga costantemente uguale a β la retta b , prima di raggiungere la posizione finale b' , dovrà necessariamente incontrare a . Resta così determinato un triangolo AB_1C_1 con gli angoli in A e B_1 rispettivamente uguali ad α e β . Ma per l'ipotesi di WALLIS sull'esistenza delle figure simili, su AB , come lato

omologo di AB_1 , si potrà costruire un triangolo ABC simile al triangolo AB_1C_1 , il che significa che le rette a, b debbono concorrere in un punto, cioè nel terzo vertice C del triangolo ABC . Dunque ecc....

WALLIS cerca poi di giustificare la sua originale veduta osservando che EUCLIDE, postulando l'esistenza di un cerchio di dato centro e dato raggio [III postulato], ammette in sostanza il principio di similitudine pei cerchi. Ma per quanto l'intuizione appoggi favorevolmente questa veduta il concetto di forma indipendente dall'estensione d'una figura costituisce una ipotesi, non certo più evidente di quella postulata da EUCLIDE.

Osserviamo ancora che WALLIS poteva più semplicemente ammettere l'esistenza di triangoli con angoli uguali o, come vedremo nel seguito, di due soli triangoli disuguali, con gli angoli a due a due uguali [cfr. nota 29].

§ 10. L'opera critica dei precedenti geometri è sufficiente per mettere in luce l'evoluzione storica del nostro quesito nei secoli XVI e XVII, onde giudichiamo superfluo parlare di altri insigni ricercatori, quali furono, ad es., OLIVIERO DI BURY [1604], LUCA VALERIO [1613], H. SAVILE [1621], A. TAQUET [1654], A. ARNAULD [1667]⁽²⁰⁾. Stimiamo piuttosto necessario dire qualche parola sul posto che nell'organismo geometrico occupa l'ipotesi euclidea presso i vari commentatori degli «Elementi».

Nell'edizione latina degli «Elementi» [1482], eseguita sui testi arabi dal CAMPANO [XIII secolo], l'ipotesi in discorso figura fra i postulati. Altrettanto dicasi nella traduzione latina fatta sul

⁽¹⁸⁾ Cfr. BONOLA: «Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti», Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Mat. [1905].

⁽¹⁹⁾ Cfr. WALLIS: «De Postulato Quinto; et Definizione Quinta - Lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica»; in Opera Math. t. II, p. 669-678. [Oxford, 1693]. Questo scritto di WALLIS contiene due conferenze ch'egli tenne all'Università di Oxford, la prima nel 1651, la seconda nel 1663. In esse viene riportata anche la dimostrazione di NASIR-EDDÛN. La parte che riguarda la dimostrazione di WALLIS fu tradotta in tedesco dai SS. ENGEL ed STÄCKEL nella Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, p. 21-36 [Leipzig, Teubner, 1895]. Quest'opera sarà nel seguito indicata con: Th. d. P.

⁽²⁰⁾ Per qualche indicazione in proposito vedere: RICCARDI, «Saggio di una bibliografia Euclidea». Mem. di Bologna, serie 5, T. I, p. 27-34 [1890].

greco da B. ZAMBERTI [1505], nelle edizioni di LUCA PACIOLO [1509], di N. TARTAGLIA [1543], di F. COMMANDINO [1572], di A. BORELLI [1658].

Invece la prima impressione degli «*Elementi*» in lingua greca [Basilea, 1533], contiene l'ipotesi fra gli assiomi [*assioma XI*]. Successivamente la riportano fra gli assiomi F. CANDALLA [1556], C. CLAVIO (1574), GIORDANO VITALE [1680] ed anche il GREGORY [1703], nella sua classica versione latina delle opere d'EUCLIDE.

Per tentare di rendersi conto di queste differenze, le quali, più che ai predetti autori, risalgono ai codici tramandati dai greci, gioverà sapere quale significato attribuissero questi ultimi alle parole «*postulati*» [ἀιτήματα] ed «*assiomi*» [ἀξιώματα]⁽²¹⁾. Notiamo anzitutto che la parola *assiomi* qui sta a significare ciò che EUCLIDE, nel suo testo, chiama «*nozioni comuni*» [κοινὰ ἔννοιαι].

In PROCLO sono indicati tre diversi modi di intendere la differenza che passa fra gli assiomi e i postulati.

Il primo modo si riattacca alla differenza che passa fra *problema* e *teorema*. Il *postulato* differisce dall'*assioma*, come il *problema* differisce dal *teorema*, dice PROCLO. Con questo si deve intendere che il *postulato* afferma la possibilità di una costruzione.

Il secondo modo consiste nel dire che il *postulato* è una *proposizione di contenuto geometrico*, dove l'*assioma* è una *proposizione comune tanto alla geometria quanto all'aritmetica*.

Finalmente il terzo modo di intendere la differenza fra le due parole è riportato da PROCLO, è appoggiato all'autorità di ARISTOTILE [384-322]. Le parole *assioma* e *postulato* in ARISTOTILE non sembrano usate in senso esclusivamente matematico. *Assioma* è ciò che è vero per se stesso, in forza cioè del significato delle parole che contiene, *postulato* è ciò che, pur non essendo un *assioma*, nel senso sopradetto, si ammette senza dimostrazione.

Talchè la parola *assioma*, come appare anche meglio da un esempio portato da ARISTOTILE [sottraendo da cose uguali cose uguali i resti sono uguali], è usata in un senso che corrisponde, presso a poco, a quello delle *nozioni comuni* di EUCLIDE, mentre la parola *postulato* ha in ARISTOTILE un senso diverso da ciascuno dei due sopra accennati⁽²²⁾.

Ora a seconda che si adotta l'una o l'altra di queste distinzioni fra le due parole, una certa proposizione potrà classificarsi o fra i *postulati* o fra gli *assiomi*. Adottando la prima, dei cinque postulati euclidei solo i tre primi, secondo PROCLO, meriterebbero questo nome, in quanto in essi soltanto è domandato di poter fare una costruzione [congiungere due punti, prolungare una retta, descrivere un cerchio di centro e raggio arbitrari]. Il IV [gli angoli retti sono uguali] ed il V dovrebbero invece classificarsi fra gli *assiomi*⁽²³⁾.

⁽²¹⁾ (2) Per quanto segue cfr. PROCLO, nel capitolo portante il titolo «*Petita et axiomata*». Recentemente G. VAILATI, in una sua comunicazione al terzo Congresso Mat. [Heidelberg, 1904], ha richiamato l'attenzione degli studiosi sul significato di queste parole presso i greci. Cfr.: «*Intorno al significato della distinzione tra gli assiomi ed i postulati nella geometria greca*», Ver. des dritten Math. Kongresses, p. 575-581, [Leipzig, Teubner, 1905].

⁽²²⁾ (1) Cfr. ARISTOTILE: *Analytica Posteriora*, I. 10. Riportiamo integralmente il passo, un po' oscuro, in cui questo filosofo parla del postulato.

Ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἔαν μὲν δοκοῦντα λαμβάνη τῷ μαθητῶντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἀπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμίας; ἐνοούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνη, τὸ αὐτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἰτήμα. ἔστι γὰρ αἰτήμα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μαθητῶντος τῆ δόξης.

⁽²³⁾ È opportuno osservare che il *V postulato* può enunciarsi così: *Si può costruire il punto comune a due rette, quando queste rette tagliate da una trasversale formano due angoli interni da una stessa parte la cui somma è minore di due angoli retti*. Da ciò risulta ch'esso, afferma, come i tre primi, la possibilità di una costruzione. Questo carattere scompare però totalmente se lo si enuncia, ad. es., così: *per un punto passa una sola parallela ad una retta*, ovvero: *due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro*. Parrebbe adunque che la su accennata distinzione fosse soltanto formale. Non bisogna però lasciarsi illudere dalle apparenze: il *V postulato*, comunque lo si enunci, permette, in sostanza, di *costruire* il punto d'incontro di tutte le rette d'un fascio, ad eccezione di una, con una retta assegnata sul piano del fascio. Tuttavia fra questo postulato ed i tre postulati di costruzione una certa differenza esiste: in questi i dati sono completamente indipendenti, in quello i dati (le due rette tagliate dalla trasversale) sono assoggettati ad una condizione. Sicchè più che ai *postulati* od agli *assiomi*, l'*ipotesi euclidea* appartiene ad un genere intermedio fra gli uni e gli altri.

Accettando invece la seconda o la terza distinzione, i postulati euclidei sono tutti cinque da noverarsi fra i postulati.

Con ciò l'origine delle divergenze fra i vari codici è facilmente spiegabile. Ad avvalorare questa spiegazione possiamo aggiungere l'incertezza in cui si trovano gli storici nell'attribuire ad EUCLIDE i *postulati*, le *nozioni comuni*, le *definizioni* del primo libro. Per quanto riguarda i postulati, i dubbi più forti si elevano contro i due ultimi: la presenza dei primi tre concorda abbastanza con l'intero piano dell'opera⁽²⁴⁾. Ammettendo, sia pure contro l'autorità di GEMINO e PROCLO, l'ipotesi che il IV e V postulato non siano d'EUCLIDE, il rigore estremo degli «*Elementi*» dovè condurre i successivi geometri a ricercare nel seno dell'opera tutte quelle proposizioni ammesse senza dimostrazione. Ora quella che ci interessa si trova, sotto una forma molto concisa, espressa nella dimostrazione della prop. XXIX. Da questa potè adunque essere tratto il contenuto del V *postulato* ed aggiunto ai postulati di costruzione od agli assiomi, a seconda dell'opinione professata dal trascrittore dell'opera d'EUCLIDE.

Il suo posto naturale sarebbe del resto, anche secondo il GREGORY, dopo la prop. XVII, di cui enuncia l'inversa.

Notiamo infine che, qualunque sia il modo di risolvere la questione di parole qui sollevata, la moderna filosofia matematica tende generalmente a sopprimere la distinzione fra postulato ed assioma, intesa nel secondo e terzo dei modi sopra ricordati, perchè prevale la veduta di attribuire alle proposizioni fondamentali della geometria un carattere di ipotesi appoggiate ad una base empirica, mentre sembra superfluo porre fra queste proposizioni delle affermazioni, che sieno semplici conseguenze delle definizioni date.

⁽²⁴⁾ Cfr. P. TANNERY: «*Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide*» — Bull. Sciences Math. (2), t. XXIV, p. 162-175 [1884].

CAPITOLO II.

I precursori della Geometria non-euclidea.

GEROLAMO SACCHERI [1667-1733]

§. 11. L'opera del Padre GEROLAMO SACCHERI: «*Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia.*» [Milano, 1733], nella sua parte maggiore è dedicata alla dimostrazione del *V postulato*. L'idea direttiva delle ricerche geometriche di SACCHERI si trova nella sua «*Logica demonstrativa*» [Torino, 1697], precisamente in un tipo speciale di ragionamento, già usato da EUCLIDE [Lib. IX, Prop. XII], per il quale, anche assumendo come ipotesi la falsità della proposizione che si vuol dimostrare, si giunge ugualmente a concludere che essa è vera⁽²⁵⁾.

Uniformandosi a questa idea l'autore prende come date le prime ventisei proposizioni d'EUCLIDE ed assunta come ipotesi la falsità del *V postulato* cerca, fra le conseguenze di questa ipotesi, una qualche proposizione che lo autorizzi ad affermare la verità del postulato stesso.

Prima di esporre l'opera saccheriana rammentiamo che EUCLIDE, per dimostrare la sua Prop. 16^a [l'angolo esterno d'un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti], ammette implicitamente che la retta sia *infinita*, essendo il suo ragionamento sostanzialmente fondato sulla esistenza d'un segmento doppio d'un segmento assegnato.

Della possibilità di lasciare cadere questa ipotesi parleremo nel seguito: per ora notiamo che SACCHERI tacitamente l'ammette, poichè, nel corso della sua opera, fa uso della *proposizione dell'angolo esterno*.

Notiamo infine che egli si giova ancora del *postulato di Archimede* e dell'*ipotesi della continuità della retta*⁽²⁶⁾, per estendere, a tutte le figure di un dato tipo, certe proposizioni ammesse come vere soltanto per una figura di quel tipo.

§ 12. La figura fondamentale di SACCHERI è il quadrilatero *birettangolo isoscele*, cioè il quadrilatero con due lati opposti uguali e perpendicolari alla base. Le proprietà di tale figura si deducono dal seguente 1° lemma, di facile dimostrazione

Se in un quadrilatero ABCD, con gli angoli consecutivi A, B retti, i lati AD e BC sono uguali anche l'angolo C è uguale all'angolo D [prop. I] se i lati AD e BC sono disuguali, dei due angoli C e D è maggiore quello adiacente al lato minore e viceversa.

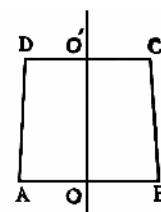


Fig. 9.

Sia ora ABCD un quadrilatero birettangolo [$\hat{A} = \hat{B} = 1$ retto] ed isoscele [AD = BC]: nell'ipotesi euclidea anche gli angoli C, D sono retti, talchè ammettendo che questi angoli possano essere entrambi *ottusi* od entrambi *acuti* si nega implicitamente il *V postulato*. SACCHERI discute appunto le tre ipotesi relative agli angoli C, D, ch'egli, denominava rispettivamente *ipotesi dell'angolo retto* [$\hat{C} = \hat{D} = 1$ retto], *ipotesi dell'angolo ottuso* [$\hat{C} = \hat{D} > 1$ retto], *ipotesi dell'angolo acuto* [$\hat{C} = \hat{D} < 1$ retto].

Un primo notevole risultato è il seguente: *A seconda che nel quadrilatero birettangolo isoscele ABCD è verificata l'ip. ang. retto, l'ip. ang. ottuso, l'ip. ang. acuto si ha rispettivamente: AB = CD, AB > CD, AB < CD [prop. III].* Infatti, nell'*ip. ang. retto*, dal lemma precedente si deduce su-

⁽²⁵⁾ Cfr. G. VAILATI «Di un'opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri», Rivista Filosofica [1903].

⁽²⁶⁾ Quest'ipotesi è usata da SACCHERI nella sua forma intuitiva, cioè: un segmento, che passa con continuità dalla lunghezza *a* alla lunghezza *b*, diversa da *a*, acquista, durante la variazione, una qualsiasi lunghezza compresa tra *a* e *b*.

bito $AB = CD$. Nell'*ip. ang. ottuso* la perpendicolare OO' sul mezzo del segmento AB divide il quadrilatero fondamentale in due quadrilateri uguali e rettangoli in O ed O' . Essendo poi $\hat{D} > \hat{A}$, per il citato lemma sarà $AO > DO'$, quindi $AB > CD$. Nell'*ip. ang. acuto* queste disuguaglianze cambiano di senso, quindi: $AB < CD$.

Il teorema dimostrato s'inverte ragionando per assurdo [prop. IV].

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, è vera in ogni altro caso. [prop. IV]

Sia nel quadrilatero birettangolo isoscele $ABCD$ verificata l'*ip. ang. retto*.

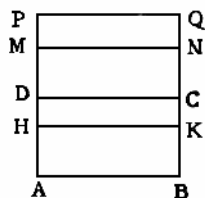


Fig. 10.

Presi in AD , e BC i punti H e K equidistanti da AB si formi il quadrilatero $ABKH$. Se HK è perpendicolare ad AH e BK anche nel nuovo quadrilatero sarebbe vera l'*ip. ang. retto*. Altrimenti si supponga $\hat{A}HK$ acuto, e conseguentemente il suo adiacente $\hat{D}HK$ ottuso. Allora nel quadrilatero $ABKH$, per l'*ip. ang. acuto*, sarebbe $AB < HK$, mentre nel quadrilatero $HKCD$, per l'*ip. ang. ottuso*, sarebbe $HK < DC$. Ma queste due disuguaglianze sono contraddittorie, essendo

$AB = DC$ [*ip. ang. retto* in $ABCD$]. Dunque $\hat{A}HK$ non può essere acuto; e poichè con lo stesso ragionamento si proverebbe che $\hat{D}HK$ non può essere ottuso, si conclude che anche nel quadrilatero $ABKH$ vale l'*ip. ang. retto*.

Sui prolungamenti di AD e BC si prendano i punti M , N equidistanti dalla base AB . Dico che anche nel quadrilatero $ABNM$ vale l' *ip. ang. retto*. Infatti se AM è multiplo di AD la proposizione è immediata; altrimenti si prenda un multiplo di AD maggiore di AM [*post. Archimede*] e sui raggi $AD\dots$, $BC\dots$ i due segmenti AP , BQ uguali a questo multiplo. Per quanto si disse sopra nel quadrilatero $ABQP$ vale l'*ip. ang. retto*, e conseguentemente la stessa ipotesi vale ancora nel quadrilatero $ABNM$.

Finalmente l'ipotesi in discorso vale per un quadrilatero di base qualunque, poichè, nella fig. 10, può assumersi per base uno dei lati perpendicolari ad AB .

OSSERVAZIONE. Questo teorema di SACCHERI è sostanzialmente contenuto in quello di GIORDANO VITALE, riportato a pag. 14⁽²⁷⁾. Infatti, riferendoci alla fig. 7, l'ipotesi:

$$DA = HK = CB,$$

è equivalente all'altra:

$$\hat{D} = \hat{H} = \hat{C} = 1 \text{ retto}.$$

Ma dalla prima discende l'equidistanza delle due rette DC , AB ,⁽²⁸⁾ quindi la validità dell'*ip. ang. retto* in tutti i quadrilateri birettangoli isosceli di altezza uguale al segmento DA . La stessa ipotesi vale poi anche in un quadrilatero di altezza qualunque, perchè in esso può invertirsi l'ufficio dei due segmenti base ed altezza.

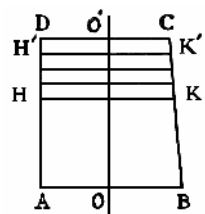


Fig. 11.

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, essa è vera, in ogni altro caso. [prop. VI].

Riferiamoci al solito quadrilatero $ABCD$, supponendo che gli angoli C , D siano ottusi. Presi su AD e BC i punti H , K , equidistanti da AB , si osservi in primo luogo che il segmento HK non può essere perpendicolare ai due lati AD , BC , inquantochè nel quadrilatero $ABKH$, e conseguentemente nel quadrilatero fondamentale, sarebbe verificata l'*ip. ang. retto*. Suppongasi allora che KHA sia acu-

⁽²⁷⁾ Alla fine del § 8 del capitolo I [Nota per l'edizione elettronica Manuzio]

⁽²⁸⁾ Veramente GIORDANO, nel suo ragionamento, si riferisce esplicitamente ai punti del segmento DC , che dimostra equidistanti dalla base AB del quadrilatero. Però lo stesso ragionamento è applicabile a tutti i punti della retta DC . — Cfr. la nota di R. BONOLA, citata a pag. 14. [Nota 17 della presente edizione elettronica Manuzio]

to. Allora, per l'*ip. ang. acuto*, sarebbe $HK > AB$, mentre, valendo in $ABCD$ l'*ip. ang. ottuso*, è $AB > CD$. Segue: $HK > AB > CD$. Muovendo ora con *continuità* la retta HK , in modo ch'essa rimanga perpendicolare alla mediana OO' del quadrilatero fondamentale, il segmento HK , compreso fra i lati opposti AD, BC , maggiore di AB nella posizione iniziale, diverrebbe minore di AB nella posizione finale CD . In base al postulato della continuità esisterebbe allora una posizione intermedia $H'K'$, per cui $H'K' = AB$. Conseguentemente nel quadrilatero $ABK'H'$ varrebbe l'*ip. ang. retto* [prop. III], la quale, pel teorema precedente, non lascierebbe sussistere in $ABCD$ l'*ip. ang. ottuso*. Il ragionamento vale anche se i segmenti AH, BK sono maggiori di AD , quindi non è possibile che l'angolo AHK sia acuto. Dunque in $ABKH$ vale l'*ip. ang. ottuso*, come in $ABCD$.

Passiamo ora a dimostrare il teorema per un quadrilatero di base qualunque, ad es. di base BK .

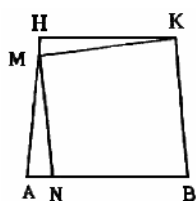


Fig. 12.

Essendo gli angoli K, H ottusi, la perpendicolare in K a KB incontrerà il segmento AH nel punto M , formando l'angolo AMK ottuso [teor. angolo esterno]. Allora in $ABKM$ sarà [1° lemma] $AB > KM$. Preso allora su AB il segmento BN uguale ad MK , può costruirsi il quadrilatero birettangolo isoscele $BKMN$, con l'angolo MNB ottuso, perchè esterno al triangolo ANM . Allora anche nel nuovo quadrilatero vale l'*ip. ang. ottuso*.

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo acuto, è vera in ogni caso

[prop. VII].

Il teorema si dimostra subito per assurdo.

§ 13. Da questi ultimi teoremi SACCHERI ricava facilmente una importante conseguenza, relativa ai triangoli. *A seconda che si trova verificata l'ipotesi dell'angolo retto, l'ipotesi dell'angolo ottuso, l'ipotesi dell'angolo acuto, la somma degli angoli d'un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore, minore di due angoli retti* [prop. IX].

Sia ABC un triangolo rettangolo in B . Si completi il quadrilatero tracciando AD uguale a BC e perpendicolare ad AB , indi congiungendo D con C .

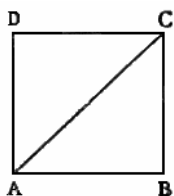


Fig. 13.

Nell'*ip. ang. retto* i due triangoli ABC, ACD sono uguali, per cui: $\hat{B}AC = \hat{D}CA$. Segue immediatamente, nel triangolo ABC :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retti.}$$

Nell'*ip. ang. ottuso*, essendo $AB > DC$, sarà: $\hat{ACB} > \hat{DAC}^{(29)}$, per cui nel triangolo in discorso avremo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2 \text{ retti.}$$

Nell'*ip. ang. acuto*, essendo $AB < DC$, segue: $\hat{A}CB < \hat{D}AC$, quindi, nel solito triangolo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2 \text{ retti.}$$

Il teorema dimostrato, che si estende facilmente ad un triangolo qualunque, con la decomposizione della figura in due triangoli rettangoli, viene invertito da SACCHERI nella prop. XV, mediante un ragionamento per assurdo.

⁽²⁹⁾ Questa disuguaglianza vien dimostrata da SACCHERI nella sua VIII proposizione e serve di lemma alla prop. IX. Abbiamo ommessa la facile dimostrazione, perchè essa si trova spessissimo nei testi elementari, avanti la teoria delle parallele.

Una facile conseguenza di questi risultati è il seguente teorema:

Se in un solo triangolo la somma degli angoli è uguale, maggiore, minore di due angoli retti, in ogni altro triangolo la somma in discorso è rispettivamente uguale, maggiore, minore di due angoli retti⁽³⁰⁾.

Questo teorema, che SACCHERI non enuncia esplicitamente, nella prima e terza ipotesi fu ritrovato e reso noto da LEGENDRE, circa un secolo dopo. Esso dovrà quindi chiamarsi teorema di SACCHERI e non teorema di LEGENDRE, come ordinariamente si fa.

§ 14. I precedenti teoremi sul quadrilatero birettangolo isoscele furono dimostrati da SACCHERI, e successivamente da altri geometri, col sussidio del *postulato di Archimede* e del *principio della continuità* [Cfr. prop., V, VI]. Il Sig. M. Dehn⁽³¹⁾ ha però dimostrato ch'essi ne sono indipendenti. Possiamo stabilire la cosa per via elementare, nel modo seguente⁽³²⁾.

Sulla retta r si fissino due punti B, D, dai quali si elevino i due segmenti perpendicolari ed uguali fra loro BA, DC, poscia si congiungano i due punti A e C per mezzo della retta s . La figura ottenuta, in cui evidentemente si ha $\hat{B}AC = \hat{D}CA$, è fondamentale per le nostre considerazioni, e ad essa ci riferiremo costantemente. Ciò posto siano E ed E' due punti di s , il primo situato fra A e C, il secondo no; siano inoltre F ed F' i piedi delle perpendicolari calate da E ed E' sulla retta r . Valgono allora i seguenti teoremi:

1°) Se: $\left\{ \begin{array}{l} EF = AB, \\ \text{ovvero:} \\ E'F' = AB \end{array} \right\}$, gli angoli BAC, DCA sono retti.

2°) Se: $\left\{ \begin{array}{l} EF > AB, \\ \text{ovvero:} \\ E'F' < AB \end{array} \right\}$, gli angoli BAC, DCA sono ottusi.

3°) Se: $\left\{ \begin{array}{l} EF < AB, \\ \text{ovvero:} \\ E'F' > AB \end{array} \right\}$, gli angoli BAC, DCA sono acuti.

Dimostriamo il 1° teorema.

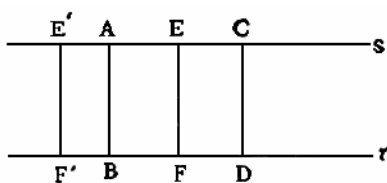


Fig. 14.

Dall'ipotesi $EF = AB$ si deducono le seguenti relazioni:

$$\hat{B}AE = \hat{F}EA; \quad E\hat{E}C^{(33)} = D\hat{C}E;$$

⁽³⁰⁾ Un'altra proposizione di SACCHERI, che non ci interessa direttamente, afferma che *se in un solo quadrilatero la somma degli angoli è uguale, maggiore, minore di quattro angoli retti, si deduce rispettivamente l'ip. ang. retto, l'ip. ang. ottuso, l'ip. ang. acuto*. A questa proposizione si riattacca una osservazione di SACCHERI sul postulato di WALLIS [cfr. § 9]. WALLIS poteva semplicemente ammettere l'esistenza di due soli triangoli con angoli uguali e lati disuguali per dedurre l'esistenza di un quadrilatero in cui la somma degli angoli è uguale a quattro angoli retti, quindi la validità dell'ip. ang. retto e successivamente il V postulato.

⁽³¹⁾ Cfr. Math. Ann. t. 53, p. 405-439: «Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck».

⁽³²⁾ Cfr. BONOLA: «I teoremi del Padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn.». Rend. Istituto Lombardo, serie II, Vol. XXXVIII [1905].

⁽³³⁾ Così nel testo, ma deve essere letto FEC [Nota per l'edizione elettronica Manuzio]

le quali, insieme alla relazione fondamentale:

$$\hat{B}AC = \hat{D}CA,$$

conducono a stabilire l'uguaglianza dei due angoli FEA, FEC. I quali, essendo adiacenti, saranno entrambi retti e conseguentemente retti i due angoli BAC, DCA.

Lo stesso ragionamento è applicabile nell'ipotesi

$$E'F' = AB.$$

Dimostriamo il 2° teorema.

Supponiamo in primo luogo $EF > AB$. Allora su EF prendiamo $EI = AB$ e congiungiamo I con A e C. Valgono allora le seguenti relazioni.

$$\hat{B}AI = \hat{F}IA, \hat{D}CI = \hat{F}IC$$

Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno [EUCLIDE, XVII], avremo pure:

$$\hat{F}IA + \hat{F}ICF > \hat{E}A + \hat{F}EC = 2 \text{ retti}^{(34)}$$

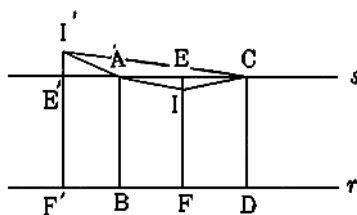


Fig. 15.

E poichè si ha:

$$\hat{B}AC + \hat{D}CA > \hat{B}AI + \hat{D}CI,$$

si deduce:

$$\hat{B}AC + \hat{D}CA > \hat{F}IA + \hat{F}IC > 2 \text{ retti}$$

Allora, per l'uguaglianza dei due angoli $\hat{B}AC, \hat{D}CA$, si ricava:

$$\hat{B}AC > 1 \text{ retto} \qquad \text{c. d. d.}$$

Supponiamo in secondo luogo $E'F' < AB$. Allora prolunghiamo $F'E'$ fino ad ottenere il segmento $F'I' = AB$ e congiungiamo I' con C ed A.

Valgono al solito le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F'I'A &= \hat{B}AI'; & F'I'C &= \hat{D}CI'; \\ I'AE' &> I'CE'; & F'I'A &< F'I'C \end{aligned}$$

Combinando queste relazioni si deduce in primo luogo

⁽³⁴⁾ Così nel testo, ma deve essere letto: $\hat{F}IA + \hat{F}IC > \hat{F}EA + \hat{F}EC = 2 \text{ retti}$ [Nota per l'edizione elettronica Manuzio]

$$\hat{B}A'I' < \hat{D}C'I',$$

dalla quale, sottraendo membro a membro la penultima delle precedenti, otteniamo:

$$\hat{B}A'E' < \hat{D}C'E' = \hat{B}A'C.$$

Ma i due angoli $\hat{B}A'E'$, $\hat{B}A'C$ sono adiacenti, quindi $\hat{B}A'C$ risulta ottuso, c. d. d.

In modo perfettamente analogo si dimostra il 3° teorema.

Questi teoremi s'invertono poi facilmente ragionando per assurdo. In particolare, se M ed N sono i punti medi dei due segmenti AC, BD, per il segmento MN di perpendicolare comune alle due rette AC, BD, avremo che:

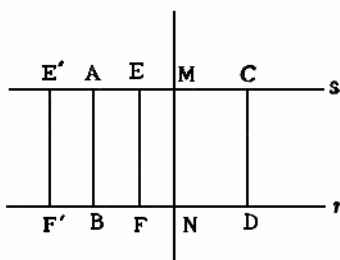


Fig. 16.

se: $\hat{B}A'C = \hat{D}C'A = 1$ retto, allora: $MN = AB$;

se: $\hat{B}A'C = \hat{D}C'A > 1$ retto, allora: $MN > AB$;

se: $\hat{B}A'C = \hat{D}C'A < 1$ retto, allora: $MN < AB$.

Inoltre è facile vedere che:

$$1^\circ) \text{ se: } \hat{B}A'C = \hat{D}C'A = 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}E'M \\ \hat{F}'E'M \end{array} \right\} = 1 \text{ retto}$$

$$2^\circ) \text{ se: } \hat{B}A'C = \hat{D}C'A > 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}E'M \\ \hat{F}'E'M \end{array} \right\} > 1 \text{ retto}$$

$$3^\circ) \text{ se: } \hat{B}A'C = \hat{D}C'A < 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}E'M \\ \hat{F}'E'M \end{array} \right\} < 1 \text{ retto}$$

Infatti, nel 1° caso, essendo le rette r , s equidistanti, valgono le seguenti relazioni:

$$\hat{N}M'A = \hat{F}E'M = \hat{B}A'C = \hat{F}'E'M = 1 \text{ retto.}$$

Per dimostrare il 2° ed il 3° caso basta ragionare per assurdo, tenendo presenti i risultati sopra ottenuti.

Sia ora P un punto della retta MN, non compreso fra i punti M ed N. Sia PR la perpendicolare ad MN ed RK la perpendicolare a BC in K. Quest'ultima perpendicolare incontrerà AC in un punto H. Ciò posto i precedenti teoremi permettono senz'altro di affermare che:

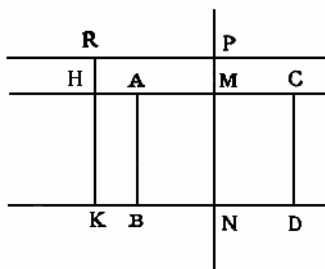


Fig. 17.

$$\text{se: } \hat{B}AM = 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{KHM} \\ \hat{KRP} \end{array} \right\} = 1 \text{ retto}$$

$$\text{se: } \hat{B}AM > 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{KHM} \\ \hat{KRP} \end{array} \right\} > 1 \text{ retto}$$

$$\text{se: } \hat{B}AM < 1 \text{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{KHM} \\ \hat{KRP} \end{array} \right\} < 1 \text{ retto}$$

Queste proprietà, come facilmente si scorge, valgono anche se il punto P cade fra M, N.

Concludendo, i tre ultimi teoremi, che manifestamente coincidono con quelli di SACCHERI relativi ai quadrilateri birettangoli isosceli, vale a dire: *se in un solo caso è vera rispettivamente l'ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso, dell'angolo acuto essa è vera in ogni altro caso*; sono dimostrati indipendentemente dal postulato di Archimede.

Volendo ora passare dai teoremi sui quadrilateri ai teoremi sui triangoli, enunciati sul principio di questo paragrafo, possiamo senz'altro riferirci ai ragionamenti di SACCHERI [cfr. p. 25], poichè quei ragionamenti non dipendono affatto dal postulato in discorso. Con ciò è ottenuto il risultato che ci eravamo proposto.

§ 15. Per rendere più breve l'esposizione dell'opera saccheriana, stacciamo dalle prop. XI, XII il contenuto del seguente 2° lemma.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C, siano H il punto di mezzo di AB, e K il piede della perpendicolare calata da H su AC.

Allora avremo:

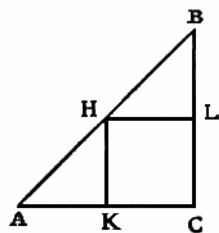


Fig. 18.

- AK = KC, nell'ip. ang. retto;
- AK < KC, nell'ip. ang. ottuso;
- AK > KC, nell'ip. ang. acuto.

La parte che riguarda l'ip. ang. retto è immediata. Nell'ip. ang. ottuso, essendo la somma degli angoli d'un quadrilatero maggiore di quattro angoli retti, sarà: $\hat{A}HK < \hat{H}BC$. Calata poi da H la HL, perpendicolare a BC, i due triangoli AHK, HBL, con le ipotenuse uguali, in forza della precedente relazione danno luogo alla seguente disuguaglianza: $AK < HL$. Ma nel quadrilatero trirettangolo HKCL l'angolo H è ottuso [ip. ang. ottuso], per cui sarà: $HL < KC$, quindi: $AK < KC$.

Nello stesso modo si dimostra la terza parte del lemma.

Una facile estensione di questo lemma è la seguente proposizione:

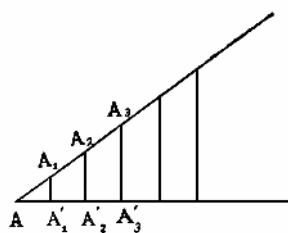


Fig. 19.

Se sul primo lato d'un angolo di vertice A si prendono consecutivamente i segmenti uguali $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ e si costruiscono le rispettive proiezioni $AA'_1, A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots$ sul secondo lato dell'angolo, valgono le seguenti relazioni.

$$AA'_1, = A'_1A'_2, = A'_2A'_3 = \dots, \text{ nell'ip. ang. retto;}$$

$$AA'_1, < A'_1A'_2, < A'_2A'_3 < \dots, \text{ nell'ip. ang. ottuso;}$$

$$AA'_1, > A'_1A'_2, > A'_2A'_3 > \dots, \text{ nell'ip. ang. acuto.}$$

Ommettiamo per brevità la facile dimostrazione.

Vediamo piuttosto quali importanti conseguenze possono dedursi da questa proposizione nell'ip. ang. retto e nell'ip. ang. ottuso.

Siano AC e BD due rette, la prima obliqua, la seconda perpendicolare alla retta AB. Su AC,

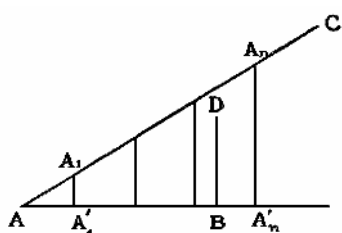


Fig. 20.

dalla banda dell'angolo acuto CAB e della perpendicolare BD, si prenda il segmento arbitrario AA_1 , e se ne costruisca la proiezione AA'_1 , su AB. Si fissi poi un numero n abbastanza grande, tale che l'ennesimo multiplo di AA'_1 , sia maggiore di AB; poi su AC, dalla banda di A_1 , si costruisca il segmento AA_n , multiplo di AA_1 secondo il numero $n^{(35)}$. Calata poi da A_n la perpendicolare $A_nA'_n$ su AB, avremo:

$$AA'_n = (AA'_1) \cdot n > AB, \quad \text{nell'ip. ang. retto;}$$

$$AA'_n > (AA'_1) \cdot n > AB, \quad \text{nell'ip. ang. ottuso.}$$

Perciò la BD, perpendicolare al lato AA_n , del triangolo rettangolo $AA_nA'_n$, incontrerà necessariamente l'ipotenusa AA_n , cioè:

Nell'ip. ang. retto e nell'ip. ang. ottuso, una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta si incontrano. [prop. XI, XII]⁽³⁶⁾.

Di qui si deduce il teorema seguente:

Nell'ipotesi dell'angolo retto ed in quella dell'angolo ottuso è vero il V postulato di Euclide [prop. XIII].

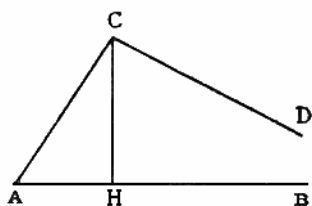


Fig. 21.

Siano AB, CD due rette intersecate dalla retta AC. Supponiamo che sia:

$$\hat{B}AC + \hat{A}CD < 2 \text{ retti.}$$

Allora uno degli angoli BAC, ACD, ad esempio il primo, sarà acuto. Da C si cali la perpendicolare CH su AB. Nel triangolo ACH, in forza a delle ipotesi fatte, sarà:

$$\hat{A} + \hat{C} + \hat{H} \geq 2 \text{ retti.}$$

Ma per ipotesi abbiamo ancora:

$$\hat{B}AC + \hat{A}CD < 2 \text{ retti}$$

Combinando queste due relazioni si ottiene:

⁽³⁵⁾ Il postulato di ARCHIMEDE, di cui qui si fa uso, comparisce in una tale forma da includere implicitamente l'infinità della retta.

⁽³⁶⁾ Il metodo seguito da SACCHERI per dimostrare questa proposizione è sostanzialmente identico a quello di NASÍR-EDDIN. NASÍR-EDDIN però si riferisce soltanto all'ip. ang. retto, avendo egli dimostrato in precedenza che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti. — È opportuno notare che SACCHERI conobbe e criticò l'opera del geometra arabo.

$$\hat{H} > \hat{H}CD.$$

E poichè \hat{H} è retto, l'angolo HCD risulta acuto. Allora, in forza delle prop. XI, XII, le rette CD ed AB s'incontrano⁽³⁷⁾.

Questo risultato permette a SACCHERI di concludere che *l'ip. angolo ottuso è falsa* [prop. XIV]. Infatti, in questa ipotesi vale il *postulato Euclideo* [prop. XIII] e conseguentemente valgono gli ordinari teoremi che da questo postulato si deducono. Ma allora nel quadrilatero fondamentale la somma degli angoli è uguale a quattro angoli retti, cioè è vera *l'ip. ang. retto*⁽³⁸⁾.

§. 16. Volendo SACCHERI provare che il *V postulato* è valido incondizionatamente, si accinge a distruggere anche *l'ip. ang. acuto*.

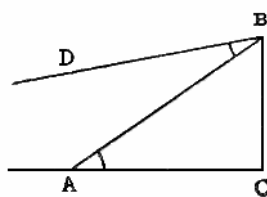


Fig. 22.

Intanto è bene notare che *in questa ipotesi esistono una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta che non s'incontrano* [prop. XVII]. Per costruirle, dal vertice B del triangolo ABC, rettangolo in C, si tracci la retta BD. In modo che sia: $\hat{A}BD = \hat{B}AC$. Allora per *l'ip. ang. acuto*, l'angolo CBD è acuto e le due rette CA, BD, che non incontrano (EUCLIDE, XXVII), sono l'una obliqua e l'altra perpendicolare alla BC.

D'ora innanzi ci riferiremo esclusivamente all'*ip. ang. acuto*.

Siano *a, b* due rette coplanari non incidenti. Dai punti A_1, A_2 di *a* si calino le perpendicolari A_1B_1, A_2B_2 su *b*. Gli angoli A_1, A_2 del quadrilatero ottenuto, possono essere:

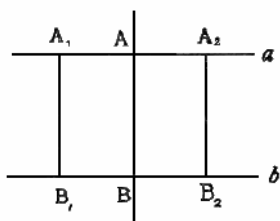


Fig. 23.

1°) uno retto ed uno acuto; 2°) entrambi acuti; 3°) uno acuto e l'altro ottuso. Nel primo caso esiste senz'altro la perpendicolare comune alle due rette *a, b*. Nel secondo caso si prova l'esistenza della perpendicolare comune ragionando per continuità [SACCHERI, prop. XXII]. Infatti, se si muove con continuità la retta A_1B_1 , mantenendola perpendicolare a *b*, fino a portarla su A_2B_2 , l'angolo $B_1A_1A_2$, acuto nella posizione iniziale, cresce fino a diventare ottuso: segue l'esistenza d'una posizione intermedia AB, in cui l'angolo BA_1A_2 è retto. Allora AB è la perpendicolare comune alle due rette *a, b*.

Nel 3° caso, o le rette *ab* non ammettono una perpendicolare comune, ovvero, la perpendicolare comune, se esiste, non cade fra B_1 e B_2 .

Data, come *ipotesi*, l'esistenza di due rette coplanari non incidenti e prive di perpendicolare comune, SACCHERI dimostra che tali rette vanno sempre più accostandosi [prop. XXIII] e che la loro distanza finisce per diventare minore di un segmento piccolo a piacere [prop. XXV]. In altre parole, se esistono due rette coplanari non incidenti, prive di perpendicolare comune, esse debbono comportarsi *asintoticamente* fra loro⁽³⁹⁾.

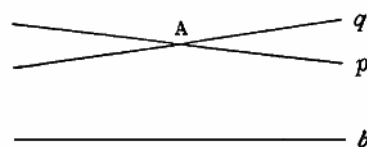


Fig. 24.

Per provare l'effettiva esistenza di rette asintotiche, SACCHERI ragiona presso a poco così. Le rette d'un fascio di centro A possono, rispetto ad una retta *b*, coplanare al fascio e non passante per A, ripartirsi in due gruppi:

1°) *rette del fascio incidenti a b*; 2°) *rette del fascio che ammettono con b una perpendicolare comune*. In forza del principio della continuità esistono due rette *p, q* che dividono il fascio in due parti. Alla prima parte appartengono le rette incidenti a *b*, alla seconda parte le rette non incidenti a *b*, ed aventi con *b* una perpendicolare comune. Quanto alle rette *p, q* si dimostra che non appartengono nè all'una nè all'al-

⁽³⁷⁾ Anche questa dimostrazione si trova nell'opera di NASÎR-EDDIN, alla quale evidentemente SACCHERI si è ispirato nelle sue ricerche.

⁽³⁸⁾ È opportuno notare che in questa dimostrazione SACCHERI fa uso di quel tipo speciale di ragionamento, di cui parlammo nel §. 11. Infatti: *anche ammettendo che sia vera l'ip. ang. ottuso, si arriva a concludere che è vera l'ip. ang. retto*. È questa una forma caratteristica, che in taluni casi può assumere l'ordinario ragionamento per assurdo.

⁽³⁹⁾ Questo risultato giustifica il dubbio affacciato dai greci circa la possibile esistenza di rette coplanari asintotiche [cfr. §. 2].

tra parte. Infatti, che p non sia incidente a b è manifesto. Per provare che p non ammette perpendicolare comune con b ragioniamo per assurdo. Sia PB l'ipotetica perpendicolare alle due rette p e b . Calata da A la perpendicolare AM su b e preso su b il punto B' , da banda opposta di M rispetto a B , si elevi la $B'P'$, perpendicolarmente a b , poi si cali la perpendicolare AP' su $B'P'$. La retta AP' non è incidente a b , perchè ammette con b una perpendicolare comune ed incontra la PB in un punto R . L'angolo ARB , supplementare dell'angolo acuto BRP' , è ottuso, perciò il raggio AR cadrà nell'angolo MAP . Ma allora AR sarebbe ad un tempo secante e non secante rispetto a b . Questa contraddizione fa cadere l'ipotesi d'una perpendicolare comune a b e p . Concluderemo pertanto che le due rette p e q sono asintotiche alla retta b ⁽⁴⁰⁾.

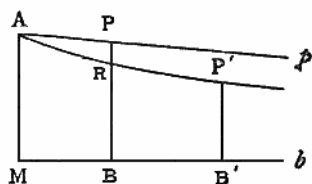


Fig. 25.

§ 17. A questo punto SACCHERI cerca di concludere, affidandosi, più che alla logica, alla intuizione ed alla fede nella validità del *V postulato*. Per dimostrare che l'*ip. ang. acuto* è assolutamente falsa, perchè ripugna alla natura della linea retta [prop. XXXIII], si appoggia su cinque lemmi, distesi in ben 16 pagine: in sostanza però si riduce ad affermare che «se essa fosse vera, la retta AP' [fig. 25] avrebbe con MB una perpendicolare comune in un punto comune all'infinito, ciò che è contrario alla natura della linea retta.»

La pretesa dimostrazione di SACCHERI è dunque fondata sull'estensione all'infinito di certe proprietà, valide per figure situate a distanza finita.

SACCHERI però non è soddisfatto del suo ragionamento e tenta di raggiungere la desiderata prova ripigliando l'antico concetto di equidistanza. Non vale la pena di riportare la nuova discussione inquantochè non rappresenta nulla di meglio di quanto fecero i suoi predecessori.

Pur mancando allo scopo l'opera saccheriana è di grande importanza: oltre porgerci il massimo tentativo in favore *V postulato*, essa, pel fatto stesso di non aver scoperto delle contraddizioni fra le conseguenze dell'*ip. ang. acuto*, non poteva a meno che suggerire il dubbio che su questa ipotesi potesse edificarsi un sistema geometrico logicamente conseguente e che il postulato euclideo fosse indimostrabile⁽⁴¹⁾.

GIOVANNI ENRICO LAMBERT [1728-1777]

§ 18. Quale influenza esercitasse l'opera di SACCHERI sui geometri del XVIII secolo non si può precisare: tuttavia è probabile che il geometra svizzero LAMBERT la conoscesse⁽⁴²⁾, imperocchè nella sua «*Theorie der Parallellinien*» [1766] egli cita una dissertazione di G. S. KLÜGEL [1739-1812]⁽⁴³⁾, ov'è minutamente analizzata l'opera del geometra italiano.

⁽⁴⁰⁾ Nell'opera di SACCHERI, prima di questo risultato, si trovano molte altre proposizioni interessanti, fra le quali è degna di nota la seguente: *Se due rette si avvicinano sempre più, e la loro distanza si mantiene sempre superiore ad un certo segmento assegnabile, l'ipotesi dell'angolo acuto viene distrutta*. Talchè, postulare l'assenza di rette asintotiche equivale ad ammettere il postulato euclideo.

⁽⁴¹⁾ L'opera del P. SACCHERI fu abbastanza diffusa dopo la sua pubblicazione e di essa parlarono due storie delle matematiche: quella di J. C. HEILBRONNER [Lipsia, 1742] e quella del MONTUCLA [Parigi, 1758]. Inoltre è minutamente analizzata da G. S. KLÜGEL, nella sua dissertazione qui sotto citata [(3)]. Non di meno cadde in dimenticanza. Solo nel 1889 E. BELTRAMI, con la sua nota: «*Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky*» [Rend. Acc. Lincei, (4), V, p. 441-448], richiamò su di essa l'attenzione dei geometri. In seguito l'opera di SACCHERI fu tradotta in inglese da G. B. HALSTED [Am. Math. Montly, I, 1894 e successivi], in tedesco dai SS. STÄCKEL ed ENGEL [Th. der P., 1895], in italiano da G. BOCCARDINI [Milano, Hoepli, 1904].

⁽⁴²⁾ Cfr. SEGRE: «*Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea*», Atti Acc. Scienze di Torino, t. XXXV III, [1903].

⁽⁴³⁾ «*Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel*» [Gottinga, 1763].

La «*Theorie der Parallellinien*» di LAMBERT, pubblicata nel 1786, dopo la morte dell'autore, per cura di G. BERNOULLI e C. F. HINDENBURG⁽⁴⁴⁾, è divisa in tre parti. La prima, di natura critica e filosofica, fa cenno della duplice questione che possiamo proporci sul *V postulato*, cioè se esso possa dimostrarsi col semplice aiuto dei precedenti o se invece a ciò non si richieda l'impiego di qualche altra ipotesi. La seconda parte è dedicata all'esposizione di vari tentativi, in cui il postulato euclideo è ricondotto a proposizioni semplicissime, le quali però alla loro volta dovrebbero essere dimostrate. La terza, la più importante, contiene un sistema di ricerche simili a quelle del padre SACCHERI, che rapidamente riassumiamo.

§ 19. La figura fondamentale di LAMBERT è un *quadrilatero trirettangolo* e le tre ipotesi sono fatte sulla natura del 4° angolo. La prima è l'*ip. ang. retto*, la seconda è l'*ip. ang. ottuso*, la terza è l'*ip. ang. acuto*. Anche nella trattazione di queste ipotesi l'autore si accosta al metodo saccheriano.

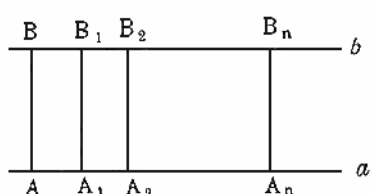


Fig. 26.

La prima ipotesi conduce facilmente al sistema euclideo.

Per rigettare la seconda ipotesi LAMBERT ricorre ad una figura formata con due rette *a, b* perpendicolari alla terza retta *AB*. Dai punti susseguenti *B, B1, B2, ..., Bn* della *b* cala le perpendicolari *BA, B1A1, ..., BnAn* su *a* e dimostra, in primo luogo, che i segmenti di perpendicolare compresi fra *a* e *b* vanno decrescendo a partire dalla perpendicolare *AB*; poi che la differenza fra ciascuna di esse e la successiva va crescendo. Talchè risulta:

$$BA - B_nA_n > (BA - B_1A_1) \cdot n$$

Ma, per *n* abbastanza grande, il secondo membro della disuguaglianza è grande quanto si vuole [*post. Archimede*]⁽⁴⁵⁾, mentre il primo membro è sempre minore di *BA*. Questa contraddizione permette a LAMBERT di dichiarare falsa la seconda ipotesi.

Per trattare la terza ipotesi LAMBERT si giova ancora della precedente figura, sulla quale dimostra che i segmenti *BA, B1A1, B2A2, ..., BnAn* vanno crescendo e che in pari tempo crescono le differenze fra ciascuno di essi e il precedente. Questo risultato però non lo conduce a contraddizioni, per cui, come già SACCHERI, è costretto a proseguire nelle deduzioni. Allora, nella terza ipotesi, trova che la somma degli angoli di un triangolo è minore di due angoli retti, e, oltrepassando SACCHERI, scopre che la *deficienza d'un poligono*, cioè la differenza fra $2(n - 2)$ angoli retti e la somma degli angoli d'un poligono, è *proporzionale all'area dello stesso poligono*. Questo risultato si ottiene più facilmente osservando che tanto l'area, quanto la deficienza d'un poligono somma di più altri, sono rispettivamente la somma delle aree e delle deficienze dei poligoni che lo compongono⁽⁴⁶⁾.

§ 20. Un'altra notevole scoperta di LAMBERT si riferisce alla misura delle grandezze geometriche. Essa consiste precisamente in ciò che, mentre nella geometria ordinaria, alla misura dei segmenti compete soltanto un significato *relativo* alla scelta di una particolare *unità*, nella geometria fondata sulla terza ipotesi si può invece conferirle un significato *assoluto*.

È necessario anzitutto chiarire la distinzione che qui si presenta tra *assoluto* e *relativo*. In molte questioni accade che gli elementi che si suppongono dati si possano dividere in due gruppi,

⁽⁴⁴⁾ cfr.: *Magazin für reine und angewandte Math.*, 2 Stück, p. 137-164, 3 Stück, p. 325-358, [1786]. — L'opera di LAMBERT fu ripubblicata dai SS. STÄCKEL ed ENGEL nella loro «*Th. der P.*», p. 135-208, preceduta da notizie storiche riguardanti l'autore.

⁽⁴⁵⁾ Il *postulato d'Archimede* anche qui è usato sotto tale forma da includere l'infinità della retta [Cfr. SACCHERI, nota a p. 32].

⁽⁴⁶⁾ Conviene notare che SACCHERI aveva già riscontrato, nell'*ip. ang. acuto*, la deficienza di cui si parla, ed anche implicitamente notato che un quadrilatero somma di più altri ha per deficienza la somma delle deficienze [prop. XXV]. Tuttavia non ne aveva tratto alcuna conseguenza circa la proporzionalità fra l'area e la deficienza.

per modo che quelli del *primo gruppo* restino fissi in tutto il campo delle nostre considerazioni, mentre quelli del *secondo gruppo* possano variare in una molteplicità di casi possibili. Quando ciò accade si suole spesso trascurare l'esplicita menzione dei dati del primo gruppo e considerare come *relativo* tutto ciò che dipende dai dati variabili, come *assoluto* tutto ciò che dipende soltanto dai dati fissi.

Così ad esempio, nella teoria dei *campi di razionalità* si prendono come dati del *secondo gruppo* [dati variabili] certi irrazionali elementari [costituenti una *base*] e come dati del *primo gruppo* l'unità [1], che spesso si tace perchè comune a tutti i campi. Allora, parlando di un numero si dice che esso è *razionale relativamente* ad una data base, se appartiene al campo di razionalità definito da quella base; si dice invece che è *razionale assolutamente* se risulta razionale rispetto alla base 1, comune a tutti i campi.

Venendo ora alla geometria notiamo che, in ogni studio concreto, generalmente si suppongono date certe figure e quindi le grandezze dei loro elementi; ma oltre questi dati variabili [del *secondo gruppo*], che possono essere scelti in modo arbitrario, è sempre implicitamente presupposta l'aggiunta delle figure fondamentali: *rette, piani, fasci* ecc. [dati fissi o del *primo gruppo*]. Allora, ogni costruzione, ogni misura, ogni proprietà d'una figura qualsiasi dovrà ritenersi come *relativa* se è essenzialmente relativa ai dati variabili; dovrà invece dirsi *assoluta* se è relativa soltanto ai dati fissi [figure fondamentali], oppure, se venendo enunciata in rapporto ai dati variabili, ne dipende soltanto in modo apparente, sicchè rimanga fissa al variare di questi.

In questo senso è chiaro che, nell'ordinaria geometria, la misura dei segmenti ha necessariamente un significato relativo. Infatti, l'esistenza delle trasformazioni per similitudine non ci permette in alcun modo di individuare la grandezza di un segmento rispetto alle figure fondamentali [retta, fascio, ecc.]. Per l'angolo invece si può scegliere un modo di misura, che ne esprima una proprietà assoluta: basta infatti prendere il suo rapporto all'angolo di un giro, cioè all'intero fascio, che è una delle figure fondamentali.

Ritorniamo ora a LAMBERT ed alla sua geometria corrispondente alla *terza ipotesi*. Egli ha osservato che ad ogni segmento può farsi corrispondere un determinato angolo, facilmente costruibile. Segue da ciò che ogni segmento è in relazione con la figura fondamentale *fascio* e quindi che, nella nuova [ipotetica] geometria, anche alla misura dei segmenti dovrebbe potersi attribuire un significato assoluto.

Per vedere poi nel modo più semplice come ad ogni segmento possa coordinarsi un angolo ed ottenere così una rappresentazione numerica assoluta dei segmenti, immaginiamo di costruire sopra ogni segmento un triangolo equilatero. Possiamo associare ad ogni segmento l'angolo del relativo triangolo e successivamente la misura di quest'angolo, atteso che esiste una corrispondenza biunivoca fra i segmenti e gli angoli compresi entro certi limiti.

L'ottenuta rappresentazione numerica dei segmenti non gode però della *proprietà distributiva* che compete alle *lunghezze*, perchè sommando due segmenti non vengono sommati gli angoli corrispondenti. Si può tuttavia determinare una funzione dell'angolo che goda di questa proprietà ed associare ad un segmento non l'angolo in discorso, ma questa funzione dell'angolo. Tale funzione, per ogni valore dell'angolo compreso entro certi limiti, ci dà una *misura assoluta* dei segmenti. L'*unità assoluta* è quel segmento per cui la funzione assume il valore 1.

Se si osserva poi che ove una certa funzione dell'angolo sia distributiva nel senso sopra indicato, anche il prodotto di questa funzione per una costante arbitraria gode della stessa proprietà, è chiaro che si potrà sempre disporre di questa costante in modo che l'unità assoluta dei segmenti sia quel tale segmento che corrisponde ad un angolo assegnato, ad es. all'angolo di 45° . La possibilità di costruire, dato l'angolo, l'unità assoluta dei segmenti è legata alla risoluzione del seguente problema: *Costruire, nell'ip. ang. acuto, un triangolo equilatero di assegnata deficienza.*

Per quanto riguarda la misura assoluta delle aree poligonali osserviamo che essa è data senz'altro dalla deficienza dei poligoni. Anche pei poliedri potrebbe istituirsi una misura assoluta.

Ma secondo la nostra intuizione spaziale la misura assoluta di tutte queste grandezze geometriche non ci sembra possibile, onde, *negando l'esistenza e l'una unità assoluta pei segmenti, si potrebbe, con LAMBERT, rigettare la terza ipotesi.*

§ 21. Non si creda che LAMBERT ritenga d'aver così dimostrato il *V postulato*, poichè egli comprende quanto sia arbitraria la precedente affermazione!

Per ottenere la desiderata prova procede nella ricerca delle conseguenze della *terza ipotesi*, ma non riesce che a trasformare la sua questione in altre ugualmente difficili da risolversi.

Altre cose molto interessanti sono contenute nella «*Theorie der Parallellinien*», ad es., il riavvicinamento della geometria che varrebbe sul piano se fosse lecita la *seconda ipotesi*, con la geometria sferica⁽⁴⁷⁾, e l'osservazione relativa all'indipendenza di quest'ultima dal postulato delle parallele. Riferendosi poi alla *terza ipotesi* esprimeva la seguente acuta ed originale veduta: *Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.*

A questo modo di concepire le cose forse fu condotto dalla formula: $r^2 (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$, che esprime l'area di un triangolo sferico, perchè, mutando in essa il raggio r nel raggio immaginario $r\sqrt{-1}$, diventa:

$$r^2 (\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$$

cioè la formula dell'area d'un triangolo piano, nella *terza ipotesi* di LAMBERT⁽⁴⁸⁾.

§ 22. LAMBERT lascia dunque la questione sospesa; anzi non avendo pubblicato le sue ricerche fa supporre d'aver intravvisto qualche nuovo orizzonte.

Intanto è bene notare che, pel generale insuccesso di sifatte ricerche, nella seconda metà del XVIII secolo andava formandosi la convinzione che fosse necessario ammettere senza dimostrazione il postulato euclideo o qualche altro postulato equivalente.

In Germania, ove con frequenza si succedevano gli studi sull'argomento, la convinzione aveva già assunto una forma abbastanza precisa. La ritroviamo in A. G. KAESTNER [1719-1800], grande cultore delle ricerche sulle parallele⁽⁴⁹⁾, nel suo discepolo G. S. KLÜGEL, autore della pregevole critica sui più celebri tentativi per la dimostrazione del *V postulato*, citata nella nota 42. In questo lavoro KLÜGEL, trovata insufficiente ciascuna delle dimostrazioni proposte, affaccia la possibilità che rette non incontrantisi siano divergenti [«*Möglich wäre es freilich dass Gerade die sich nicht schneiden, von einander abweichen.*»], ed aggiunge che l'apparenza di controsenso che questo presenta non è il risultato di una prova rigorosa, nè una conseguenza dei concetti determinati delle linee rette o curve, ma piuttosto qualche cosa che si deduce dall'esperienza e dal giudizio dei nostri sensi. [«*Dass so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht in Folge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der geraden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch das Urteil unsrer Augen.*»].

Le ricerche di SACCHERI e LAMBERT propendono ad appoggiare l'opinione di KLÜGEL, ma non possono ritenersi come prove dell'indimostrabilità dell'ipotesi euclidea. E nemmeno si raggiungerebbe una prova ove, proseguendo nella via aperta dai due nominati geometri, si deducessero quante altre proposizioni si vogliano, non contraddittorie coi principi della geometria.

Nondimeno, l'avventurarsi in quest'ultimo campo, senza la preoccupazione saccheriana di scoprirvi delle contraddizioni, costituisce, in linea storica, il passo decisivo per conquistare l'indimostrabilità del *postulato d'Euclide* e scoprire le *geometrie non-euclidee*.

⁽⁴⁷⁾ Infatti in geometria sferica la somma degli angoli di un quadrilatero è maggiore di quattro angoli retti, ecc.

⁽⁴⁸⁾ Cfr. STÄCKEL ed ENGEL: «*Th. der P.*», p. 146.

⁽⁴⁹⁾ Per qualche notizia intorno a KAESTNER Cfr. STÄCKEL ed ENGEL: «*Th. der P.*», p. 139-141.

Ma dall'opera di SACCHERI e LAMBERT a quella di LOBACEFSKI e BOLYAI, che all'idea qui espressa s'informano, deve passare ancora più di mezzo secolo!...

I GEOMETRI FRANCESI DELLA FINE DEL XVIII SECOLO

§ 23. La critica sulle parallele, che già in Italia ed in Germania aveva condotto a risultati di grande interesse, verso la fine del XVIII secolo e sul principio del XIX ebbe, anche in Francia un notevole impulso.

D'ALAMBERT [1717-1783], in un suo articolo sulla geometria [1759] dichiara che: «La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie⁽⁵⁰⁾». Ritiene che con una buona definizione di linea retta si dovrebbero evitare entrambe le difficoltà. Propone di chiamare parallela ad una retta data una qualsiasi altra retta coplanare, che congiunge due punti equidistanti e situati da una stessa banda di quella. Questa definizione permette di costruire immediatamente le parallele: però sarebbe necessario dimostrare che queste parallele sono equidistanti. Questo teorema fu proposto dal D'ALAMBERT, quasi per sfida, ai suoi contemporanei.

§ 24. DE MORGAN, nella sua raccolta di paradossi, racconta che LAGRANGE [1736-1813], verso la fine di sua vita, scrisse una memoria sulle parallele. Presentata all'Accademia di Francia ne interruppe la lettura esclamando: «Il faut que j'y songe encore!» e ritirò il manoscritto⁽⁵¹⁾.

Inoltre HOÜEL riporta che LAGRANGE, conversando con BIOT, affermava l'indipendenza della trigonometria sferica dal *postulato d'Euclide*⁽⁵²⁾. Ad avvalorare questa affermazione può aggiungersi che LAGRANGE si occupò con speciale interesse della trigonometria sferica⁽⁵³⁾ e che egli fu ispiratore, se non autore, d'una memoria «*Sur les principes fondamentaux de la Mécanique*» [1760-61]⁽⁵⁴⁾, in cui D. FONCENEX svolge una questione di indipendenza analoga a quella sopra accennata della trigonometria sferica. Precisamente FONCENEX dimostra che la legge analitica per la composizione delle forze concorrenti non dipende nè dal *V postulato*, nè da qualsiasi altro equivalente⁽⁵⁵⁾.

§ 25. Il concetto di similitudine, come concetto fondamentale, già usato da WALLIS nel 1663 [cfr. § 8], ricompare sul principio del XIX secolo, con l'autorevole appoggio di due grandi geometri: L. N. M. CARNOT [1753-1823] e LAPLACE [1749-1827].

In una nota [p. 481] alla sua «*Géométrie de Position*» [1803] CARNOT afferma che la teoria delle parallele si riattacca alla nozione di similitudine, il cui grado d'evidenza corrisponde, presso a poco, a quello dell'*uguaglianza* e che una volta ammessa questa nozione è facile stabilire con rigore la teoria in discorso.

LAPLACE [1824], dopo aver osservato che la legge di NEWTON [legge dell'attrazione universale], per la sua semplicità, per la sua generalità e per la rispondenza che trova nei fenomeni fisici, deve riguardarsi come rigorosa, nota che una delle sue proprietà più notevoli è che ove le dimensioni di tutti i corpi dell'universo, le loro mutue distanze e le loro velocità decrescessero proporzionalmente, i corpi celesti descriverebbero delle linee interamente simili a quelle che descrivono, in modo che l'universo, ridotto successivamente fino al più piccolo spazio immaginabile, offrirebbe sempre le stesse apparenze ai suoi osservatori. Queste apparenze, continua, sono dunque indipendenti dalle dimensioni dell'universo, talchè la semplicità delle leggi naturali non permette all'osservatore che di conoscere dei rapporti. Riattaccandosi a questa concezione astronomica dello spazio, aggiun-

⁽⁵⁰⁾ Cfr. D'ALAMBERT: «*Mélanges de Litterature, d'Histoire et de Philosophie*», t. V, § XI [1759]. — Cfr. ancora: «*Encyclopedie Méthodique Mathématique*», t. II, p. 519, articolo: *Parallèles*, [1785].

⁽⁵¹⁾ A. DE MORGAN: «*Budget of Paradoxes*», p. 173 [Londra, 1872].

⁽⁵²⁾ Cfr. J. HOÜEL: «*Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*», p. 84, nota. [Paris, G. Villars, 1883].

⁽⁵³⁾ *Miscellanea Taurinensia*, t. II, p. 299-322 [1700-61].

⁽⁵⁴⁾ Cfr. LAGRANGE: *Oeuvres*, t. VII, p. 331-363.

⁽⁵⁵⁾ Cfr. Cap. VI.

ge in nota: «I tentativi dei geometri per dimostrare il *postulato d'Euclide* sulle parallele sono stati finora inutili. Tuttavia nessuno pone in dubbio questo postulato ed i teoremi che Euclide dedusse. La percezione dello spazio racchiude dunque una proprietà speciale, evidente per sè stessa, senza la quale non si possono rigorosamente stabilire le proprietà delle parallele. L'idea dell'estensione limitata, per esempio, del cerchio, non contiene nulla che dipenda dalla sua grandezza assoluta. Ma se noi diminuimo col pensiero il suo raggio siamo portati invincibilmente a diminuire nello stesso rapporto la sua circonferenza ed i lati di tutte le figure iscritte. Questa proporzionalità mi pare essere un postulato più naturale di quello di Euclide ed è notevole il ritrovarlo nei risultati della gravitazione universale»⁽⁵⁶⁾.

§ 26. Insieme ai precedenti geometri si suole ricordare anche J. B. FOURIER [1768-1830], per una discussione sulla linea retta da lui sostenuta insieme a MONGE⁽⁵⁷⁾. Volendo riattaccare questa discussione alle ricerche sulle parallele basta riferirsi all'idea espressa da D'ALAMBERT, che la dimostrazione del postulato possa connettersi con la definizione di retta [cfr. § 23].

FOURIER, assumendo come *primitivo* il concetto di distanza fra due punti, propose di definire prima la sfera, indi il piano, come luogo dei punti equidistanti da due punti dati⁽⁵⁸⁾, poi la retta, come luogo dei punti equidistanti da tre punti dati. Questo modo di presentare il problema dei fondamenti della geometria concorda con le idee professate in seguito da altri geometri che si occuparono espressamente della questione delle parallele [W. BOLYAI, N. LOBACEFSKI, DE TILLY]. In questo senso la discussione tra FOURIER e MONGE trova il suo posto fra i primi documenti che si riferiscono alla geometria *non-euclidea*⁽⁵⁹⁾.

ADRIANO MARIA LEGENDRE [1752-1833]

§ 27. I precedenti geometri si limitarono a rilevare le difficoltà e ad emettere giudizi intorno al postulato; chi invece tentò di trasformarlo in teorema fu LEGENDRE, le cui ricerche, sparse nelle varie edizioni dei suoi «*Éléments de Géométrie.*» [1794-1823], sono riassunte nelle «*Refléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.*» [Mém. Academie Sciences, Paris, t. XIII, 1833].

Nei più interessanti tentativi LEGENDRE, come già SACCHERI, affronta la questione dal lato della somma degli angoli d'un triangolo, somma ch'ei vuole dimostrare uguale a due angoli retti.

Allo scopo riesce, fin da principio, a scartare l'ipotesi saccheriana dell'angolo ottuso, stabilendo che «*in qualsiasi triangolo la somma degli angoli è minore [ip. ang. acuto] od uguale [ip. ang. retto] a due angoli retti.*»

Riportiamone una semplice ed elegante dimostrazione di LEGENDRE.

Siano sopra una retta n segmenti uguali e consecutivi $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_{n+1}$, sui quali, da una stessa banda della retta, siano costruiti n triangoli uguali, aventi per terzi vertici i punti B_1, B_2, \dots, B_n .

I segmenti $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots, B_{n-1} B_n$, che congiungono questi ultimi vertici, sono uguali e possono considerarsi come basi di altri n triangoli uguali: $B_1 A_2 B_2, B_2 A_3 B_3, \dots, B_{n-1} A_n B_n$. Si completi la figura con il triangolo $B_n A_{n+1} B_{n+1}$, uguale ai precedenti.

⁽⁵⁶⁾ Cfr. LAPLACE: «*Oeuvres*», t. VI. Livre V, Ch. V, p. 472.

⁽⁵⁷⁾ Cfr.: Séances de l'École normale; Débats, t. I, p. 28-33 [1795]. — La discussione fu ristampata in *Mathésis*, t. IX, p. 139-141 [1883].

⁽⁵⁸⁾ Questa definizione del piano fu data da LEIBNIZ circa un secolo prima. Cfr., ad es., gli «*Opuscles et fragments inédits.*», pubblicati da L. COUTURAT; p. 554-5 [Paris, Alcan, 1903].

⁽⁵⁹⁾ Aggiungiamo che studi e ricerche successive dimostrarono che anche la definizione di Fourier non permette di creare la teoria euclidea delle parallele senza il sussidio del *V postulato* o di qualche altro postulato equivalente.

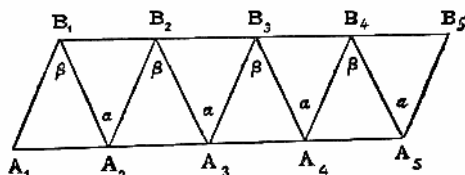


Fig. 27.

Denotando con β l'angolo in B, del triangolo $A_1B_1A_2$ e con α l'angolo in A_2 del triangolo consecutivo, dico essere $\beta \leq \alpha$. Infatti, se fosse $\beta > \alpha$, dal paragone dei due triangoli $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$, che hanno due lati uguali, si dedurrebbe $A_1A_2 > B_1B_2$.

Inoltre, essendo la spezzata $A_1B_1B_2 \dots B_{n+1}A_{n+1}$ maggiore del segmento A_1A_{n+1} , si avrebbe:

$$A_1B_1 + (B_1B_2) \cdot n + A_{n+1}B_{n-1} > (A_1A_2) \cdot n,$$

cioè:

$$2 A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2) \cdot n.$$

Ma questa disuguaglianza, per n abbastanza grande, contraddice il *postulato di Archimede*, perciò non può essere $A_1A_2 > B_1B_2$, e conseguentemente è assurdo supporre $\beta > \alpha$. Segue $\beta \leq \alpha$, da cui si ricava subito che la somma dei tre angoli del triangolo $A_1B_1A_2$ è minore od uguale a due angoli retti.

Questo teorema suole impropriamente chiamarsi *1° teorema di Legendre*. Diciamo impropriamente perchè SACCHERI, dimostrando falsa l'*ip. ang. ottuso*, aveva già stabilito, quasi un secolo prima, questo teorema [cfr. p. 34].

Il così detto *2° teorema di Legendre*, dato anch'esso da SACCHERI e sotto forma più generale [cfr. § 13], è il seguente:

«Se in un solo triangolo la somma degli angoli è minore od uguale a due angoli retti, è rispettivamente minore od uguale a due angoli retti in ciascun altro triangolo.»

Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema perchè non sostanzialmente diversa da quella di SACCHERI.

Ecco piuttosto come LEGENDRE dimostra che *la somma dei tre angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti*.

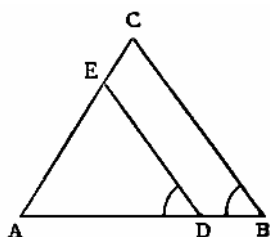


Fig. 28.

Nel triangolo ABC suppongasì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2$ retti. Fissato il punto D sul lato AB, si tracci la trasversale DE in modo che l'angolo ADE sia uguale all'angolo B. Nel quadrilatero DBCE la somma degli angoli è

minore di quattro retti, onde $\hat{AED} > \hat{ACB}$. L'angolo in E del triangolo ADE è dunque una ben determinata funzione [decescente] del lato AD, o, ciò che fa lo stesso, la lunghezza del lato AD è pienamente determinata quando si conosca la misura [in angoli retti] dell'angolo E e dei due angoli fissi, A, B. Ma questo risultato, secondo LEGENDRE, è assurdo, perchè la lunghezza d'un segmento non ha significato se non si conosce l'unità di misura cui è riferita e la natura della questione non indica in alcun modo questa unità.

Quindi cade l'ipotesi $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2$ retti e conseguente-

mente si avrà: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$ retti.

Ma da questa uguaglianza segue facilmente la dimostrazione del *postulato Euclideo*.

Il metodo di LEGENDRE si basa quindi sul postulato di LAMBERT, che nega l'esistenza d'una *unità assoluta* pei segmenti.

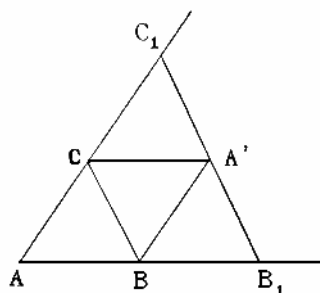


Fig. 29.

§ 28. In un'altra dimostrazione LEGENDRE fa uso dell'ipotesi: *Da un punto qualunque preso nell'interno di un angolo si può sempre condurre una retta che incontra i due lati dell'angolo*⁽⁶⁰⁾. Ecco come procede.

Sia ABC un triangolo, in cui, se è possibile, la somma degli angoli sia minore di due angoli retti.

Posto: $2 \text{ retti} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ [deficienza], si costruisca il punto A', simmetrico di A rispetto al lato BC. La deficienza del nuovo triangolo CBA' è pure α . Poi, in forza dell'ipotesi sopra enunciata, si conduca per A' una trasversale che incontri in B₁ e C₁ i lati dell'angolo A. La deficienza del triangolo AB₁C₁, come facilmente si verifica, è la somma delle deficienze dei quattro triangoli che lo compongono [cfr. anche LAMBERT, p. 40], quindi maggiore di 2α . Ripetendo, a partire dal triangolo AB₁C₁, la precedente costruzione, si otterrà un nuovo triangolo, di deficienza maggiore di 4α . Dopo n operazioni di tale natura si sarà costruito un triangolo di deficienza maggiore di $2^n\alpha$. Ma, per n abbastanza grande, è $2^n\alpha > 2 \text{ retti}$ [post. Archimede], il che è assurdo. Segue: $\alpha = 0$, quindi: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retti}$.

Questa dimostrazione è appoggiata sul *postulato di Archimede*. Ecco come si potrebbe evitare l'uso di tale postulato. Siano AB ed HK una obliqua ed una perpendicolare ad AH. Si costruisca la retta AB', simmetrica di AB rispetto ad AH. Pel punto H, in forza dell'ipotesi di LEGENDRE, passa una retta r che incontra i due lati dell'angolo BAB'. Se questa retta è diversa dalla HK anche la sua simmetrica r' , rispetto ad AH, gode della medesima proprietà e conseguentemente anche la HK. Dunque, una perpendicolare ed un'obliqua alla retta AH s'incontrano sempre. Da questo risultato

segue la teoria ordinaria delle parallele, quindi $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retti}$.

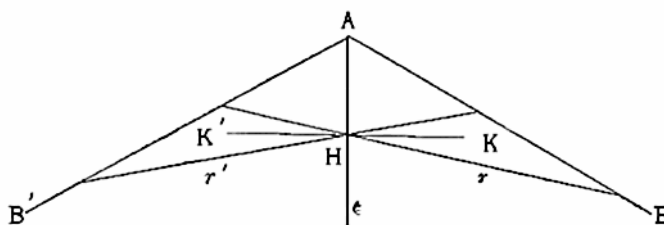


Fig. 30.

In altre dimostrazioni LEGENDRE fa uso di ragionamenti analitici ed anche erroneamente di grandezze infinite.

Con quest'opera così svariata LEGENDRE credè finalmente risolta l'inestricabile difficoltà annidata sul principio della geometria. In sostanza però non aggiunse nulla di veramente nuovo al materiale ed alle convinzioni guadagnate dai suoi predecessori. Il suo maggior merito sta nella forma piana ed elegante che seppe dare a talune sue ricerche, ond'esse raggiunsero quella diffusione che tanto contribuì ad allargare la cerchia dei cultori delle nuove idee, che allora andava formandosi.

WOLFGANG BOLYAI [1775-1856].

§ 29. In questo capitolo va ricordato anche il geometra ungherese W. BOLYAI, che si occupò delle parallele fin dall'epoca in cui studiava a Gottinga [1796-1799], probabilmente per consiglio di

⁽⁶⁰⁾ Di questa ipotesi già si era servito J. F. LORENZ, per lo stesso scopo: cfr. «*Grundriss der reinen und angewandten Mathematik.*» [Helmstedt, 1791].

KAESTNER e del giovane professore di astronomia K. F. SEYFFER [1762-1822], col quale aveva relazioni amichevoli.

Nel 1804 spedì a GAUSS, suo compagno di studio a Gottinga, una «*Theoria Parallelarum*», contenente un tentativo per dimostrare l'esistenza di rette equidistanti⁽⁶¹⁾. GAUSS confutò questa dimostrazione. BOLYAI non cessò per questo di occuparsi dell'*assioma XI*, riuscendo soltanto a sostituire l'assioma con altri di maggiore o minore evidenza. Giunse così a dubitare della sua dimostrabilità e ad intuire l'impossibilità di ridurre l'*ipotesi euclidea*, perchè [egli afferma] le conseguenze derivanti dalla negazione dell'*assioma XI* non possono contraddire i principi della geometria, in quanto la legge della intersezione di due rette, comunque ammessa, rappresenta un nuovo dato, indipendente dagli altri che lo precedono⁽⁶²⁾.

WOLFGANG raccolse le sue vedute intorno ai principi delle matematiche nell'opera: «*Tentamen juventutem studiosa in elementa Matheseos*» [1832-33] e in particolare le sue ricerche sull'*assioma XI*, ponendo in evidenza, in ciascun tentativo, la nuova ipotesi da introdurre, per rendere rigorosa la dimostrazione.

Un notevole *postulato* cui WOLFGANG riconduce quello d'EUCLIDE è il seguente: *Tre punti non in linea retta giacciono sempre sopra una sfera*, o, ciò che fa lo stesso: *tre punti non in linea retta appartengono sempre ad una circonferenza*⁽⁶³⁾.

Ecco come può dedursi il postulato euclideo.

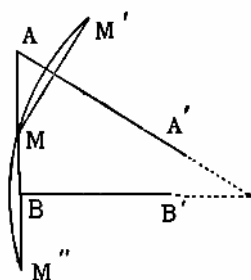


Fig. 31.

Siano AA', BB' due rette l'una perpendicolare, l'altra obliqua ad AB. Preso il punto M nel segmento AB ed i simmetrici di M rispetto alle rette AA', BB', si otterranno due punti M', M'' non in linea retta con M. Questi tre punti M, M', M'' appartengono ad una circonferenza, ed allora le due rette AA', BB', dovendo entrambe passare pel centro del cerchio, s'incontrano.

Ma dal fatto che una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta s'incontrano segue senz'altro l'unicità della parallela.

FEDERICO LODOVICO WACHTER [1792-1817].

§ 30. Visto come il postulato euclideo dipenda dalla possibilità di tracciare un cerchio per tre punti qualsiasi non collineari, si presenta spontanea l'idea di stabilire l'esistenza di un sifatto cerchio, antecedentemente ad ogni ricerca sulle parallele.

Un tentativo in questa direzione fu fatto da F. L. WACHTER.

WACHTER, scolaro di GAUSS e Gottinga [1809] e professore di matematica al ginnasio di Danzica, si occupò a più riprese della dimostrazione del *postulato* e credè aver raggiunto lo scopo

⁽⁶¹⁾ La «*Theoria Parallelarum*» fu pubblicata in latino e versione tedesca dai SS. STÄCKEL ed ENGEL nel t. XLIX dei *Math. Ann.*, p. 168-205 [1897].

⁽⁶²⁾ Cfr. STÄCKEL: «*Die Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie durch J. Bolyai*». *Math. u. Naturwissenschaft. Berich.* Aus Ungarn, t. XVII, [1901].

⁽⁶³⁾ Cfr. W. BOLYAI: «*Kurzer Grundriss eines Versuchs*, etc.» p. 46 [Maros Vásárhely, 1851].

prima in una lettera a GAUSS [dicembre 1816], poi in un opuscolo, stampato a Danzica nel 1817⁽⁶⁴⁾.

È in questa pubblicazione ch'egli cerca di stabilire che per quattro punti arbitrari dello spazio [non appartenenti ad un piano] passa una sfera, giovandosi del seguente postulato: *Quattro punti arbitrari dello spazio determinano pienamente una superficie [superficie dei quattro punti] e due sifatte superficie s'intersecano in una sola linea, completamente determinata da tre punti.*

È inutile seguire il ragionamento con cui WACHTER cerca di dimostrare che la *superficie dei 4 punti* è una sfera, perchè, mancando nel suo opuscolo una precisa definizione di quella superficie, le sue deduzioni hanno soltanto carattere intuitivo.

Merita invece speciale attenzione un passo della sua lettera del 1816, scritta dopo un colloquio con GAUSS, in cui s'era parlato d'una geometria *anti-euclidea*.

In questa lettera WACHTER, riferendosi alla superficie limite d'una sfera il cui raggio tende all'infinito, che nell'ipotesi euclidea s'identifica col piano, afferma che *su di essa, anche nel caso della falsità del V postulato, varrebbe una geometria identica a quella del piano ordinario.*

L'affermazione è della massima importanza perchè ci porge uno dei più notevoli risultati validi nel sistema geometrico corrispondente all'ipotesi saccheriana dell'angolo acuto [cfr. Lobacefski, § 40]⁽⁶⁵⁾.

⁽⁶⁴⁾ «*Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi.*»

⁽⁶⁵⁾ Per quanto riguarda WACHTER Cfr. P. STÄCKEL: *Friederich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuclidischen Geometrie*; Math. Ann., t. LIV, p. 49-85 [1901]. In questo articolo sono riportate le lettere di WACHTER sull'argomento e l'opuscolo del 1817 sopra citato.

CAPITOLO III.

I fondatori della Geometria non-euclidea.

CARLO FEDERICO GAUSS [1777-1855].

§ 31. Venti secoli d'inutili sforzi e segnatamente le ultime infruttuose ricerche sul *V postulato*, indussero molti geometri, fiorenti sul principio del secolo scorso, nella convinzione che l'assetto definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema irresolubile. La scuola di Gottinga, fin dal 1763, aveva ufficialmente dichiarato la necessità di rassegnarsi all'ipotesi Euclidea, e questa idea, espressa da KLÜGEL nel suo «*Conatuum*» [cfr. § 22], fu condivisa e sostenuta dal suo maestro A. G. KAESTNER, allora professore all'Università di Gottinga⁽⁶⁶⁾.

Nondimeno, l'interesse pel nostro argomento fu sempre vivo e, pur non cessando di affaticare inutilmente i ricercatori della presunta dimostrazione del *postulato*, guidò finalmente alla scoperta di nuovi sistemi geometrici, i quali, fondati anch'essi sulla intuizione, si svolgono in un campo più vasto, astraendo dal principio contenuto nel postulato euclideo.

Tutta la difficoltà di entrare nel nuovo ordine di idee appare manifesto a chi, riportandosi a quel tempo, rifletta alla concezione allora dominante della filosofia kantiana.

§ 32. Fu GAUSS il primo ad avere chiara la visione d'una geometria indipendente dal *V postulato*, visione che per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra e che venne in luce soltanto dopo le opere di LOBACEFSKI [1829-30] e G. BOLYAI [1832].

I documenti che permettono una approssimata ricostruzione delle ricerche gaussiane sulle parallele sono la corrispondenza di GAUSS con W. BOLYAI, OLBERS, SCHUMACHER, GERLING, TAURINUS, BESSEL [1799-1844]; due piccole note nei «*Gött. gelehrte Anzeigen*» [1816, 1822]; e alcuni appunti trovati fra le sue carte [1831]⁽⁶⁷⁾.

Mettendo a confronto vari passi delle lettere di GAUSS è possibile fissare come punto di partenza delle sue *meditazioni* l'anno 1792.

Il seguente brano di una lettera a W. BOLYAI [17 dicembre 1799] prova che GAUSS, come già SACCHERI e LAMBERT, ha tentato di dimostrare il *V postulato* prendendo come ipotesi la sua falsità.

«Quanto a me, i miei lavori sono già molto avanzati; ma la via nella quale sono entrato non conduce al fine che si cerca, e che tu affermi avere raggiunto⁽⁶⁸⁾, ma conduce piuttosto a mettere in dubbio l'esattezza della geometria.

«Sono, è vero, arrivato a parecchie cose, che dalla maggior parte degli uomini sarebbero ritenute come una valida dimostrazione, ma che, ai miei occhi, non provano, per così dire, NULLA; per esempio, se si potesse dimostrare l'esistenza possibile d'un triangolo rettilineo, la cui area fosse più grande d'ogni area data, allora sarei in grado di dimostrare con rigore perfetto tutta la geometria.

«Quasi tutti, è vero, vorrebbero dare a ciò il titolo di assioma, io no; potrebbe infatti accadere che, per quanto lontani fossero fra loro i vertici di un triangolo nello spazio, la sua area fosse non di meno sempre inferiore (*infra*) a un limite assegnato.»

Nel 1804, rispondendo a W. BOLYAI in merito alla «*Theoria Parallelarum*», esprime poi la speranza che gli scogli, contro cui hanno cozzato le sue ricerche, finiscano per lasciargli libero il passo.

Da tutto questo i SS. STÄCKEL ed ENGEL, che raccolsero e documentarono la suddetta corrispondenza di GAUSS, deducono che non per intuizione geniale il sommo geometra riconobbe l'esi-

⁽⁶⁶⁾ Cfr. STÄCKEL ed ENGEL: «*Th. der P.*» p. 139-142.

⁽⁶⁷⁾ Cfr.: GAUSS «*Opere*», t. VIII, p. 159-270.

⁽⁶⁸⁾ Si ricordi che W. BOLYAI, a Gottinga, si occupava dell'argomento e credeva di avere superato l'ostacolo. Cfr. § 29.

stenza d'una *geometria non euclidea*, logicamente inattaccabile, ma che dovè, al contrario, dedicarsi ad un lungo e faticoso lavoro, prima di vincere l'antico pregiudizio!

Conobbe GAUSS, nel primo periodo delle sue ricerche, le opere di SACCHERI e LAMBERT? Quale influenza esercitarono sulla sua attività? Il prof. SEGRE, nelle sue «*Congetture*» altrove citate [nota 41], nota che tanto GAUSS, quanto W. BOLYAI, durante il loro soggiorno a Gottinga [il primo dal 1795 al 98, il secondo dal 1796 al 99], si occuparono delle parallele. È quindi possibile ch'essi, per mezzo di KAESTNER e SEYFFER, entrambi conoscitori profondi di questo argomento, venissero a conoscenza dell'«*Euclides ab omni naevo vindicatus.*» e della «*Theorie der Parallellinien.*», ma i dati storici che si posseggono, senza infirmare questa congettura, non sono tali da avvalorarla pienamente.

§ 33. A questo primo periodo dell'opera gaussiana ne segue un secondo, dopo il 1813, illustrato principalmente da alcune lettere, una di WACHTER [1816], altre dirette a GERLIN [1819], TAURINUS [1824], SCHUMACHER [1831], e dagli appunti ritrovati fra le carte di GAUSS.

Tali documenti ci mostrano che GAUSS, in questo secondo periodo, vinta ogni esitazione, procedè nello sviluppo dei teoremi fondamentali d'una nuova geometria, ch'egli chiama prima *anti-euclidea* [cfr. lettera di WACHTER citata a § 30] poi *geometria astrale* [seguendo SCHWEIKART, cfr. § 35], finalmente *non-euclidea* [cfr. lettera a SCHUMACHER]. Giunse così ad acquistare la certezza che la geometria *non-euclidea* non ha in se stessa nulla di contraddittorio, benchè a prima vista parecchi de' suoi risultati abbiano l'aria di paradossi [lettera a SCHUMACHER, 12 giugno 1831].

Tuttavia GAUSS nulla lasciò trapelare di queste idee, per la certezza di non essere compreso [temeva «*das Geschrei der Böötier*»; lettera a BESSEL, 27 gennaio 1829]: solo ad alcuni provati amici confida qualche cosa delle sue ricerche e quando per necessità di cose è costretto di scrivere a TAURINUS [1824], lo prega di conservare il silenzio sulle comunicazioni fattegli.

Gli appunti trovati fra i manoscritti di GAUSS contengono un rapido cenno della nuova teoria delle parallele e dovevano fare parte di una progettata esposizione della *geometria non-euclidea*, a proposito della quale egli scriveva [maggio 1831] a SCHUMACHER:

«Da qualche settimana ho cominciato a mettere per iscritto qualche risultato delle mie meditazioni su questo soggetto, che risalgono in parte a quarant'anni, e di cui non avevo mai nulla redatto, ciò che mi ha costretto tre o quattro volte a ricominciare tutto il lavoro nella mia testa. Non vorrei pertanto che tutto ciò perisse con me».

§ 34. Ecco come GAUSS definisce le parallele.

Se la retta AM, coplanare e non incidente a BN, è tale che ogni retta per A, compresa nell'angolo BAM, incontri la BN, allora AM si dice parallela a BN.

Si noti la differenza fra questa definizione e quella di EUCLIDE. Infatti, prescindendo dal *V postulato*, per A potrebbero passare rette diverse da AM, non incidenti a BN, le quali sarebbero parallele a BN soltanto con l'antica definizione.

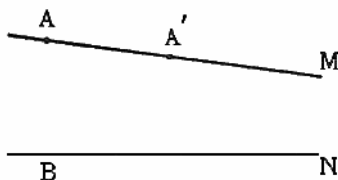


Fig. 32.

Nella definizione gaussiana il punto A sembra avere un ufficio speciale, ond'è necessario stabilire che la parallela AM è indipendente da A. Perciò GAUSS dimostra che se A' è un punto qualunque di AM, la retta AM è parallela a BN anche *attraverso* il punto A'.

Dalla definizione di parallela non risulta poi evidente la *reciprocità* del parallelismo, vale a dire, che anche BN è parallela ad AM. Questa proprietà forma oggetto di un'altra elegante dimostrazione di GAUSS.

Infine egli dimostra che due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro [*transitività* del parallelismo].

Qui bisogna osservare che GAUSS si riferisce implicitamente al *parallelismo in un dato verso*. Infatti, la sua definizione di parallela considera i raggi uscenti da A e da una determinata banda della trasversale AB, ad es. a destra, cosicchè la retta AM dovrebbe dirsi la parallela a BN *verso destra*. La parallela a BN *verso sinistra* non è necessariamente AM, perchè il supporre ciò equivarrebbe a fare una ipotesi equivalente al postulato euclideo.

Ritornando alla proposizione sopra enunciata è chiaro che le due rette parallele ad una terza debbono suppersi parallele in uno stesso verso.

Finalmente Gauss pone il concetto di punti *corrispondenti* su due parallele AA', BB'. I punti A e B sono *corrispondenti* quando la retta AB forma con le due parallele angoli interni da una stessa parte uguali [Fig. 33].

Allora se CC' è una terza parallela, nel verso cui sono parallele le prime due, e se C è corrispondente di B, anche A e C sono corrispondenti.

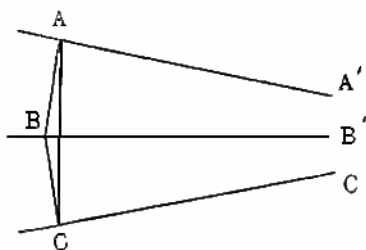


Fig. 33.

Benchè qui si arrestino gli appunti di GAUSS, notiamo l'importante significato delle ultime considerazioni.

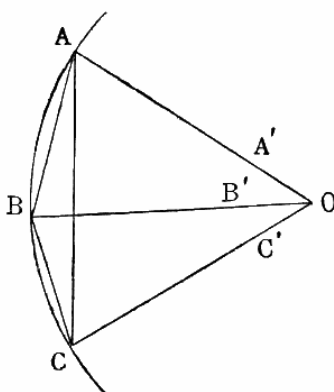


Fig. 34.

Il concetto di punti corrispondenti, trasportato al caso in cui le rette AA', BB', CC' appartengono ad un fascio [cioè passano per un punto], ci permette di definire la circonferenza come *luogo dei punti corrispondenti d'un punto dato sulle rette di un fascio*. Ma questo *luogo* può costruirsi anche quando le rette del fascio sono parallele. Nel caso euclideo si ottiene una retta; scartando l'*ipotesi euclidea* il luogo in discorso è una linea, che, pur avendo molte proprietà comuni con la circonferenza, non è una circonferenza. Anzi *tre dei suoi punti non appartengono mai ad una circonferenza*. Siffatta linea può concepirsi come *limite* d'una circonferenza, il cui raggio tenda all'infinito.

GAUSS non proseguì la sua redazione perchè nel 1832 conobbe l'opera di GIOVANNI BOLYAI, sulla *geometria assoluta*.

Da lettere anteriori e posteriori alla interrotta redazione, sappiamo ancora che GAUSS aveva scoperto, nella sua geometria, una unità assoluta pei segmenti [cfr. LAMBERT, LEGENDRE] e che nelle sue formule compariva una costante k , nota la quale si può risolvere qualunque problema [lettera a GERLING].

Più precisamente nel 1831 [lettera a SCHUMACHER] assegnava la lunghezza della circonferenza di raggio r sotto la forma:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$$

A proposito di k egli dice che, ove si voglia mettere d'accordo la nuova geometria con l'esperienza, bisogna supporla infinitamente grande rispetto a tutte le grandezze misurabili.

Per $k = \infty$ l'espressione gaussiana diventa l'ordinaria lunghezza della circonferenza⁽⁶⁹⁾. Questa osservazione può estendersi a tutto il sistema scoperto da GAUSS, sistema che, per $k = \infty$, contiene, come caso limite, quello di EUCLIDE.

FERDINANDO CARLO SCHWEIKART [1780-1859].

§ 35. Contemporanee ed indipendenti da quelle di GAUSS sono le ricerche del professore di giurisprudenza F. K. SCHWEIKART⁽⁷⁰⁾, che nel 1807 stampava «*Die Theorie der Parallellinien, nebst Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie.*». La quale, contrariamente a quanto lascia supporre il titolo, non contiene una trattazione indipendente dal *V postulato*, ma una trattazione basata sul concetto di parallelogramma.

In seguito però SCHWEIKART, entrato in un nuovo ordine di idee, sviluppava una geometria indipendente dall'*ipotesi di Euclide*. A Marburg, nel dicembre del 1818, consegnava a GERLING un foglio per GAUSS, contenente le seguenti indicazioni.

[NOTIZIA]

«Esistono due tipi di geometria, — una geometria in senso ristretto — la euclidea; ed una geometria astrale [astralische Grössenlehre].

«I triangoli, in quest'ultima, hanno la particolarità che la somma dei loro tre angoli non è uguale a due angoli retti.

«Ciò posto, si può rigorosamente dimostrare:

«*a*) che la somma dei tre angoli di un triangolo è minore di due angoli retti;

«*b*) che questa somma è tanto più piccola quanto più grande è l'area del triangolo;

«*c*) che l'altezza di un triangolo rettangolo isoscele, pur crescendo col crescere dei lati, tuttavia non può superare un certo segmento, che io chiamo COSTANTE.

«Il quadrato, in conseguenza, ha la seguente forma:

⁽⁶⁹⁾ Per vederlo si sostituisca a ciascun'esponenziale lo sviluppo in serie. Allora avremo:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right) = 2\pi k \left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k^3 3!} + \frac{r^5}{k^5 5!} + \dots \right) = 2\pi r \left(1 + \frac{r^2}{k^2 3!} + \frac{r^4}{k^4 5!} + \dots \right)$$

Passando al limite, per $k = \infty$, si ottiene: $2\pi r$.

⁽⁷⁰⁾ Studiò diritto all'università di Marburg e seguì dal 1796 al 1798 le lezioni di matematica tenute in quell'università dal prof. J. K. F. HAUFF, autore di vari scritti sulle parallele. Cfr. «*Th. der P.*», p. 243.

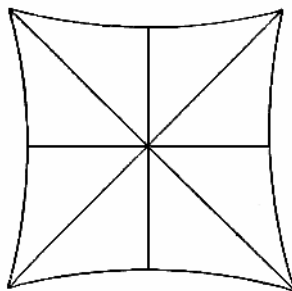


Fig. 35.

«Se questa costante fosse per noi il semiasse terrestre (e in conseguenza di ciò ogni linea retta, tirata fra due stelle fisse che distano fra loro di 90°, sarebbe tangente alla sfera terrestre) essa sarebbe infinitamente grande, rispetto alle dimensioni che si presentano nella vita quotidiana.

«La geometria euclidea vale nell'ipotesi che la costante sia infinitamente grande. Solo allora è vero che la somma dei tre angoli d'ogni triangolo è uguale a due retti, e ciò si lascia dimostrare facilmente soltanto se si ammette per dato che la costante sia infinitamente grande.»⁽⁷¹⁾

La *geometria astrale* di SCHWEIKART e la *non-euclidea* di GAUSS corrispondono pienamente al sistema di SACCHERI e LAMBERT, nell'*ip. ang. acuto*. Anzi il contenuto della precedente notizia deriva immediatamente dalle proposizioni di SACCHERI riportate nel «*Conatuum*» di KLÜGEL e dal teorema di LAMBERT sull'area del triangolo. E poichè SCHWEIKART, nella sua «*Theorie*» del 1807 cita le opere di questi due ultimi autori, così rimane accertata l'influenza diretta di LAMBERT, indiretta [almeno] di SACCHERI sulle ricerche di SCHWEIKART⁽⁷²⁾.

Nel marzo del 1819 Gauss, rispondendo a GERLING in merito alla *geometria astrale*, loda SCHWEIKART e dichiara di concordare in tutto quanto contiene il foglietto inviatogli. Aggiunge che egli ha svolto la *geometria astrale* in modo da poter risolvere qualsiasi questione, data che sia la costante di SCHWEIKART. Termina assegnando il limite superiore dell'area d'un triangolo sotto la forma⁽⁷³⁾:

$$\frac{\pi CC}{\{\log.\text{hyp} (1+\sqrt{2})\}^2}$$

SCHWEIKART non pubblicò le sue ricerche.

FRANCESCO ADOLFO TAURINUS [1794-1874].

§ 36. Oltre essersi occupato personalmente delle parallele, SCHWEIKART indusse [1820] il nipote TAURINUS a dedicarsi, richiamando la di lui attenzione sulla *geometria astrale* e sul favorevole giudizio di GAUSS.

Solo nel 1824 pare che TAURINUS si occupasse seriamente della cosa, ma non certo con le vedute dello zio. Egli era e fu sempre persuaso della verità assoluta del V *postulato* e nutrì la speranza di poterlo dimostrare. Fallito nei primi tentativi e sotto l'influenza di SCHWEIKART e GAUSS, riprese lo studio della questione. Nel 1825 pubblicò una «*Theorie der Parallellinien.*», contenente

⁽⁷¹⁾ Cfr. il t. VIII delle opere di GAUSS, p. 180-81.

⁽⁷²⁾ Cfr. le «*Congetture*» di SEGRE, citate nella nota 41.

⁽⁷³⁾ La costante C che figura in questa espressione è la costante di SCHWEIKART, non quella che GAUSS denotò con k e a mezzo della quale espresse la lunghezza della circonferenza [cfr. § 34]. Le due costanti sono legate dalla seguente relazione:

$$k = \frac{C}{\log (1+\sqrt{2})}$$

sviluppi non euclidei, il rigetto dell'*ip. ang. ottuso* e ricerche simili a quelle di SACCHERI e LAMBERT, nell'*ip. ang. acuto*. Ritrovò così la costante di SCHWEIKART, che chiamò *parametro*, e, incapace di rappresentarsi lo spazio come un concetto suscettibile di varie determinazioni, concluse che dovrebbero contemporaneamente valere tutti i sistemi corrispondenti agli infiniti valori assegnati al parametro. Questo modo di interpretare il significato del parametro condusse TAURINUS a rigettare anche l'*ip. ang. acuto*, pur riconoscendo la *compatibilità logica* delle proposizioni che da essa conseguono.

Nell'anno successivo TAURINUS pubblicò i suoi «*Geometriae prima elementa.*» [Colonia, 1826] ove riespose migliorate le ricerche del 1825. Lo scritto è poi chiuso da una importantissima appendice, in cui l'autore mostra come si possa effettivamente costruire un sistema geometrico [analitico] corrispondente all'*ip. ang. acuto*⁽⁷⁴⁾.

Allo scopo TAURINUS parte dalla formula fondamentale della trigonometria sferica:

$$\cos \frac{a}{k} = \cos \frac{b}{k} \cos \frac{c}{k} + \sin \frac{b}{k} \sin \frac{c}{k} \cos \alpha$$

e vi muta il raggio reale k nel raggio immaginario ik [dove $i = \sqrt{-1}$]. La formula ottenuta da TAURINUS può scriversi, mediante l'uso delle *funzioni iperboliche*⁽⁷⁵⁾, nella seguente forma:

⁽⁷⁴⁾ Per quanto riguarda l'eventuale influenza di SACCHERI e LAMBERT su TAURINUS cfr. le «*Congetture*» di SEGRE, citate a nella nota 41.

⁽⁷⁵⁾ Per comodità del lettore rammentiamo la definizione analitica e le proprietà principali delle *funzioni iperboliche*.

$$(I) \left\{ \begin{aligned} \text{Sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \text{Ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\ \text{Th } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{Cth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned} \right.$$

Notando poi che le funzioni circolari $\sin x, \cos x, \text{tg } x, \dots$, sono suscettibili anch'esse d'una definizione analitica, e precisamente che:

$$(II) \left\{ \begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \\ \text{tg } x &= \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}; \quad \text{ctg } x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \end{aligned} \right.$$

è facile vedere che le funzioni circolari e le funzioni iperboliche sono legate dalle seguenti relazioni:

$$(III) \left\{ \begin{aligned} i \text{Sh } x &= \sin(ix); \quad i \text{Th } x = \text{tg}(ix) \\ \text{Ch } x &= \cos(ix); \quad -i \text{Cth } x = \text{ctg}(ix). \end{aligned} \right.$$

Queste ultime permettono di trasformare le formule fondamentali della goniometria, nelle corrispondenti formule per le funzioni iperboliche. Le quali sono le seguenti:

$$(1) \quad \mathbf{Ch} \frac{a}{k} = \mathbf{Ch} \frac{b}{k} \mathbf{Ch} \frac{c}{k} - \mathbf{Sh} \frac{b}{k} \mathbf{Sh} \frac{c}{k} \cos \alpha$$

Questa è la formula fondamentale della *geometria logaritmico-sferica* [«*logarithmisch-sphärischen Geometrie*»] di TAURINUS.

È facile dimostrare che nella geometria *log.-sferica* la somma degli angoli d'un triangolo è minore di 180°. Riferiamoci per semplicità al triangolo equilatero, ponendo nella (1) $a = b = c$. Risolvendo poi rispetto a $\cos \alpha$, avremo:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{Ch}^2 \frac{a}{k} - \mathbf{Ch} \frac{a}{k}}{\mathbf{Sh}^2 \frac{a}{k}} = \frac{\mathbf{Ch} \frac{a}{k}}{1 + \mathbf{Ch} \frac{a}{k}}$$

Ma:

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k} \right)^4 + \dots,$$

quindi:

$$(*) \quad \cos \alpha = \frac{1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k} \right)^4 + \dots}{2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k} \right)^4 + \dots}$$

Questa frazione evidentemente è maggiore di $\frac{1}{2}$, perciò sarà $\alpha < 60^\circ$, quindi la somma degli angoli del triangolo minore di 180°.

Inoltre è opportuno notare che:

$$\lim_{a=0} \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

vale a dire: il limite di α , per a tendente a zero, è 60° . Perciò nella *geometria log.-sferica* la somma degli angoli di un triangolo tende a 180° quando i lati tendono a zero.

$$(IV) \quad \begin{cases} \mathbf{Ch}^2 x - \mathbf{Sh}^2 x = 1 \\ \mathbf{Sh}(x \pm y) = \mathbf{Sh} x \mathbf{Ch} y \pm \mathbf{Sh} y \mathbf{Ch} x \\ \mathbf{Ch}(x \pm y) = \mathbf{Ch} x \mathbf{Ch} y \pm \mathbf{Sh} x \mathbf{Sh} y \end{cases}$$

Sulla (*) possiamo fare anche la seguente osservazione:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

ovvero: per k tendente all'infinito α tende a 60° . Cioè: se si suppone la costante k infinitamente grande, l'angolo del triangolo equilatero è di 60° , come nell'ordinaria geometria.

Più generalmente si potrebbe vedere che la (1), per $k = \infty$, diventa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

cioè la formula fondamentale della trigonometria piana euclidea. Questo risultato può utilmente riavvicinarsi alle affermazioni di GAUSS e SCHWEIKART.

§ 37. La seconda formula fondamentale della trigonometria sferica:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma \cos \frac{a}{k},$$

col semplice mutamento del *coseno circolare* nel *coseno iperbolico*, diventa la seconda formula fondamentale della *geometria log.-sferica*:

(2)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma \mathbf{Ch} \frac{a}{k}.$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = 90^\circ$ si ricava:

(3)

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} = \frac{1}{\text{sen } \beta}.$$

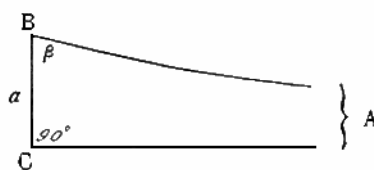


Fig. 36.

Il triangolo corrispondente a questa formula ha un angolo nullo e i due lati che lo comprendono di lunghezza infinita e paralleli [asintotici]. L'angolo β , compreso fra il lato parallelo ed il lato perpendicolare a CA, come risulta dalla (3), è funzione di a : potremo fin d'ora chiamarlo *angolo di parallelismo* corrispondente alla distanza a [cfr. LOBACEFSKI, p. 78].

Per $\beta = 45^\circ$ il segmento BC, la cui lunghezza è calcolabile mediante la (3), è la *costante* di SCHWEIKART [cfr. § 35] Denotando con P tale costante, avremo:

$$\mathbf{Ch} \frac{P}{k} = \sqrt{2},$$

da cui, risolvendo rispetto a k :

$$k = \frac{P}{\log(1 + \sqrt{2})}.$$

Questa relazione, che lega le due costanti k e P , fu dedotta da TAURINUS. La costante k è quella stessa usata da GAUSS [cfr. § 34] per esprimere la lunghezza della circonferenza.

§ 38. Sempre trasformando le formule della trigonometria sferica, mutando il raggio reale nel raggio immaginario, TAURINUS dedusse altri importanti teoremi della *geometria log.sferica*, ad es., che l'area d'un triangolo è proporzionale alla sua *deficienza* [LAMBERT, p. 40], che il limite superiore dell'area in discorso è:

$$\frac{\pi P^2}{\{\log(1 + \sqrt{2})\}^2} \quad [\text{GAUSS, p. 67}],$$

che la lunghezza della circonferenza di raggio r è:

$$2\pi k \mathbf{Sh} \frac{r}{k} \quad [\text{GAUSS, p. 64}],$$

che l'area del cerchio è data da:

$$2\pi k^2 \left(\mathbf{Ch} \frac{r}{k} - 1 \right),$$

che l'area della superficie sferica ed il volume della sfera sono dati rispettivamente da:

$$4\pi k \mathbf{Sh}^2 \frac{r}{k},$$

$$4\pi k^3 \frac{1}{2} \left(\mathbf{Sh} \frac{r}{k} \mathbf{Ch} \frac{r}{k} - \frac{r}{k} \right)$$

Non ci tratteremo sui relativi sviluppi analitici perchè nulla si aggiungerebbe per illuminare il metodo. Notiamo piuttosto che i risultati di TAURINUS confermano la previsione di LAMBERT circa la sua *terza ipotesi* [cfr. § 20], imperocchè le formule della *geometria log.-sferica*, analiticamente interpretate, danno le relazioni fondamentali fra gli elementi d'un triangolo tracciato sopra una sfera di raggio immaginario⁽⁷⁶⁾.

⁽⁷⁶⁾ A questo punto conviene notare che LAMBERT, contemporaneamente alle ricerche sulle parallele, si è occupato delle funzioni trigonometriche con argomento immaginario, il cui legame con la geometria non-euclidea è messo in evidenza da TAURINUS. Potrebbe darsi che LAMBERT avesse riconosciuto che le formule della trigonometria sferica conservano una *forma reale* anche mutando in esse il raggio reale nel raggio immaginario puro. Con ciò la previsione di LAMBERT, relativa all'*ip. ang. acuto* [cfr. § 21], avrebbe un fondamento indiscutibile. Nulla però ci autorizza a credere

Aggiungeremo che TAURINUS riconobbe, come LAMBERT, che la geometria sferica corrisponde pienamente al sistema valido nell'*ip. ang. ottuso*; inoltre che l'ordinaria geometria forma un anello di congiunzione fra la geometria sferica e la *geometria log.-sferica*.

Infatti, se il raggio k varia con continuità dal campo reale al campo puramente immaginario, attraverso l'infinito, si passa dal sistema sferico al sistema *log.-sferico*, attraverso quello d' EUCLIDE.

Benchè TAURINUS, come già si disse, escluda la possibilità d'una *geometria log.-sferica* valida sul piano, non disconosce l'interesse teorico ch'essa può offrire, e, richiamando sulle sue formule l'attenzione dei geometri, sembra prevedere l'esistenza di qualche caso concreto, in cui trovino una interpretazione⁽⁷⁷⁾.

che LAMBERT abbia effettivamente riavvicinato le sue ricerche sulle funzioni trigonometriche alla teoria delle parallele — cfr. P. STÄCKEL: «*Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien.*» — Bibliotheca Math, p. 107-110 [1899].

⁽⁷⁷⁾L'importanza di SCHWEIKART e TAURINUS, nella scoperta della geometria non-euclidea, fu rilevata e messa in luce dai SS. STÄCKEL ed ENGEL, che nella «*Th. der P.*» dedicarono loro un intero capitolo [p. 237-286], riportando i passi più importanti delle opere di TAURINUS e alcune lettere fra questi, GAUSS e SCHWEIKART. Vedi pure l'articolo di STÄCKEL, su «*Franz Adolph Taurinus*», *Abhandlungen Z. Geschichte d. Math.*, t. IX, p. 397-427 [1899].

CAPITOLO IV.

I fondatori della geometria non-Euclidea.

[Seguito]

NICOLA IVANOVIC LOBACEFSKI [1793-1856]⁽⁷⁸⁾.

§ 39. LOBACEFSKI studiò matematiche all'Università di Kasan, sotto la direzione del tedesco J. M. C. BARTELS [1769-1836], amico e compaesano di GAUSS; si laureò nel 1813 e rimase all'Università prima come assistente, poi come professore, insegnandovi tutti i rami della matematica ed anche la fisica e l'astronomia.

Nel 1815 LOBACEFSKI già si occupava delle parallele e in un suo manoscritto, relativo alle lezioni del 1815-17, si trovano alcuni tentativi per la dimostrazione del *V postulato* e ricerche simili a quelle di LEGENDRE. Però solo dopo il 1823 concepì la *Geometria immaginaria*. Ciò risulta da un suo trattato manoscritto sulla geometria elementare, ove è detto che non si possiede alcuna dimostrazione del *V postulato*, ma che una tale dimostrazione non dev'essere impossibile.

Fra il 1823 ed il 1825 le idee di LOBACEFSKI si orientarono verso una geometria indipendente dall'*ipotesi d'Euclide*, ed il primo frutto dei nuovi studi è l'«*Exposition succinte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.*», presentata il 12 [24] febbraio 1826 alla sezione fisico-matematica dell'Università di Kasan. In questa «*Lettura*», il cui manoscritto non fu rinvenuto, LOBACEFSKI espone i fondamenti d'una geometria più generale dell'ordinaria, ove per un punto passano due parallele ad una retta ed in cui la somma degli angoli d'un triangolo è minore di due angoli retti [*ip. ang. acuto* di SACCHERI e LAMBERT].

Nel 1829-30 affidò poi alla stampa una memoria «*Sui fondamenti della geometria.*»⁽⁷⁹⁾, contenente la parte essenziale della precedente «*Lettura*» ed ulteriori applicazioni della nuova teoria all'analisi. Successivamente uscirono la «*Geometria immaginaria.*» [1835]⁽⁸⁰⁾, i «*Nuovi fondamenti della geometria con una completa teoria delle parallele.*» [1835-38]⁽⁸¹⁾, le «*Applicazioni della geometria immaginaria a qualche integrale.*» [1836]⁽⁸²⁾; poi la «*Géométrie imaginaire.*» [1837]⁽⁸³⁾ e nel 1840 l'opuscolo riassuntivo: «*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.*»⁽⁸⁴⁾, scritto in lingua tedesca e destinato da LOBACEFSKI a richiamare l'attenzione dei geometri sulle sue ricerche. Finalmente nel 1855, un anno avanti la morte, egli, già cieco, dettò e pubblicò in lingua russa e francese una completa esposizione del suo sistema geometrico, sotto il titolo «*Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.*»⁽⁸⁵⁾.

⁽⁷⁸⁾ Per quanto riguarda le notizie storiche e critiche intorno a LOBACEFSKI rimandiamo, una volta per sempre, al volume di F. ENGEL: «*N. J. Lobatschefskij — Zwei geometrische Abhandlungen aus dem russischen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers.*» [Leipzig, Teubner, 1899].

⁽⁷⁹⁾ Bollettino di Kasan [1829-30]. — *Opere Geometriche* di LOBACEFSKI [Kasan, 1883-86], t. I, p. 1-67. - Traduzione tedesca di F. ENGEL a p. 1-66 del volume citato nella nota 77.

⁽⁸⁰⁾ Scritti scientifici dell'Università di Kasan [1835]. — *Op. Geom.*, t. I, p. 71-120.

⁽⁸¹⁾ Scritti scient. Un. Kasan [1835-38]. — *Op. Geom.*, t. I, p. 219-486. — Trad. tedesca di F. ENGEL, p. 67-235 del vol. citato nella nota 77.

⁽⁸²⁾ Scritti scient. Un. Kasan [1836]. — *Op. Geom.*, t. I, p. 121-218.

⁽⁸³⁾ Giornale di CRELLE, t. XVII, p. 295-320. — *Op. Geom.*, t. II, p. 581-613.

⁽⁸⁴⁾ Berlin [1840]. — *Op. Geom.*, t. II, p. 553-578. — Trad. francese di J. HOÜEL, contenuta nelle Mém. de Bordeaux t. IV [1866], od anche nelle: «*Recherches géométriques sur la théorie des parallèles.*», [Paris, Hermann, 1900].

⁽⁸⁵⁾ Raccolta di dissertazioni scientifiche scritte dai professori della reale Università di Kasan nel cinquantésimo anniversario della sua esistenza, t. I, p. 279-340, [1856]. — *Op. Geom.*, t. II, p. 617-80. — Trad. italiana di G. BATTAGLINI nel Giornale di Mat., t. V, p. 273-336.

§ 40. La geometria non-euclidea, quella stessa concepita da GAUSS e SCHWEIKART intorno al 1816, studiata da TAURINUS sotto forma d'un sistema astratto nel 1826, entrava nel 1829-30 a far parte del pubblico patrimonio scientifico.

Per accennare nel modo più rapido il metodo seguito da LOBACEFSKI nella costruzione della «Geometria immaginaria» o «Pangeometria», riferiamoci alle sue «Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele» del 1840.

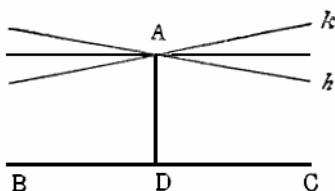


Fig. 37.

In esse LOBACEFSKI, dopo aver premesso un gruppo di teoremi indipendenti dalla teoria delle parallele, considera sul piano un fascio di centro A ed una retta BC che non gli appartenga. Sia AD la retta del fascio perpendicolare a BC ed AE la retta perpendicolare ad AD. Questa retta, nel sistema euclideo, è l'unica che non interseca BC. Nella geometria di LOBACEFSKI *esistono nel fascio A altre rette non secanti BC*: le *non secanti* sono separate dalle *secanti* da due rette *h, k*, che alla loro volta non incontrano BC [cfr. SACCHERI, p. 36].

Queste rette, che l'autore chiama *parallele*, hanno ciascuna un determinato verso di *parallismo*: la *h* della nostra figura corrisponde al verso destro, la *k* al verso sinistro. L'angolo formato dalla perpendicolare AD con una delle parallele è l'*angolo di parallelismo* corrispondente alla distanza AD. LOBACEFSKI usa il simbolo $\Pi(a)$ per denotare l'angolo di parallelismo corrispondente alla distanza *a*. Nell'ordinaria geometria si ha costantemente: $\Pi(a) = 90^\circ$; in quella di LOBACEFSKI $\Pi(a)$ è una ben determinata funzione di *a*, che tende a 90° quando *a* tende a zero, che tende a zero quando *a* tende all'infinito.

Dalla definizione di parallele l'autore deduce poi le loro principali proprietà, cioè la *conservazione*, la *reciprocità*, la *transitività* del carattere di parallelismo [cfr. GAUSS, §. 34] e il comportamento *asintotico* delle parallele.

La dimostrazione di queste proprietà è preceduta dai teoremi sulla somma degli angoli d'un triangolo, quegli stessi già dati da LEGENDRE e prima ancora da SACCHERI. Può quindi supporre che LOBACEFSKI conoscesse le ricerche di questi geometri, segnatamente del primo.

Ma la parte più importante della «Geometria immaginaria» è la costruzione delle formule trigonometriche.

Per dedurle l'autore introduce due nuove figure: l'*orificio* [cerchio di raggio infinito; cfr. GAUSS, §. 34] e l'*orisfera* [sfera di raggio infinito], che nell'ordinaria geometria sono rispettivamente la retta ed il piano. E poichè sulla orisfera, cui appartengono ∞^2 orifici, può istituirsi una geometria analoga alla ordinaria, in cui gli orifici sostituiscono le rette, così LOBACEFSKI ottiene questo primo notevole risultato: *Sulla orisfera è valida la geometria euclidea* [cfr. WACHTER, §. 30] *e in particolare l'ordinaria trigonometria piana*.

Di questa notevole proprietà e di un'altra relativa agli *orifici coassiali* [cerchi concentrici di raggio infinito] LOBACEFSKI si giova per dedurre le formule della nuova trigonometria piana e della trigonometria sferica. Queste ultime coincidono con le ordinarie formule della sfera, quando però gli elementi del triangolo siano misurati in angoli retti.

§ 41. Giova notare la forma data da LOBACEFSKI alle sue formule. Se nel triangolo piano ABC denotiamo con *a, b, c* i lati opposti ad A, B, C; con $\Pi(a), \Pi(b), \Pi(c)$ gli angoli di parallelismo corrispondenti ai lati, la formula fondamentale di LOBACEFSKI è:

(4)

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\text{sen } \Pi(b) \text{sen } \Pi(c)}{\text{sen } \Pi(a)} = 1.$$

È facile vedere che questa formula e quella di TAURINUS [(1), §. 36] sono trasformabili l'una nell'altra.

Per passare da quella di TAURINUS a quella di LOBACEFSKI basta far uso della (3) di §. 37, osservando però che l'angolo β che in essa compare è $\Pi(a)$. Per il passaggio inverso serve anche la seguente relazione, data da LOBACEFSKI:

(5)

$$\text{tg } \frac{1}{2} \Pi(x) = \mathbf{a}^{-x}.$$

che è la stessa (3) di TAURINUS, sotto forma un po' diversa.

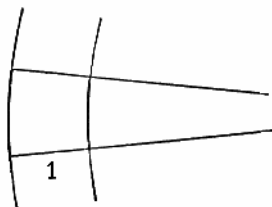


Fig. 38.

La costante \mathbf{a} che figura nella (5) è indeterminata: rappresenta il rapporto costante di due archi di oriccioli coassiali, compresi fra i medesimi raggi, distanti l'uno dall'altro dell'unità di misura. Scegliendo, con LOBACEFSKI, una conveniente unità, potremo prendere \mathbf{a} uguale ad e , cioè alla base dei logaritmi naturali. Volendo invece riavvicinare i risultati di LOBACEFSKI alla *Geometria log.-sferica* di TAURINUS, ovvero alla geometria *non-euclidea* di GAUSS, porremo:

$$\mathbf{a} = e^{\frac{1}{k}}$$

Allora la (5) diventa:

(5')

$$\text{tg } \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

o ciò che fa lo stesso:

(6)

$$\text{Ch } \frac{x}{k} = \frac{1}{\text{sen } \Pi(x)}$$

Con questa relazione si trasforma immediatamente la formula (4) di LOBACEFSKI nella (1) di TAURINUS. Quindi:

La geometria log.-sferica di TAURINUS è identica alla geometria immaginaria [Pangeometria] di LOBACEFSKI.

§ 42. Ecco i più notevoli risultati che LOBACEFSKI deduce dalle sue formule:

a) Per triangoli con lati piccolissimi [infinitesimi] alle formule della *trigonometria immaginaria* possono sostituirsi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, le ordinarie formule trigonometriche.

b) Il cambiamento dei lati a, b, c nei lati puramente immaginari ia, ib, ic trasforma le formule della *trigonometria immaginaria* nelle formule della *trigonometria sferica* ⁽⁸⁶⁾.

c) Istituito sul piano e nello spazio un sistema di coordinate simile all'ordinario cartesiano è possibile, coi metodi della geometria analitica, calcolare le lunghezze delle linee, le aree delle superficie, i volumi dei solidi.

§ 43. Come mai LOBACEFSKI fu condotto ad occuparsi delle parallele ed a scoprire la geometria immaginaria?

Si disse che BARTELS, maestro di LOBACEFSKI a Kasan, era legato in amicizia con GAUSS [§ 39]: se ora si aggiunge che quegli passò a Brunsvich, con GAUSS, i due anni che precedettero la sua chiamata a Kasan [1807] e che si mantenne poi con GAUSS in relazione epistolare, si presenta spontanea l'ipotesi che questi non sia estraneo alle ricerche di LOBACEFSKI.

Già vedemmo che GAUSS, prima del 1807, aveva tentato di risolvere la questione delle parallele e che i suoi sforzi fino a quell'epoca non avevano fruttato che la speranza di superare gli scogli contro cui avevano urtato le sue ricerche. Quindi tutto ciò che BARTELS può avere appreso da GAUSS prima del 1807 si ridurrebbe a qualche risultato negativo. Per quanto riguarda le successive vedute di GAUSS, pare assodato che BARTELS non ne avesse comunicazione, talchè possiamo ritenere che LOBACEFSKI creasse la sua geometria indipendentemente da qualsiasi influenza gaussiana ⁽⁸⁷⁾. Altre influenze potrebbero supporre, ad. es. quelle dovute alle opere di SACCHERI e LAMBERT, che il geometra russo, o direttamente o attraverso KLÜGEL e MONTUCLA, potrebbe aver conosciuto. Ma nulla di preciso si può formulare intorno a questa supposizione ⁽⁸⁸⁾. Ad ogni modo o le mancate dimostrazioni de' suoi predecessori o l'inutilità delle sue prime ricerche [1815-17] indussero LOBACEFSKI, come già GAUSS, a pensare che la difficoltà da superarsi avesse un fondamento diverso di quello fino allora supposto. LOBACEFSKI esprime chiaramente questa idea nei «*Nuovi fondamenti della geometria.*» del 1835, ove dice:

«L'infertilità dei tentativi, fatti dal tempo di Euclide, per lo spazio di due millenni, svegliò in me il sospetto che nei dati stessi non fosse contenuta ancora la verità che si era voluto dimostrare e che alla conferma sua potessero servire, come pel caso di altre leggi naturali, delle esperienze, ad esempio delle osservazioni astronomiche. Essendomi convinto finalmente della giustezza della mia congettura ed avendo acquistata l'opinione di aver completamente risolto il difficile quesito, scrissi, nell'anno 1826, una memoria su questo soggetto [*Exposition succinte des principes de la Géométrie.*]⁽⁸⁹⁾».

Le parole di LOBACEFSKI mettono in luce una concezione filosofica dello spazio, opposta a quella kantiana, che allora godeva il massimo favore. La dottrina kantiana considera lo spazio come una intuizione subbietiva, necessario presupposto di ogni esperienza; quella di LOBACEFSKI, riat-

⁽⁸⁶⁾ Questo risultato giustifica il metodo seguito da TAURINUS nella costruzione della sua *geometria log.-sferica*.

⁽⁸⁷⁾ Cfr. F. ENGEL, op. citata nella nota 77: *Zweiter Theil; Lobatschefskij Leben und Schriften.*, Cap. VI, p. 373-383.

⁽⁸⁸⁾ Cfr. le «*Congetture*» di SEGRE citate nella nota 41.

⁽⁸⁹⁾ P. 67 della citata opera di ENGEL.

taccandosi piuttosto al sensualismo ed alla corrente empirista, fa rientrare la geometria nel campo delle scienze sperimentali⁽⁹⁰⁾.

§ 44. Resta ora a mettere in relazione la *Pangeometria* di LOBACEFSKI con la questione suscitata dal *postulato euclideo*. La quale, come si è visto, mirava a costruire la teoria delle parallele col solo sussidio delle prime 28 proposizioni di EUCLIDE.

Rispettando questa richiesta LOBACEFSKI definisce il parallelismo e ne assegna i caratteri salienti di reciprocità e transitività. Il carattere d'equidistanza si presenta poi a LOBACEFSKI nella sua vera essenza. Ben lungi dall'essere legato indissolubilmente alle prime 28 proposizioni euclidee, esso racchiude invece un nuovo elemento.

La verità di questa asserzione risulta direttamente dall'esistenza della *Pangeometria* [scienza logica deduttiva, fondata sulle 28 prop. in discorso e sulla negazione del V *postulato*], in cui le parallele *non sono equidistanti*, ma asintotiche. Che la *Pangeometria* sia poi una scienza logicamente conseguente, cioè priva di contraddizioni interne, si spiega, con LOBACEFSKI, riferendosi alla formulazione analitica di cui essa è suscettibile.

Ecco come si esprime in proposito LOBACEFSKI alla fine della sua opera:

«Avendo mostrato in ciò che precede in qual modo bisogna calcolare la lunghezza delle linee curve, l'area delle superficie ed il volume dei corpi, ci è permesso d'affermare che la *Pangeometria* è una dottrina completa. Un semplice colpo d'occhio sulle equazioni (4), che esprimono la dipendenza esistente tra i lati e gli angoli dei triangoli rettilinei, è sufficiente per dimostrare che a partire di là la *Pangeometria* diviene un metodo analitico, che rimpiazza e generalizza i metodi analitici della geometria ordinaria. Si potrebbe incominciare l'esposizione della *Pangeometria* dalle suddette equazioni ed anche cercare di sostituire a queste equazioni altre che esprimerebbero le dipendenze tra gli angoli e i lati di ogni triangolo rettilineo; ma in quest'ultimo caso bisognerebbe dimostrare che queste nuove equazioni si accordano con le nozioni fondamentali della geometria. Le equazioni (4), essendo state dedotte da queste nozioni fondamentali, si accordano necessariamente con esse, e tutte le equazioni che si volessero loro sostituire, se queste equazioni non sono una conseguenza delle equazioni (4), debbono condurre a risultati contrari a queste nozioni. Così le equazioni (4) sono la base della geometria più generale, poichè esse non dipendono dalla supposizione che la somma dei tre angoli d'ogni triangolo rettilineo sia uguale a due angoli retti.»⁽⁹¹⁾.

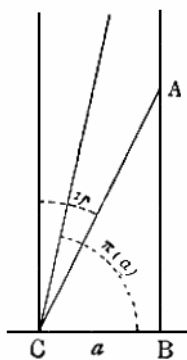


Fig. 39.

§ 45. Per stabilire qualche cosa intorno alla costante k contenuta implicitamente nelle formule di LOBACEFSKI ed esplicitamente in quelle di TAURINUS, è necessario applicare la nuova trigonometria a qualche caso pratico. Allo scopo LOBACEFSKI si giova d'un triangolo rettangolo ABC, in cui il lato $BC = a$ è il diametro dell'orbita terrestre ed A una stella fissa in direzione perpendicolare a BC. Indichiamo con $2p$ la *parallasse* massima della stella A. Avremo:

⁽⁹⁰⁾ Cfr. il discorso di A. VASILIEV su LOBACEFSKI [Kasan, 1893]. Trad. tedesca di ENGEL, Zeits. f. Math. u. Phy. t. XI, p. 205-44 (1895).

⁽⁹¹⁾ Cfr. la «*Pangeometria*», nella trad. italiana di G. BATTAGLINI, Gior. di Matematiche, t. V, p. 334

$$\Pi(a) > \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - 2p;$$

da cui:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) > \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - p \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p}$$

Ma:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}} \quad [\text{Cfr. (5')}]$$

quindi:

$$e^{-\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p}$$

Allora, nell'ipotesi $p < \frac{\pi}{4}$ abbiamo:

$$\frac{a}{k} = \log \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p} = 2 \left(\operatorname{tg} p + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 p + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 p + \dots \right)$$

Inoltre, essendo:

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = 2 (\operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \dots),$$

sarà finalmente: $\frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p$.

Sostituendo con LOBACEFSKI a $2p$ la parallasse di *Sirio*, che è di $1'',24$ ed effettuando i calcoli si ottiene:

$$\frac{a}{k} < 0,000006012.$$

Questo risultato non ci permette di assegnare un valore per k , ma di asserire che esso è molto grande rispetto al diametro terrestre. Si potrebbe ripetere il calcolo con parallasse molto minori, ad es. di $0''$, 1 , trovando k maggiore di un milione di volte il diametro dell'orbita terrestre.

Perchè nello spazio fisico fosse valida la geometria euclidea e conseguentemente il *V postulato*, dovrebbe k essere infinito, o, ciò che fa lo stesso, dovrebbero esistere stelle con parallasse piccola quanto si vuole.

Ora, una risposta all'ultima questione si capisce che non potremo mai dirla, inquantochè le osservazioni astronomiche saranno sempre limitate. Comunque, data l'enorme grandezza di k rispetto alle linee direttamente misurabili, dovremmo, con LOBACEFSKI, ritenere nel campo sperimentale valida l'ipotesi euclidea.

Alla stessa conclusione potremmo giungere considerando la cosa dal lato della somma degli angoli di un triangolo. Le osservazioni astronomiche portano che la deficienza d'un triangolo, coi lati pressochè uguali alla distanza della terra dal sole, non può superare $0''{,}0003$. Ora, se in luogo d'un triangolo astronomico considerassimo un triangolo terrestre, con gli angoli accessibili alle misure dirette, in forza del principio di proporzionalità fra l'area e la deficienza, l'eventuale deficienza di sifatto triangolo rientrerebbe necessariamente nei limiti degli errori sperimentali, sicchè, sperimentalmente, potremo ritenere che la deficienza in discorso sia nulla e conseguentemente sia valido nel campo sperimentale il *postulato euclideo*⁽⁹²⁾.

GIOVANNI BOLYAI [1802-1860].

§ 46. Insieme a LOBACEFSKI divide la gloria della scoperta della *geometria non-euclidea* l'ungherese G. BOLYAI, figlio di WOLFGANG BOLYAI [cfr. § 29], ufficiale nell'esercito austriaco. Fin da giovinetto egli mostrò una meravigliosa attitudine per le matematiche, in cui lo istruì lo stesso genitore. Le lezioni di WOLFGANG attirarono presto l'attenzione di GIOVANNI sull'*assioma XI*, alla cui dimostrazione volle poi accingersi, trascurando i consigli paterni, che miravano a distoglierlo da tale impresa. La teoria delle parallele formò così l'occupazione favorita del giovane matematico, durante il suo soggiorno [1817-22] alla R. Accademia del Genio in Vienna.

In quel tempo GIOVANNI ebbe relazioni di amicizia con CARLO SZÀSZ [1798-1853] e nelle conversazioni dei due valenti studiosi germogliarono alcune di quelle idee che condussero poi BOLYAI a creare la «*Scienza assoluta dello spazio*».

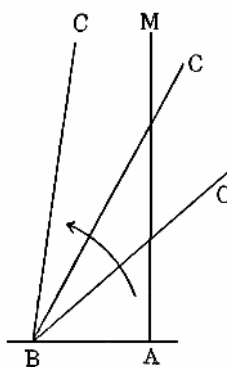


Fig. 40.

Pare che al SZÀSZ si debba l'idea esplicita di considerare la parallela ad AM condotta per B come la posizione limite di una secante BC, che ruota intorno a B in un senso determinato; cioè di considerare BC parallela ad AM, quando BC, secondo una espressione di SZÀSZ, si *stacca* [abspringe] da AM. BOLYAI chiamava questa parallela col nome di *parallela asintotica* o *asintoto* [cfr. SACCHERI]. Nei colloqui dei due amici si presentarono il concetto di *linea di equidistanza da una retta*; l'altro importantissimo di *paraciclo* [orociclo di LOBACEFSKI] e si riconobbe che si sarebbe ottenuta la dimostrazione dell'*assioma XI* se si potesse stabilire che il *paraciclo* è una retta.

Avendo sul principio del 1821 lo SZÀSZ lasciato Vienna, per assumere l'insegnamento del Diritto al Collegio di Nagy-Enyed [Ungheria], GIOVANNI rimase solo a proseguire nelle sue speculazioni. Fino al 1820 egli fu dominato dall'idea di trovare una dimostrazione per l'*assioma XI*, seguendo una via analoga a quella di SACCHERI e LAMBERT. Anzi credè d'aver raggiunto lo scopo, come risulta dalla sua corrispondenza col padre.

Il riconoscimento degli errori commessi fu per GIOVANNI il passo decisivo verso le future scoperte, perchè s'accorse «che non bisogna fare nessuna violenza alla natura nè modellarla in con-

⁽⁹²⁾ Per il contenuto di questo § cfr. LOBACEFSKI: «*Ueber die Anfangsgründe der Geometrie.*», a p. 22-24 dell'opera di ENGEL citata nella nota 77. Vedi pure le osservazioni di ENGEL a p. 248-252 della stessa opera.

formità ad alcuna chimera ciecamente formata, ma si deve invece in modo ragionevole e naturale guardare la natura stessa con la verità ed accontentarsi della rappresentazione meno imperfetta possibile.».

GIOVANNI BOLYAI si propose allora di costruire una *teoria assoluta* dello spazio, seguendo il metodo classico dei greci, cioè applicando il metodo deduttivo, senza però decidere a priori sulla validità o meno del *V Postulato*.

§ 47. Solo nel 1823 BOLYAI penetrò la vera natura del suo problema: nel seguito non vi aggiunse che delle condizioni relative al materiale ed alla forma. Aveva scoperto in quel tempo la formula:

$$e^{-\frac{a}{k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a)$$

che lega l'angolo di parallelismo $\Pi(a)$ al corrispondente segmento [cfr. LOBACEFSKI, p. 80], relazione che è la chiave di tutta la trigonometria non-euclidea. Ad illustrare le scoperte di GIOVANNI in questo periodo riportiamo un brano della lettera che egli scrisse, da Temesvár, al padre il 3 novembre 1823.

«Sono ormai risoluto di pubblicare un'Opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose sì belle che ne sono rimasto abbaliato, e si dovrebbero sempre rimpiangere se andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: *Ho dal nulla creato un nuovo universo*. Tutto ciò che vi ho comunicato fino ad ora non è che un palazzo di carta di fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi farà onore come se ciò fosse già avvenuto.».

WOLFGANG espresse il desiderio di accogliere subito nel «*Tentamen*» la teoria del figlio, perchè «se la cosa è realmente riuscita è conveniente affrettarsi a renderla di pubblica ragione per due motivi, primo perchè le idee passano facilmente da uno in un altro, che in seguito le può pubblicare prima; in secondo luogo perchè c'è anche qualche verità in ciò, che parecchie cose hanno un'epoca, nella quale esse sono trovate allo stesso tempo in più luoghi, precisamente come in primavera le violette da ogni parte vengono alla luce; e poichè ogni lotta scientifica è solo una gran guerra, alla quale non so quando seguirà la pace, si deve, quando si può, vincere, poichè qui il vantaggio spetta al primo.».

WOLFGANG BOLYAI era forse lontano dal supporre che il suo presentimento corrispondesse ad un fatto reale, cioè alla contemporanea scoperta della geometria non euclidea per opera di GAUSS, TAURINUS, LOBACEFSKI.

Nel 1826 GIOVANNI comunicò il suo lavoro a J. WALTER von ECKWEHR [1789-1857], già suo professore all'Accademia militare e nel 1829 rimise il manoscritto al padre. WOLFGANG non fu molto soddisfatto, segnatamente perchè non riuscì a comprendere come mai nelle formule di GIOVANNI dovesse entrare una costante indeterminata. Nondimeno padre e figlio si intesero per pubblicare in appendice al primo volume del «*Tentamen*» la nuova teoria dello spazio.

Ecco il titolo dell'opera di GIOVANNI BOLYAI: «*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.*»⁽⁹³⁾.

⁽⁹³⁾ Ristampata in formato di Lusso, per cura dell'Accademia Ungherese di Scienze, nell'occasione del 1° centenario della nascita dell'autore. [Budapest, 1902]. Vedi la traduzione italiana di G. BATTAGLINI, nel t. VI del Giornale di Matematiche, p. 97-115 [1868].

L'appendice fu inviata una prima volta [giugno 1831] a GAUSS senza che giungesse alla destinazione e una seconda volta nel gennaio del 1832. Sei settimane dopo [6 marzo 1832] GAUSS così rispondeva a WOLFGANG:

«Se comincio col dire che *non posso lodare questo lavoro* [di GIOVANNI], tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non posso dire altra cosa, lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'Opera, la via spianata da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. Così rimasi pienamente stupefatto. In quanto al mio lavoro personale, del quale fin qui ho ben poco confidato alla carta, era mia intenzione di non lasciare che si pubblicasse nulla durante la mia vita. Infatti la maggioranza degli uomini non ha idee chiare sulle questioni di cui si parla, ed io ho trovato ben poche persone che prestassero uno speciale interesse a ciò che loro comunicai su tale soggetto. Per poter prendere questo interesse bisogna prima di tutto aver sentito molto vivamente ciò che manca essenzialmente, e su questa materia quasi tutti sono in una completa oscurità. Al contrario era mia idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perchè esso almeno non perisse con me. E adunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico, che mi abbia preceduto in modo così notevole».

WOLFGANG comunicò questa lettera al figlio aggiungendo: «La risposta di Gauss rispetto alla tua opera ridonda ad onore della nostra patria e della nostra nazione.».

Un effetto tutto diverso produsse su GIOVANNI la lettera di GAUSS. Egli non poteva nè voleva convincersi che altri, prima ed indipendentemente da lui, fosse arrivato alla *geometria non-euclidea*. Sospettò ancora che il padre avesse comunicato a GAUSS le sue scoperte prima d'inviargli l'«Appendix» e che questi volesse appropriarsi la priorità della scoperta. E benchè in seguito dovesse convincersi che un tale sospetto era infondato, GIOVANNI conservò sempre una ingiustificabile avversione per il sommo geometra⁽⁹⁴⁾.

§ 48. Ecco un cenno dei più importanti risultati contenuti nell'opera di GIOVANNI BOLYAI.

a) Definizione delle parallele e loro proprietà indipendenti dal postulato euclideo.

b) Cerchio e sfera di raggio infinito. La geometria sulla sfera di raggio infinito è identica all'ordinaria geometria piana.

c) La trigonometria sferica è indipendente dal postulato d'EUCLIDE. Dimostrazione diretta delle formule.

d) Trigonometria piana nel caso non-euclideo. Applicazioni al calcolo delle aree e dei volumi.

e) Problemi risolubili elementarmente. Costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio, nell'ipotesi della falsità del V postulato.

Benchè LOBACEFSKI abbia dato un maggiore sviluppo alla *geometria immaginaria*, specialmente al suo contenuto analitico, BOLYAI ha trattato più profondamente la questione della dipendenza o meno delle proposizioni geometriche dal postulato euclideo. Dove LOBACEFSKI mira principalmente a costruire un sistema geometrico sulla negazione del postulato in discorso, GIOVANNI BOLYAI mette in evidenza le proposizioni e costruzioni che nell'ordinaria geometria non dipendono da quel postulato. Siffatte proposizioni, ch'egli chiama *assolutamente vere*, appartengono alla *scienza assoluta* dello spazio. La ricerca delle proposizioni di questa scienza potrebbe effettuarsi confrontando la geometria di EUCLIDE con quella di LOBACEFSKI. Tutto ciò che hanno di comune le due geometrie, ad es. le formule della trigonometria sferica, appartiene alla geometria assoluta. GIOVANNI BOLYAI però non segue questa via: egli dimostra direttamente, cioè indipendentemente dal postulato euclideo, le sue proposizioni assolutamente vere.

⁽⁹⁴⁾ Per il contenuto di questo e del precedente § cfr.: STÄCKEL: «Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai.», Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVII, [1901]; STÄCKEL ed ENGEL: «Gauss die beiden Bolyai and die nichteuklidische Geometrie.» Math. Ann. t. II, p. 149-167, [1897]; Bull. Sc. Math., (2), t. XXI, p. 206-228.

§ 49. Un teorema assoluto di BOLYAI, meraviglioso per semplicità ed eleganza, è il seguente:
In un triangolo rettilineo le circonferenze di raggio uguale ai lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.

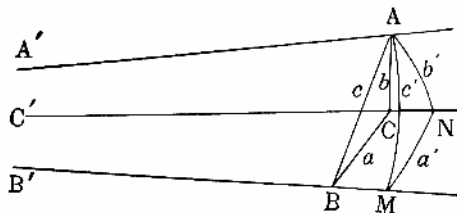


Fig. 41.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C, e BB' la perpendicolare in B al piano del triangolo. Pei vertici A, C si traccino le rette AA', CC', parallele in un determinato verso a BB', poi per A si immagini descritta l'orisfera [eventualmente piana] che taglia ortogonalmente le rette AA', BB', CC' rispettivamente nei punti A, M, N. Se si denotano con a', b', c' i lati del triangolo rettangolo orisferico AMN, in forza di quanto altrove si disse [ad es. al § 48, (b,)], si avrà:

$$\widehat{\text{sen AMN}} = b' : c'$$

Ma sull' orisfera due archi d'oricielo stanno fra loro come le circonferenze che hanno per raggi [oricielici] quegli archi, talchè, indicando con *cirf.* x' la circonferenza di raggio oriciclico x', si potrà scrivere:

$$\widehat{\text{sen AMN}} = \text{cirf. } b' : \text{cirf. } c'$$

D'altra parte, una circonferenza tracciata sull'orisfera con raggio oriciclico x', può riguardarsi come una circonferenza ordinaria, il cui raggio rettilineo x sia la metà della corda dell'arco oriciclico 2x'. Talchè, denotando O_x la circonferenza di raggio rettilineo x ed osservando che i due angoli ABC, AMN sono uguali, la precedente relazione assume la forma:

$$\widehat{\text{sen ABC}} = O_b : O_c$$

Dalla proprietà del triangolo rettangolo ABC, espresso con questa uguaglianza, si può dedurre l'enunciato teorema di BOLYAI, nello stesso modo che dalla relazione euclidea:

$$\widehat{\text{sen ABC}} = b : c$$

si deduce la proporzionalità fra i lati d'un triangolo e i seni degli angoli opposti [Appendix, § 25].

Il teorema di BOLYAI si esprime poi brevemente così:

$$(1) \quad O_a : O_b : O_c = \text{sen } \alpha : \text{sen } \beta : \text{sen } \gamma$$

Se ora volessimo specializzare il sistema geometrico, avremmo:

1°) nell'ip. euclidea:

$$\bigcirc_x = 2\pi x,$$

e sostituendo in (1):

$$(1') \quad a : b : c = \text{sen } \alpha : \text{sen } \beta : \text{sen } \gamma$$

2°) nell' ip. non-euclidea [cfr. § 34]:

$$\bigcirc_x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) = 2\pi k \text{Sh} \frac{x}{k}$$

ed operando come sopra:

$$(1'') \quad \text{Sh} \frac{a}{k} : \text{Sh} \frac{b}{k} : \text{Sh} \frac{c}{k} = \text{sen } \alpha : \text{sen } \beta : \text{sen } \gamma$$

Quest'ultima relazione può riguardarsi come il *teorema dei seni* della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI.

Dalle (1), con procedimenti analoghi agli ordinari basati sulle (1'), BOLYAI deduce la *proporzionalità fra i seni degli angoli e i seni dei lati in un triangolo sferico*. Da ciò risulta l'indipendenza della trigonometria sferica, dal postulato d'EUCLIDE [Appendix, § 26]. Questo fatto mette ancor più in rilievo l'importanza del teorema di BOLYAI.

§ 50. Appartiene pure alla geometria assoluta la seguente costruzione di una parallela per il punto D alla retta AN [Appendix, § 34].

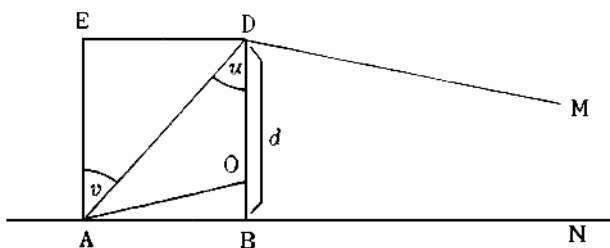


Fig. 42.

Tracciate le rette DB ed AE perpendicolarmente ad AN, si cali da D la perpendicolare DE alla retta AE. L'angolo EDB del quadrilatero trirettangolo ABDE è retto od acuto, per cui ED è uguale o maggiore ad AB. Con centro A si descriva una circonferenza di raggio ED: essa intersecherà il segmento DB in un punto O, coincidente con B ovvero compreso fra B e D. La retta AO forma con DB un angolo AOB uguale all'angolo di parallelismo corrispondente al segmento BD⁽⁹⁵⁾ [Ap-

⁽⁹⁵⁾ Ecco rapidamente come BOLYAI dimostra questa proposizione. Le circonferenze \bigcirc_{AB} , \bigcirc_{ED} , generate dai punti B, D nella loro rotazione intorno alla retta AE, possono considerarsi come appartenenti la prima al piano perpendicolare in A all'asse AE, la seconda ad una *superficie equidistante* da questo piano. L'equidistanza fra superficie e piano è data dal segmento $d = BD$. Il rapporto fra le due circonferenze in discorso risulta perciò funzione *soltanto* di d . Questo rapporto può anche esprimersi ricorrendo al teorema di BOLYAI [§ 49], il quale, applicato ai due triangoli rettangoli ADE, ADB, conduce alla relazione:

pendix, § 27]. Si costruirà dunque per D una parallela ad AN tracciando la retta DM in modo che l'angolo BDM risulti uguale all'angolo AOB.

§ 51. Fra le costruzioni non-euclidee, date da BOLYAI, è molto interessante la *quadratura del cerchio*. Senza attenerci strettamente al metodo di BOLYAI, cerchiamo di porgere questa costruzione nelle sue linee generali.

Premettiamo la costruzione inversa a quella del § 50, necessaria pel nostro scopo.

Costruire, nell'ip. non-euclidea, il segmento corrispondente ad un dato angolo [acuto] di parallelismo.

Dato che il teorema sull'*eventuale* incidenza delle tre altezze di un triangolo è valido anche nella geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI, sul lato AB, dell'angolo acuto BAA', [Fig. 43], si fissi un punto B tale che la parallela BB' alla retta AA' formi l'angolo B'BA acuto. Le due semirette AA'..., BB'... ed il segmento AB possono riguardarsi come lati d'un triangolo, di cui un vertice è il punto C_∞, comune alle due parallele AA', BB'. Allora, se dai vertici A e B si calano le perpendicolari AH, BK sui lati opposti, queste perpendicolari *s'incontrano* in un punto O, interno al triangolo, in cui concorre anche la perpendicolare calata da C_∞ su AB. Dunque, se da O si abbassa la perpendicolare OL su AB, verrà determinato il segmento AL, corrispondente all'angolo di parallelismo BAA'.

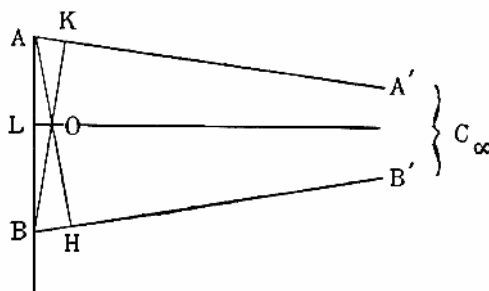


Fig. 43.

Come caso particolare l'angolo BAA' potrebbe essere di 45°: allora AL sarebbe la costante di SCHWEIKART [Cfr. § 35].

Notiamo che il problema risolto potrebbe enunciarsi così: *Costruire una retta parallela ad un lato di un angolo acuto e perpendicolare all'altro lato*⁽⁹⁶⁾.

§ 52. Ecco intanto come si utilizza il precedente risultato per *costruire un quadrato di area uguale a quella del triangolo massimo*.

L'area Δ di un triangolo essendo:

$$\odot_{AB} : \odot_{ED} = \text{sen } u : \text{sen } v.$$

Da ciò si vede che il rapporto $\text{sen } u : \text{sen } v$ non varia se, tenuto fisso d , la retta AE si sposta mantenendosi perpendicolare a BD. In particolare se il piede di AE tende all'infinito su AN, u tende a $\pi(d)$ e v ad un angolo retto. Conseguentemente:

$$\odot_{AB} : \odot_{ED} = \text{sen } \pi(d) : 1.$$

D'altra parte, nel triangolo rettangolo AOB, vale la relazione:

$$\odot_{AB} : \odot_{OA} = \text{sen } \hat{A}OB : 1,$$

la quale, insieme alla precedente, conduce a stabilire l'uguaglianza dei due angoli $\pi(d)$ e $\hat{A}OB$, c. d. d.

⁽⁹⁶⁾ La soluzione di BOLYAI [Appendix, §. 35] è però più complicata.

$$k^2 (\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}),$$

pel triangolo massimo, cioè pel triangolo coi tre vertici all'infinito, avremo:

$$\Delta = k^2 \pi$$

Per determinare l'angolo ω di un quadrato di area $k^2 \pi$ basta ricordare [LAMBERT, § 19] che anche l'area di un poligono, come quella del triangolo, è proporzionale alla relativa deficienza, per la qual cosa dovrà sussistere la relazione:

$$k^2 \pi = k^2 (2\pi - 4\omega),$$

da cui:

$$\omega = \frac{1}{4} \pi = 45^\circ;$$

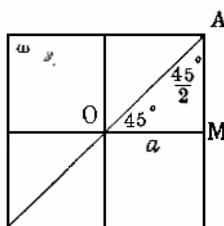


Fig. 44.

Ciò posto consideriamo il triangolo rettangolo OAM, che è l'ottava parte del quadrato in discorso. Ponendo $OM = a$ ed applicando la formula (2) di § 37, si ricava:

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} = \cos \frac{1}{2} 45^\circ : \text{sen } 45^\circ,$$

od anche:

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} = \text{sen} \frac{1}{2} 135^\circ : \text{sen } 45^\circ,$$

Se ora si costruiscono, secondo il § 51, i due segmenti b', c' , corrispondenti agli angoli di parallelismo $\frac{1}{2} 135^\circ, 45^\circ$ e si rammenta che [§ 41, (6)]:

$$\mathbf{Ch} \frac{x}{k} = \frac{1}{\text{sen } \Pi(x)},$$

fra i tre segmenti a, b', c' verrà a sussistere la relazione:

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} \mathbf{Ch} \frac{b'}{k} = \mathbf{Ch} \frac{c'}{k}.$$

Finalmente se si assumono b', c' quali cateto, il primo, e ipotenusa, il secondo, di un triangolo rettangolo, l'altro cateto a' di siffatto triangolo, in forza della (1) di § 36, è determinato dall'equazione:

$$\mathbf{Ch} \frac{a'}{k} \mathbf{Ch} \frac{b'}{k} = \mathbf{Ch} \frac{c'}{k}.$$

Paragonando questa uguaglianza con la precedente si ricava: $a' = a$. Costruito così a è immediatamente costruibile il quadrato d'area uguale a quella del triangolo massimo.

§ 53. Per costruire ora un cerchio d'area uguale a quella di questo quadrato o, ciò che fa lo stesso, a quella del triangolo massimo, è necessario trasformare l'espressione:

$$\bullet r = 2\pi k^2 \left(\mathbf{Ch} \frac{r}{k} - 1 \right)$$

che dà l'area del cerchio di raggio r [cfr. § 38], introducendo l'angolo di parallelismo

$$\Pi \left(\frac{r}{2} \right)$$

corrispondente al semiraggio. Così facendo si ottiene⁽⁹⁷⁾:

$$\bullet r = \frac{4\pi k^2}{\text{tg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right)}$$

⁽⁹⁷⁾ Infatti, per le proprietà delle funzioni iperboliche si ha:

$$\mathbf{Ch} \frac{r}{k} - 1 = 2 \mathbf{Sh}^2 \frac{r}{2k} = \left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}} \right)^2,$$

e per le proprietà dell'angolo di parallelismo [cfr. § 41]:

$$e^{-\frac{r}{2k}} = \text{tg} \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{r}{2} \right)$$

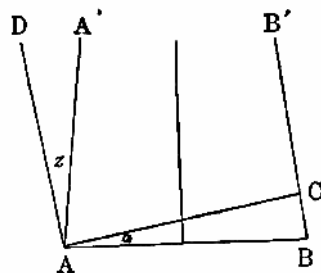


Fig. 45.

D'altra parte, se dagli estremi del segmento $AB = r$ si conducono le due parallele AA', BB' , in modo che gli angoli ch'esse formano con AB siano uguali, sarà:

$$\widehat{A'AB} = \widehat{B'BA} = \Pi \left(\frac{r}{2} \right)$$

Calata ora la perpendicolare AC su BB' e la perpendicolare AD ad AC e posto:

$$\widehat{CAB} = \alpha, \widehat{DAA'} = z,$$

si ha:

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} \left(\Pi \left(\frac{r}{2} \right) - \alpha \right) \frac{\operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right)}$$

Utilizzando le formole trigonometriche nel triangolo ABC è facile eliminare α dall'ultimo membro della precedente relazione ed ottenere così⁽⁹⁸⁾:

⁽⁹⁸⁾ Infatti, nel triangolo rettangolo ABC , si ha:

$$\operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{Ch} \frac{r}{k},$$

da cui, essendo

$$\operatorname{Ch} \frac{r}{k} = 2 \operatorname{Sh}^2 \frac{r}{2k} + 1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) + 1,$$

si deduce:

$$\operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) + 1,$$

e successivamente:

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right) = 1 + \operatorname{tg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right)$$

Queste due relazioni permettono di scrivere l'espressione di $\operatorname{tg} z$ nel modo richiesto.

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\operatorname{tg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right)},$$

dalla quale, per mezzo dell'ultima espressione di $\bullet r$ si ottiene:

$$\bullet r = \pi k^2 \operatorname{tg}^2 z.$$

Questa formula, dimostrata per altra via da BOLYAI [Appendix, § 43], permette di associare ad ogni cerchio un determinato angolo z . Se fosse $z = 45^\circ$ allora si avrebbe:

$$\bullet r = \pi k^2$$

cioè: l'area del cerchio, il cui angolo z è 45° , è uguale all'area del triangolo massimo e perciò a quella del quadrato del § 52.

Dato $z = A'AD$ [Fig. 45] si costruisce poi r tracciando: 1°) la retta AC perpendicolare ad AD; 2°) la retta BB' parallela ad AA' e perpendicolare ad AC [§ 51]; 3°) la bisettrice della striscia compresa fra AA', BB' [a mezzo del teorema sul punto d'incontro delle bisettrici in un triangolo con un vertice *improprio*]; 4°) la perpendicolare AB a questa bisettrice: il segmento AB, compreso fra AA' e BB', è il raggio r .

§ 54. Il problema di costruire poi un poligono equivalente ad un cerchio di area $\pi k^2 \operatorname{tg}^2 z$ è, come nota BOLYAI, legato intimamente al valore numerico di $\operatorname{tg}^2 z$. Esso è risolubile per ogni valore intero di $\operatorname{tg}^2 z$ e per ogni valore frazionario, quando però il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini cada sotto la forma assegnata da GAUSS per l'iscrizione dei poligoni regolari [Appendix, § 43].

La possibilità di costruire un quadrato equivalente ad un cerchio conduce GIOVANNI a concludere: «*habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat.*».

L'indecisione così formulata gli parve in quell'epoca [1831] irresolubile imperocchè chiuse il suo scritto con queste parole: «*Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ [sistema euclideo] aut aliquod (et quodnam) S [sistema non euclideo] sit, demonstrare: quod tamen occasionibus magis idoneae reservatur.*».

GIOVANNI però non pubblicò mai siffatta dimostrazione.

§ 55. Dopo il 1831 Bolyai si occupò ancora della sua geometria ed in particolare dei seguenti problemi

1°) Connessione fra la trigonometria sferica e la trigonometria non-euclidea.

2°) Si può rigorosamente dimostrare che l'assioma euclideo non è una conseguenza dei precedenti?

3°) Volume del tetraedro in geometria non euclidea.

Per quanto riguarda il primo di questi problemi, BOLYAI, oltre rendersi conto della relazione analitica che lega le due trigonometrie [cfr. LOBACEFSKI, § 41], riconobbe che nell'ipotesi non euclidea esistono tre tipi di superficie *uniformi*⁽⁹⁹⁾, su cui valgono rispettivamente la trigonometria non-euclidea, la trigonometria ordinaria, la trigonometria sferica. Sono del primo tipo le superficie

⁽⁹⁹⁾ Con questo nome BOLYAI sembra indicare quelle superficie che, rispetto alla mobilità su se stesse, si comportano come il piano.

piane ed *ipersferiche* [equidistanti da un piano], del secondo tipo le *parasferiche* [orisphere di LOBACEFSKI], del terzo tipo le *sferiche*. Dalle superficie ipersferiche si passa alle sferiche attraverso il caso limite delle parasfere. Questo passaggio si realizza analiticamente facendo variare con continuità, dal campo reale al campo immaginario puro, attraverso l'infinito, un certo parametro che compare nelle formule [cfr. TAURINUS, p. 73].

Il secondo problema, quello relativo all'indimostrabilità dell'*assioma XI*, BOLYAI non riuscì a risolverlo, nè a formarsi una esatta convinzione intorno ad esso. Per un certo tempo credè che non si potesse in alcun modo decidere quale, fra il caso euclideo e quello non euclideo, fosse il vero, appoggiandosi, come già LOBACEFSKI, al valore analitico della nuova trigonometria. Poi si verificò in GIOVANNI un ritorno alle antiche idee, seguito da un nuovo tentativo per dimostrare l'*assioma XI*. In questo tentativo applica le formule non-euclidee ad un sistema di cinque punti completamente indipendenti. Fra le distanze di questi punti intercede necessariamente una relazione: ora, per un errore di calcolo, GIOVANNI non trovò questa relazione e per un certo tempo credè aver così dimostrata la falsità dell'ipotesi non-euclidea e l'assoluta verità dell'*assioma XI*⁽¹⁰⁰⁾.

Però nel seguito s'accorse dell'errore, ma non procedè secondo questo indirizzo in ulteriori ricerche perchè il metodo, applicato ad un sistema di sei o più punti, lo avrebbe condotto a calcoli troppo lunghi.

Il terzo problema sopra indicato, relativo al tetraedro, è d'indole puramente geometrica. Le soluzioni di BOLYAI furono ritrovate e messe in luce recentemente dallo STÄCKEL [cfr. nota 99]. Dello stesso problema si era occupato distesamente LOBACEFSKI fin dal 1829⁽¹⁰¹⁾, e GAUSS, nella lettera in parte riportata a § 47, lo proponeva a GIOVANNI.

Aggiungeremo in fine che G. BOLYAI, venuto a conoscenza [1848] delle «*Geometrische Untersuchungen*» di LOBACEFSKI, se ne occupò con intendimento critico⁽¹⁰²⁾, e che, per superare il geometra russo, si accinse a comporre una grande opera sulla riforma dei principi della matematica, concepita al tempo della pubblicazione dell'«*Appendix*», ma non riuscì a condurla a termine⁽¹⁰³⁾.

LA TRIGONOMETRIA ASSOLUTA

§ 56. Benchè le formule della trigonometria non-euclidea contengano, come caso limite, le ordinarie relazioni fra lati ed angoli di un triangolo [cfr. § 36], tuttavia esse non rientrano in quella che GIOVANNI BOLYAI chiamava *geometria assoluta*. Invero, dette formule non si applicano senz'altro ai due tipi di geometria e furono dedotte supponendo la validità dell'*ip. ang. acuto*. Relazioni applicabili senz'altro al caso euclideo ed al caso non-euclideo furono da noi incontrate al § 49 e costituiscono il teorema di BOLYAI. Esse sono tre, di cui due soltanto indipendenti, e ci forniscono così un primo gruppo di formule della *trigonometria assoluta*.

Altre formule di trigonometria assoluta furono date nel 1870 dal geometra belga M. DE TILLY, nei suoi «*Études de Mécanique abstraite*.»⁽¹⁰⁴⁾.

⁽¹⁰⁰⁾ Ecco il titolo dello scritto in cui GIOVANNI si proponeva di esporre questa dimostrazione: «*Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum- und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der That allerhöchstwichtigsten 11. Euklid'schen Axioms. Von J. Bolyai von Bolya, k. k. Génie-Stabshauptmann in Pension.*». Vedi in proposito lo scritto di P. STÄCKEL: «*Untersuchungen aus der Absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass.*» Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XXIII, p. 280-307 [1902]. A questa scritto rimandiamo per tutto il contenuto del § 55.

⁽¹⁰¹⁾ Vedi p. 53 e succ. dell'op. citata nella nota 77.

⁽¹⁰²⁾ Cfr. P. STÄCKEL und J. KÜRSCHÁK: «*Johann Bolyai's Bemerkungen ueber N. Lobatschewskij's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.*», Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVIII, p. 250-279 [1902].

⁽¹⁰³⁾ Cfr. P. STÄCKEL: «*Johann Bolyai's Raumlehre.*» Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XIX [1903].

⁽¹⁰⁴⁾ Mémoires couronnés et autres Mémoires, della Reale Accademia del Belgio, t. XXI [1870]. Vedi anche, dello stesso autore «*Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.*», Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux, t. III, 1^{er} Cahier [1878].

Le formule di DE TILLY si riferiscono ai triangoli rettangoli e furono dedotte mediante considerazioni cinematiche, che utilizzano soltanto quelle proprietà di una regione limitata di piano, che sono indipendenti dal valore della somma degli angoli del triangolo.

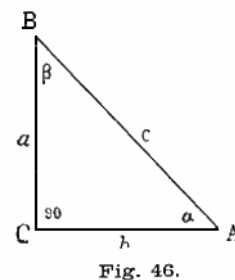
Oltre la funzione $\circ x$, che già s'incontra nelle formule di BOLYAI, in quelle di DE TILLY compare un'altra funzione $\mathbf{E}x$, definita nel modo seguente. Sia r una retta, l la *linea equidistante* da r del segmento x . Poichè gli archi di l sono proporzionali alle rispettive proiezioni su r è chiaro che il rapporto fra un arco [rettificato] di l e la sua proiezione non dipenderà dalla lunghezza dell'arco, ma soltanto dalla distanza x . La funzione che esprime questo rapporto è la funzione $\mathbf{E}x$ introdotta da DE TILLY.

Ciò posto ecco le formule della trigonometria assoluta, che si riferiscono al triangolo ABC.

$$(1) \quad \begin{cases} \circ a = \circ c. \text{sen } \alpha \\ \circ b = \circ c. \text{sen } \beta \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \mathbf{E}a. \text{sen } \beta \\ \cos \beta = \mathbf{E}b. \text{sen } \alpha \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathbf{E}c = \mathbf{E}a. \mathbf{E}b$$



Il gruppo (1) è il teorema di BOLYAI nel triangolo rettangolo. Tutte le formule della trigonometria assoluta si deducono combinando opportunamente questi tre gruppi. In particolare, nel triangolo rettangolo si ottiene;

$$\circ^2 a.(\mathbf{E}a+\mathbf{E}b.\mathbf{E}c) + \circ^2 b.(\mathbf{E}b+\mathbf{E}c.\mathbf{E}a) = \circ^2 c.(\mathbf{E}c+\mathbf{E}a.\mathbf{E}b)$$

Questa può considerarsi come l'espressione del teorema di PITAGORA nella geometria assoluta⁽¹⁰⁵⁾.

§ 57. Vediamo ora come dalle relazioni del § precedente possano dedursi quelle della geometria euclidea e della non-euclidea.

Caso euclideo. — L'equidistante l è una retta [quindi $\mathbf{E}x = 1$], le circonferenze sono proporzionali ai raggi. Allora le (1) diventano:

$$(1') \quad \begin{cases} a = c \text{sen } \alpha, \\ b = c \text{sen } \beta; \end{cases}$$

le (2) danno:

$$\cos \alpha = \text{sen } \beta, \cos \beta = \text{sen } \alpha,$$

cioè:

$$(2') \quad \alpha + \beta = 90^\circ;$$

infine la (3) si riduce a una identità.

Le (1'), (2') comprendono tutta l'ordinaria trigonometria.

Caso non-euclideo. - Combinando fra loro le (1) e le (2) si ottiene:

⁽¹⁰⁵⁾ Cfr. R. BONOLA: «La trigonometria assoluta secondo Gioranni Bolyai». Rend. Istituto Lombardo, (2), t. XXXVIII [1905].

$$(5) \frac{\text{O}^2 a}{\mathbf{E}^2 a - 1} = \frac{\text{O}^2 b}{\mathbf{E}^2 b - 1}$$

Se poi applichiamo la 1^a delle (2) ad un triangolo rettangolo col vertice A tendente all'infinito, e quindi α tendente a zero, avremo:

$$\lim \cos \alpha = \lim (\mathbf{E}a \cdot \text{sen } \beta)$$

Ma $\mathbf{E}a$ è indipendente da α ; l'angolo β , al limite, diventa l'angolo di parallelismo corrispondente ad a , cioè $\Pi(a)$. Avremo dunque:

$$\mathbf{E}a = \frac{1}{\text{sen } \Pi(a)}$$

Altrettanto dicasi per $\mathbf{E}b$. Sostituendo nella (5) otteniamo:

$$\frac{\text{O}^2 a}{\text{Ctg}^2 \Pi(a)} = \frac{\text{O}^2 b}{\text{Ctg}^2 \Pi(b)},$$

da cui:

$$\frac{\text{O} a}{\text{Ctg } \Pi(a)} = \frac{\text{O} b}{\text{Ctg } \Pi(b)}.$$

Questa relazione, insieme alla espressione di $\mathbf{E}x$, ci permette senz'altro di ottenere dalle (1), (2), (3) le formule della trigonometria di LOBACEFSKI-BOLYAI.

$$(1'') \begin{cases} \text{ctg } \Pi(a) = \text{ctg } \Pi(c) \cdot \text{sen } \alpha \\ \text{ctg } \Pi(b) = \text{ctg } \Pi(c) \cdot \text{sen } \beta \end{cases}$$

$$(2'') \begin{cases} \text{sen } \alpha = \cos \beta \cdot \text{sen } \Pi(b) \\ \text{sen } \beta = \cos \alpha \cdot \text{sen } \Pi(a) \end{cases}$$

$$(3'') \text{sen } \Pi(c) = \text{sen } \Pi(a) \cdot \text{sen } \Pi(b)$$

Queste relazioni, cui soddisfano gli elementi di ogni triangolo rettangolo, sono nella forma loro data da LOBACEFSKI⁽¹⁰⁶⁾. Se in luogo degli angoli di parallelismo $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ si volessero introdurre delle funzioni dirette dei lati, basterebbe ricordare [§. 41] che:

$$\text{tg } \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

⁽¹⁰⁶⁾ Cfr. ad es. le «*Geometrische Untersuchungen*» di LOBACEFSKI, citate nel § 39.

ed esprimere le funzioni circolari di $\Pi(x)$ con funzioni iperboliche di x . Si otterrebbero allora le precedenti relazioni sotto la nuova forma:

$$(1''') \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sh} \frac{a}{k} = \mathbf{Sh} \frac{c}{k} \text{ sen } \alpha. \\ \mathbf{Sh} \frac{b}{k} = \mathbf{Sh} \frac{c}{k} \text{ sen } \beta. \end{array} \right.$$

$$(2''') \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \text{sen } \beta \mathbf{Ch} \frac{a}{k}. \\ \cos \beta = \text{sen } \alpha \mathbf{Ch} \frac{b}{k}. \end{array} \right.$$

$$(3''') \mathbf{Ch} \frac{c}{k} = \mathbf{Ch} \frac{a}{k} \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

§ 58. Una osservazione importantissima sulla trigonometria assoluta è questa. *Interpretando gli elementi delle sue formule come elementi di un triangolo sferico, essa porge un sistema di relazioni valide anche pei triangoli sferici.*

La ragione di questa proprietà della trigonometria assoluta risiede nel fatto, già notato a § 56, ch'essa fu dedotta utilizzando solo le relazioni pertinenti a regioni limitate di piano, che non dipendono dalle ipotesi sulla somma degli angoli di un triangolo e perciò valide anche sulla sfera.

Chi volesse ottenere direttamente il risultato potrebbe osservare:

1°) che in geometria sferica le circonferenze sono proporzionali ai seni dei raggi [sferici], per la qual cosa la prima formula dei triangoli sferici rettangoli:

$$\text{sen } a = \text{sen } c \text{ sen } \alpha,$$

si trasforma immediatamente nella 1° delle (1);

2°) che un cerchio di raggio sferico $\frac{1}{2} \pi - b$ può considerarsi come una linea equidistante dal cerchio massimo concentrico e che il rapporto \mathbf{Eb} fra questi due cerchi è dato da:

$$\frac{\text{sen} \left(\frac{1}{2} \pi - b \right)}{\text{sen} \frac{1}{2} \pi} = \cos b$$

per cui le formule dei triangoli sferici rettangoli:

$$\cos \alpha = \text{sen } \beta \cos a,$$

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

si trasformano immediatamente nelle (2) e (3).

Concludendo: *Le formule della trigonometria assoluta sono valide anche sulla sfera.*

IPOTESI EQUIVALENTI AL POSTULATO EUCLIDEO.

§ 59. Prima di lasciare il campo elementare ci sembra opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul valore che, nell'organismo della geometria, hanno talune proposizioni, che in un certo senso possono ritenersi come *ipotesi equivalenti* al *V postulato*.

Per intenderci chiaramente cominciamo col rilevare il significato di questa equivalenza.

Due ipotesi sono *assolutamente equivalenti* quando ciascuna di esse si deduce dall'altra senza il sussidio di alcuna nuova ipotesi. In questo senso sono assolutamente equivalenti le due ipotesi seguenti:

- a) Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.
- b) Per un punto fuori d'una retta passa una sola parallela a quella retta.

Questo genere di equivalenza non ha molto interesse, perchè le due ipotesi sono semplicemente due forme diverse d'una stessa proposizione. Vediamo piuttosto come il concetto di equivalenza possa generalizzarsi. Supponiamo che una teoria deduttiva sia fondata sopra un certo sistema di ipotesi, che denoteremo con $\{A, B, C, \dots H\}$. Siano poi M ed N due nuove ipotesi tali che dal sistema $\{A, B, C, \dots H, M\}$ possa dedursi N, e dal sistema $\{A, B, C, \dots H, N\}$ possa dedursi M. Indicheremo ciò scrivendo

$$\begin{aligned} \{A, B, C, \dots H, M\} &\supset N, \\ \{A, B, C, \dots H, N\} &\supset M. \end{aligned}$$

Allora, generalizzando il concetto di equivalenza, diremo che le due ipotesi M, N, sono equivalenti *relativamente al sistema fondamentale* $\{A, B, C, \dots H\}$.

Insistiamo sull'importanza che il sistema fondamentale $\{A, B, C, \dots H\}$ ha in questa definizione. Infatti può accadere che restringendo il sistema fondamentale, tralasciando ad esempio l'ipotesi A, *non siano contemporaneamente possibili* le due deduzioni:

$$\begin{aligned} \{B, C, \dots H, M\} &\supset M, \\ \{B, C, \dots H, N\} &\supset N. \end{aligned}$$

Allora, rispetto al nuovo sistema fondamentale $\{B, C, \dots H\}$, le due ipotesi M, N *non sono equivalenti*.

Dopo questi schiarimenti di ordine logico vediamo che cosa risulti dai precedenti sviluppi, circa l'equivalenza fra talune ipotesi e l'*ipotesi euclidea*.

Assumiamo in primo luogo come sistema fondamentale di ipotesi quello formato dai postulati di *associazione* [A] e di *distribuzione* [B], che caratterizzano nel modo ordinario i concetti di retta e piano; dai postulati della *congruenza* [C], dal *postulato di Archimede* [D].

Relativamente a questo sistema fondamentale, che indicheremo con $\{A, B, C, D\}$, le seguenti ipotesi sono fra loro equivalenti ed equivalenti a quella formulata da EUCLIDE nel suo *V postulato*:

- a) Gli angoli interni da una stessa parte, formati da due parallele con una trasversale sono supplementari [TOLOMEIO].
- b) Due rette parallele sono equidistanti.
- c) Se una retta incontra una di due parallele incontra anche l'altra [PROCLIO]; oppure: due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro; od anche: per un punto fuori d'una retta passa una sola parallela a quella retta.
- d) D'un triangolo qualunque può sempre costruirsi un triangolo simile di grandezza arbitraria [WALLIS].
- e) Per tre punti non in linea retta passa sempre una sfera [W. BOLYAI].
- f) Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell'angolo [LORENZ].

α) Se due rette r, s , sono l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale AB , i segmenti di perpendicolare calati dai punti di s su r sono minori di AB , dalla banda da cui AB forma con s un angolo acuto [NASÎR EDDÎN].

β) Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.

γ) La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti [SACCHERI].

Supponiamo ora di restringere il sistema fondamentale di ipotesi *prescindendo dall'ipotesi archimedeae*. Allora le proposizioni $a), b), c), d), e), f)$, anche rispetto al nuovo sistema fondamentale $\{A, B, C\}$, sono fra loro equivalenti ed equivalenti al *V postulato di Euclide*. Quanto alle proposizioni $\alpha), \beta), \gamma)$, pur essendo fra loro equivalenti rispetto al sistema $\{A, B, C\}$, *nessuna* è equivalente al *postulato euclideo*. Questo risultato, che mette in rilievo l'ufficio del postulato di ARCHIMEDE, è contenuto in una già citata memoria di M. DEHN [1900]⁽¹⁰⁷⁾. In questa memoria viene dimostrato che l'ipotesi γ) sulla somma degli angoli di un triangolo è compatibile non solo con l'ordinaria geometria elementare, ma anche con una nuova geometria, necessariamente *non archimedeae*, dove non vale il *V postulato* ed in cui per un punto passano infinite non secanti rispetto ad una retta assegnata. A questa geometria l'autore diede il nome di *Semi-Euklidische Geometrie*.

LA DIFFUSIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA.

§ 60. Le opere di LOBACEFSKI e BOLYAI non ebbero, al loro sorgere, quell'accoglienza che tanti secoli di lenta e continua preparazione sembravano promettere. Questo però non deve meravigliarci, perchè la storia della scienza c'insegna che ogni radicale mutamento nelle singole discipline non abbatte d'un tratto le convinzioni, i preconcetti su cui i pensatori e gli studiosi, attraverso un lungo periodo di tempo, edificarono le loro dottrine.

Nel nostro caso l'affermazione della geometria non-euclidea fu ritardata anche da ragioni speciali, quali la difficoltà che offrivano alla lettura le opere russe di LOBACEFSKI, l'oscurità dei nomi dei due rinnovatori, la concezione kantiana dello spazio allora dominante.

A diradare le tenebre che avvolsero nei primi anni le nuove teorie giovarono gli scritti francesi e tedeschi di LOBACEFSKI, ma soprattutto l'opera costante e indefessa di alcuni geometri, i cui nomi sono ora legati alla diffusione e al trionfo della geometria non-euclidea. Intendiamo parlare principalmente di C. L. GERLING [1788-1864], R. BALTZER [1818-1887], FR. SCHMIDT [1827-1901] in Germania; di J. HOÜEL [1823-1886], G. BATTAGLINI [1826-1894], E. BELTRAMI [1835-1900], A. FORTI in Francia ed in Italia.

§ 61. GERLING, che fin dal 1816 era in corrispondenza con GAUSS sulle parallele⁽¹⁰⁸⁾ e che nel 1819 gli comunicava la nota di SCHWEIKART sull'«*Astralgeometrie*» [cfr. §. 35], ebbe dallo stesso GAUSS [1832] e con parole che non poterono non suscitare in lui una legittima curiosità, la notizia di un «*kleine Schrift*» sulla geometria non-euclidea composto da un giovane ufficiale austriaco, figlio di W. BOLYAI⁽¹⁰⁹⁾. Le successive indicazioni bibliografiche avute [1844] da GAUSS sulle opere di LOBACEFSKI e BOLYAI⁽¹¹⁰⁾, indussero GERLING a procurarsi le «*Geometrische Untersuchungen*» e l'«*Appendix*» e a toglierle così dall'oblio, in cui sembravano confinate.

§ 62. La corrispondenza fra GAUSS e SCHUMACHER, pubblicata fra il 1860 ed il 1863⁽¹¹¹⁾, le più volte citate opere di LOBACEFSKI e BOLYAI, i tentativi di LEGENDRE per dare, anche nei testi e-

⁽¹⁰⁷⁾ Cfr. nota (30).

⁽¹⁰⁸⁾ Cfr. il t. VIII delle «*Opere di Gauss*», p. 167-69.

⁽¹⁰⁹⁾ Cfr la lettera di GAUSS a GERLING, a p. 220, t. VIII, delle «*Op. Gauss*». In questa lettera GAUSS, parlando del contenuto dell'«*Appendix*», dice: «*ich alle meine eigenen Ideen und RESULTATE wiederfinde mit grösser Eleganz entwicelt*», e dell'autore dello scritto: «*Ich halte diesen jungen Geometer v. BOLYAI für ein Genie erster Grösse...*».

⁽¹¹⁰⁾ «*Op. Gauss*», t. VIII, p. 234-38.

⁽¹¹¹⁾ «*Briefwechesel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher.*»; t. II, p. 268, 431; t. V, p. 246 [Altona, 1860-63]. Intorno alle idee di GAUSS, note in quell'epoca, vedi pure: SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN; «*Gauss zum Gedächtniss.*», p. 80-81 [Leipzig, 1856].

lementari, un assetto rigoroso alla teoria delle parallele, indussero BALTZER a sostituire, nella 2. ed. dei suoi «*Elemente der Mathematik*» [1867], la definizione euclidea di parallela con quella derivante dalla nuova concezione dello spazio ed a classificare, con LOBACEFSKI, fra le proprietà sperimentali la relazione: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, che caratterizza il triangolo euclideo. Per giustificare poi l'innovazione BALTZER non mancò di porgere un breve cenno della possibilità teorica d'una geometria più generale dell'ordinaria, fondata sull'ipotesi di due parallele e di mettere in giusto rilievo i nomi dei suoi fondatori⁽¹¹²⁾. Nello stesso tempo richiamò l'attenzione di HOÜEL, il cui interessamento per le questioni riguardanti la geometria elementare era ben noto nel campo scientifico⁽¹¹³⁾, sulla geometria non-euclidea, sollecitandolo a tradurre in lingua francese le «*Geometrische Untersuchungen*» e l'«*Appendix*».

§ 63. La versione francese dell'opuscolo di LOBACEFSKI uscì nel 1866 insieme a quella di un estratto della corrispondenza fra GAUSS e SCHUMACHER⁽¹¹⁴⁾. Il riavvicinamento così ottenuto fra le idee di LOBACEFSKI-BOLYAI e quelle di GAUSS fu molto fecondo perchè il nome di GAUSS e la sua sanzione alle scoperte dei due allora oscuri ed ignorati geometri contribuirono nel modo più efficace e sicuro a dare credito ed importanza alle nuove dottrine.

La versione francese dell'«*Appendix*» uscì nel 1867⁽¹¹⁵⁾ preceduta da una «*Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai di Bolya.*», scritta dall'architetto FR. SCHMIDT per invito dello stesso HOÜEL⁽¹¹⁶⁾, e seguita dalle osservazioni di W. BOLYAI, tratte dal 1° volume del «*Tentamen*» e da un opuscolo riassuntivo di WOLFGANG sui principi dell'Aritmetica e della Geometria⁽¹¹⁷⁾.

I dati raccolti dallo SCHMIDT sui due BOLYAI furono contemporaneamente [1867] pubblicati nell'«*Archiv. d. Math. u. Phy.*» e nell'anno successivo A. FORTI, che già aveva stampato un articolo storico-critico su LOBACEFSKI⁽¹¹⁸⁾, rendeva noto agli italiani il nome e le opere dei due ormai celebri geometri ungheresi⁽¹¹⁹⁾.

A favore di HOÜEL va anche ricordato il suo interessamento pei manoscritti di GIOVANNI BOLYAI, allora conservati [1867], in forza d'una disposizione testamentaria di WOLFGANG, nella Biblioteca del Collegio Riformato di Maros Vásárhely. Per mezzo del principe B. BONCOMPAGNI [1821-1894], che interessò a sua volta il Ministro ungarico dei Culti, barone EÖTVÖS, ottenne che

⁽¹¹²⁾ Cfr. gli «*Elementi di Matematica*» di BALTZER, tradotti da L. CREMONA, t. IV, p. 5-7, 24-31 [Genova, 1867].

⁽¹¹³⁾ HOÜEL aveva pubblicato, fin dal 1863, il suo famoso «*Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire.*»; *Archiv. d. Math. u. Phy.*, t. XL [1863].

⁽¹¹⁴⁾ Mémoires de la Société des Sciences Phy. et Naturelles de Bordeaux, t. IV, p. 88-120 [1866]. Fu anche pubblicata in un opuscolo separato, col titolo: «*Études géométriques sur la théorie des parallèles* par N. J. LOBATSCHESKI, Conseiller d'Etat de l'Empire de Russie et Professeur a l'Université de Kasan; traduit de l'allemand par J. HOÜEL, *Suivis d'un Extrait de la correspondance de GAUSS et de SCHUMACHER.*» [Paris, G. Villars, 1866].

⁽¹¹⁵⁾ Mém. Soc. Scienc. Phy. et Nat. de Bordeaux, t. V, p. 189-248. Fu anche pubblicata a parte in un opuscolo col titolo: «*La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiôme XI*, par JEAN BOLYAI, Capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne; *Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai*, par M. Fr. SCHMIDT.» [Paris, G. Villars, 1868].

⁽¹¹⁶⁾ Cfr.: P. STACKEL: «*Franz Schmidt*», *Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver.*, t. XI, p. 141-46 [1902].

⁽¹¹⁷⁾ Quest'opuscolo di W. BOLYAI si suole brevemente citare con le prime parole del suo titolo: «*Kurzer Grundschrift*». Fu stampato a Maros-Vásárhely nel 1851.

⁽¹¹⁸⁾ «*Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana. Considerazioni storico-critiche.*»; *Rivista Bolognese di scienze, lettere, arti e scuole*, t. II, p. 171-84 [1867]. Fu stampato separatamente in un opuscolo di 16 pagine [Bologna, Fava e Garagnani, 1867]. Lo stesso scritto, con varie aggiunte e col titolo: «*Studii geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatschewsky.*», fu ristampato nel giornale politico «*La Provincia di Pisa*», Anno III, n. 25, 27, 29, 30 [1867] e ripubblicato a parte sotto il titolo primitivo [Pisa, Nistri, 1867].

⁽¹¹⁹⁾ Cfr.: «*Intorno alla vita ed agli scritti Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi.*», *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle scienze Mat. e Fisiche*, t. I, p. 277-99 [1869]. Questo articolo di FORTI è arricchito con copiose note storiche e bibliografiche da B. BONCOMPAGNI.

venissero depositati [1869] presso l'Accademia ungherese delle Scienze di Budapest⁽¹²⁰⁾ e potessero così formare oggetto dei pazienti ed accurati studi prima dello SCHMIDT, recentemente di STÄCKEL.

Inoltre HOÜEL non mancò di adoperarsi, nelle più varie occasioni, affinché alla geometria non-euclidea fosse assicurato un durevole trionfo: basti citare il suo «*Essai critique sur les principes fondamentaux de la geometrie.*»⁽¹²¹⁾, gli articoli «*Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulat d'Euclide.*»⁽¹²²⁾, le «*Notices sur la vie et les travaux de N. J. LOBATCHEFSKY*»⁽¹²³⁾, le traduzioni francesi di vari scritti relativi alla geometria non-euclidea⁽¹²⁴⁾, per comprendere quale fervente apostolo abbia questa trovato nel celebre matematico francese.

§ 64. Con altrettanta fede ed attività introduceva e diffondeva in Italia le nuove speculazioni geometriche il nostro connazionale GIUSEPPE BATTAGLINI ed il «*Giornale di Matematica*», da lui fondato e diretto, dal 1867 in poi fu come l'organo ufficiale per la geometria non-euclidea.

Il primo lavoro di BATTAGLINI «*Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*»⁽¹²⁵⁾, scritto per stabilire direttamente il principio che serve di base alla teoria generale delle parallele ed alla trigonometria lobacefskiana, è seguito, a poche pagine di distanza, dalla traduzione italiana della «*Pangeometria*»⁽¹²⁶⁾ e questa, alla sua volta, nel 1868, dalla traduzione dell'«*Appendix*». Contemporaneamente, nel sesto volume del «*Giornale di Matematica*», usciva il celebre «*Saggio di interpretazione della geometria non euclidea.*»⁽¹²⁷⁾, di E. BELTRAMI, «che proiettò una luce inaspettata nella controversia allora agitata intorno ai principi fondamentali della geometria ed ai concetti di GAUSS e LOBATSCHEFSKY»⁽¹²⁸⁾.

Sfogliando le successive annate del «*Giornale di Matematica*» s'incontrano frequentemente scritti relativi alla geometria non-euclidea: due di BELTRAMI [1872], che si riattaccano al precitato «*Saggio*»; vari di BATTAGLINI [1874-78] e D'OVIDIO [1875-77], trattanti alcune questioni della nuova geometria coi metodi proiettivi inaugurati da CAYLEY; quella di HOÜEL [1870] sull'indimostrabilità del postulato euclideo; altre di CASSANI [1873-81], GÜNTHER [1876], DE-ZOLT [1877], FRATTINI [1878], RICORDI [1889], etc.

§ 65. L'opera di diffusione, iniziata e coraggiosamente condotta dai predetti geometri, ebbe pure un efficacissimo impulso da un altro gruppo di pubblicazioni, che, in quel torno di tempo [1868-72], affacciava il problema dei fondamenti della geometria sotto forma più generale ed elevata di quella informante le ricerche elementari di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI. Dei nuovi metodi ed indirizzi, cui sono legati i nomi di alcuni fra i più eminenti matematici e filosofi contemporanei, parleremo brevemente nel cap. V; qui ci basti notare che l'antica questione delle parallele, alla quale le ricerche di LEGENDRE, quarant'anni prima, parevano aver tolto ogni interesse, attrasse ancora e sotto un aspetto completamente nuovo, l'attenzione dei geometri e filosofi, diventando centro di un vastissimo campo di indagini. Delle quali alcune ebbero il semplice scopo di rendere meglio accessibile al gran pubblico matematico le opere dei fondatori della geometria non-euclidea, altre mirarono ad allargare i risultati, il contenuto, il significato della nuova dottrina, contribuendo in pari tempo ai progressi di certi rami speciali delle matematiche superiori⁽¹²⁹⁾.

⁽¹²⁰⁾ Cfr. l'articolo di STÄCKEL su FR. SCHMIDT citato precedentemente nel testo.

⁽¹²¹⁾ 1^a ed., Paris, G. Villars, 1867; 2^a ed., 1883.

⁽¹²²⁾ *Giornale di Matematiche*, t. VII, p. 84-89; *Nouvelles Annales*, (2), t. IX p. 93-96.

⁽¹²³⁾ *Bull. des Sciences Math.*, t. I, p. 66-71, 324-28, 384-88 [1870]

⁽¹²⁴⁾ Oltre le versioni di cui si parla nel testo HOÜEL tradusse uno scritto di BATTAGLINI [cfr. la nota 124], due di BELTRAMI [cfr. nota 126; nota 142], uno di RIEMANN, [cfr. nota 137], uno di HELMHOLTZ [cfr. § 78].

⁽¹²⁵⁾ *Giornale di Mat.*, t. V, p. 217-31 [1867]. — Napoli, *Rend. Acc. Science Fis. e Matem.*, t. VI, p. 157-73 [1867]. — Trad. francese di HOÜEL: *Nouv. Annales*, (2), t. VII, p. 209-21, 265-77 [1868].

⁽¹²⁶⁾ Fu anche stampata a parte in un opuscolo col titolo: «*Pangeometria o sunto di geometria fondato sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele.*», Napoli 1867; 2^a ed., 1874.

⁽¹²⁷⁾ Fu tradotto in francese da HOÜEL negli *Annales Scient. de l'École Normale Sup.*, p. 251-88, t. VI, [1869].

⁽¹²⁸⁾ Cfr. la «*Commemorazione di E. Beltrami*» di L. CREMONA; *Giornale di Mat.*, t. XXXVIII, p. 362 [1900].

⁽¹²⁹⁾ Cfr., ad es., E. PICARD: «*La Science Moderne et son état actuel.*», p. 75 [Paris, Flammarion, 1905].

CAPITOLO V.

I successivi sviluppi della geometria non-euclidea.

§ 66. Per rendere conto degli ulteriori progressi della geometria non-euclidea, secondo gli indirizzi *metrico-differenziale* e *proiettivo*, dovremmo uscire dal campo elementare, per parlare di alcune elevate teorie matematiche, quali la *geometria metrico-differenziale sopra le varietà*, la teoria dei *gruppi continui di trasformazioni*, la *geometria proiettiva pura* [sistema STAUDT] e le *geometrie metriche* ad essa subordinate. Non essendo consentaneo all'indole di questo volume entrare, sia pure sommariamente, in questioni elevate, ci restringeremo alle sole cose necessarie per fare comprendere al lettore lo spirito che informa le nuove indagini e condurlo ad un altro sistema geometrico, dovuto a RIEMANN, che le precedenti ricerche escludevano fin dal principio coll'ammettere l'infinità della retta. Questo sistema è conosciuto sotto il nome del suo fondatore e corrisponde all'ipotesi dell'angolo ottuso di SACCHERI e LAMBERT⁽¹³⁰⁾.

Indirizzo Metrico-Differenziale.

LA GEOMETRIA SOPRA UNA SUPERFICIE.

§ 67. Per facilitare lo scopo conviene muovere dalle considerazioni seguenti.

Data una superficie, proponiamoci di vedere fino a che punto si possa fondare sopra di essa una geometria analoga a quella del piano.

Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna sulla superficie la minima distanza fra i due punti. Una tal linea è la *geodetica* congiungente i due punti dati. Se si tratta, per es., di una sfera, la geodetica, che congiunge due punti [non estremi di un diametro], è un arco del cerchio massimo ch'essi determinano.

Ora, volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria sul piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella, misuranti le distanze sopra la superficie, con le rette di questo ed anche di considerare come [*geodeticamente*] *eguali*, sopra una superficie, due figure tracciate su di essa che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

A questo concetto di uguaglianza si può pervenire in un modo intuitivo ammettendo che la superficie sia realizzata con un foglio *flessibile ed inestendibile* e che con un movimento della superficie, in cui essa non rimanga rigida, ma si fletta come è detto innanzi, le figure superficiali da noi chiamate uguali possano sovrapporsi l'una all'altra.

Prendiamo, come esempio, un pezzo di superficie cilindrica, che per semplice flessione senza estensione, duplicazione e rottura possa *applicarsi* sopra una regione piana. È chiaro che in questo caso dovranno chiamarsi uguali *sulla superficie* due figure che si distendano sopra figure piane uguali; ben inteso che due figure siffatte non sono generalmente uguali *nello spazio*.

Ritornando ad una superficie qualsiasi, il sistema di convenzioni innanzi accennato da origine ad una *geometria sopra la superficie*, che intendiamo sempre di considerare per regioni convenientemente limitate [*regioni normali*]. Due superficie applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria; così, per es., sopra una qualsiasi superficie cilindrica ed in genere sopra una qualsiasi superficie *svilupabile*, si avrà una geometria simile a quella d'una superficie piana.

⁽¹³⁰⁾ Chi desiderasse un largo sviluppo degli argomenti trattati in questo capitolo può consultare le «*Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie.*» di F. KLEIN [Gottinga, 1893] e le «*Lezioni sulla geometria differenziale.*» di L. BIANCHI, t. I, Cap. XI, XII, XIII, XIV, p. 326-513 [Pisa, Spoerri, 1903].

Un esempio di geometria sopra una superficie, essenzialmente diversa da quella del piano, ci è data dalla geometria della sfera, perchè è impossibile applicare una porzione di sfera sopra il piano. Tuttavia fra la geometria piana e quella sferica abbiamo però una notevole analogia: questa analogia trova il suo fondamento nel fatto che la sfera può muoversi liberamente su se stessa, precisamente come il piano; sicchè per le figure uguali sulla sfera valgono delle proposizioni in tutto analoghe ai postulati della congruenza sul piano.

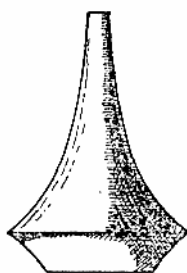
Cerchiamo di generalizzare questo esempio. Affinchè una superficie convenientemente limitata possa muoversi, con flessione senza estensione, su se stessa come la superficie piana, occorre che un certo numero $[K]$, invariante rispetto alle predette flessioni, abbia un *valore costante* in tutti i punti della superficie. Questo numero è stato introdotto da GAUSS col nome di *curvatura*⁽¹³¹⁾.

Si possono costruire effettivamente delle superficie a *curvatura costante*, distinguendo i tre casi possibili

$$K = 0, K > 0, K < 0.$$

Per $K = 0$ si hanno le superficie sviluppabili [applicabili sul piano]. Per $K > 0$ si hanno le superficie applicabili sopra una superficie sferica di raggio $\sqrt{\frac{1}{K}}$ e la sfera può riguardarsi come *modello* di esse.

Per la $K < 0$ si hanno le superficie applicabili sulla *pseudosfera*, la quale può assumersi come modello per le *superficie di curvatura costante negativa*.



Pseudosfera
Fig. 47.



Trattrice
Fig. 48.

La pseudosfera è una superficie di rotazione: l'equazione della curva meridiana [*trattrice*⁽¹³²⁾], riferita all'asse di rotazione z e ad una retta x perpendicolare a z e convenientemente scelta è:

$$(1) \quad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

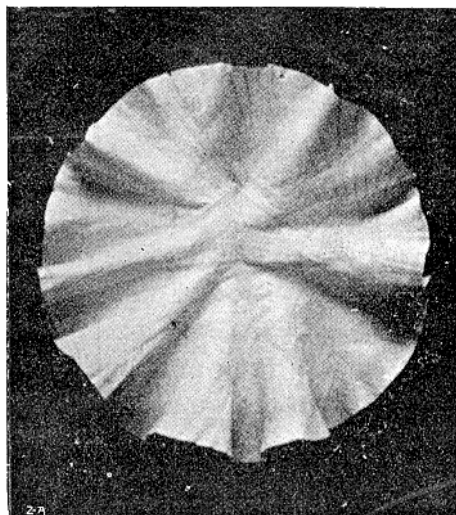
⁽¹³¹⁾ Rammentando che la curvatura d'una linea piana in un punto è l'inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto, ecco come può definirsi la curvatura in un punto M d'una superficie.

Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve ch'esso sega sulla superficie. Fra le curve [piane] di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature [sopra definite] godono delle proprietà di massimo o minimo. Il prodotto di tali curvatures da la curvatura della superficie nel punto M [GAUSS]. Alla curvatura di GAUSS compete poi uno spiccatissimo carattere: essa si mantiene invariata per ogni flessione senza estensione della superficie; talchè se due superficie sono applicabili, nel senso indicato nel testo, debbono, nei punti corrispondenti, avere la stessa curvatura [GAUSS]. Questo risultato, invertito dal MINDING nel caso delle superficie a curvatura costante, rende manifesto che le superficie liberamente mobili sopra se stesse sono caratterizzate dalla costanza della curvatura.

⁽¹³²⁾ La trattrice è quella curva il cui segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l'asintoto ha una lunghezza costante.

dove k è legato alla curvatura K dalla relazione:

$$K = - \frac{1}{k^2}$$



Superficie di curvatura costante negativa⁽¹³³⁾.

Fig. 49.

Sulla pseudosfera generata dalla (1) può adagiarsi qualunque porzione di superficie di curvatura costante $- 1/k^2$.

§ 68. Fra la geometria sopra una superficie di curvatura costante e quella d'una porzione di piano, prese l'una e l'altra con le opportune limitazioni, intercede una analogia, che possiamo mettere in evidenza *traducendo* le prime definizioni e proprietà dell'una in quelle dell'altra, com'è sommariamente indicato dalla contrapposizione di frasi che si osserva nel seguente quadro.

- | | |
|--|---|
| a) Superficie. | a) Regione di piano. |
| b) Punto. | b) Punto. |
| c) Geodetica. | c) Retta. |
| d) Arco di geodetica. | d) Segmento rettilineo. |
| e) Proprietà lineari della geodetica. | e) Postulati relativi all'ordinamento dei punti sulla retta. |
| f) Due punti determinano una geodetica. | f) Due punti determinano una retta. |
| g) Proprietà fondamentali dell'uguaglianza di archi geodetici e di angoli. | g) Postulati della congruenza segmentaria ed angolare. |
| h) Se due triangoli geodetici hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali. | k) Se due triangoli rettilinei hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali. |

Segue che si possono ritenere comuni alla geometria delle superficie in discorso tutte quelle proprietà pertinenti a regioni limitate di piano, che nell'assetto euclideo sono indipendenti dal postulato delle parallele e nella cui dimostrazione non si fa uso del *piano completo* [per es. dell'infinità della retta].

⁽¹³³⁾ La superficie, di cui la Fig. 49 è una riproduzione fotografica, fu costruita da BELTRAMI. Ora fa parte della collezione di modelli appartenente all'ISTITUTO MATEMATICO di Pavia.

Procediamo ora a confrontare, con le corrispondenti della superficie, quelle proposizioni relative alla regione piana, che sono in connessione con l'ipotesi euclidea. Si ha, per es., che sul piano la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti. La proprietà corrispondente non è generalmente vera sulla superficie.

Infatti GAUSS dimostrò che sopra una superficie a curvatura K , costante oppure variabile da punto a punto della superficie, l'integrale doppio

$$\int K.d\sigma,$$

esteso alla superficie di un triangolo geodetico ABC , è uguale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti⁽¹³⁴⁾. Cioè:

$$\int_{ABC} K.d\sigma = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Applichiamo questa formula alle superficie di curvatura costante, distinguendo i tre casi possibili.

1° caso: $K = 0$.

Allora avremo

$$\int_{ABC} K.d\sigma = 0, \text{ quindi: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$$

Sulle superficie a curvatura nulla la somma degli angoli d'un triangolo geodetico è uguale a due angoli retti. Questo risultato del resto ci era noto.

2° caso: $K = 1/k^2 > 0$.

Allora avremo

$$\int_{ABC} K.d\sigma = 1/k^2 \int_{ABC} d\sigma$$

Ma l'integrale: $\int d\sigma$, esteso al triangolo ABC , dà l'area Δ di quel triangolo, talchè:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Da questa relazione ricaviamo:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &> \pi. \\ \Delta &= k^2 (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi). \end{aligned}$$

Cioè:

a) *Sulle superficie a curvatura costante positiva la somma degli angoli di un triangolo geodetico è maggiore di due angoli retti.*

b) *L'area di un triangolo geodetico è proporzionale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.*

⁽¹³⁴⁾ Cfr., ad es., le citate «Lezioni sulla Geometria Differenziale» di L. BIANCHI, Cap. VI.

3° caso: $K = -1/k^2$

Allora avremo:

$$\int_{ABC} K d\sigma = - \frac{1}{k^2} \int_{ABC} d\sigma = - \frac{\Delta}{k^2},$$

dove, anche qui, con Δ abbiamo indicato l'area del triangolo ABC. Segue allora:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}),$$

dalla quale si ricavano le due relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &< \pi. \\ \Delta &= k^2 (\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}). \end{aligned}$$

Cioè

a) *Sulle superficie a curvatura costante negativa la somma dei tre angoli di un triangolo geodetico è minore di due angoli retti.*

b) *L' area d'un triangolo geodetico è proporzionale alla deficienza della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.*

Riassumiamo i risultati nella seguente tabella:

Superficie a curvatura costante.

Valore della curvatura	Modello della superficie	Carattere specifico
$K = 0$	piano	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$
$K = 1/k^2$	sfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$
$K = -1/k^2$	pseudosfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$

La geometria delle superficie di curvatura nulla e di curvatura costante positiva ci è nota, perchè corrisponde alla geometria piana euclidea ed alla geometria sferica.

Lo studio della geometria delle superficie a curvatura costante negativa fu iniziato da E. MINDING [1806-1885] con la ricerca delle forme di rotazione su cui esse possono applicarsi⁽¹³⁵⁾. La seguente osservazione di MINDING, sviluppata distesamente da D. CODAZZI [1824-1873], permette poi di assegnarne la trigonometria. *Se nelle formule trigonometriche della sfera si tengono fissi gli angoli e si moltiplicano i lati per $i = \sqrt{-1}$, si ottengono le relazioni a cui soddisfano gli elementi dei triangoli geodetici delle superficie di curvatura costante negativa⁽¹³⁶⁾.* Queste relazioni [trigonometria pseudosferica] evidentemente coincidono con quelle di TAURINUS, cioè con le formule della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI.

⁽¹³⁵⁾ «Wie sich entschneiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse.»; Crelle, t. XIX, p. 370-87 [1839].

⁽¹³⁶⁾ MINDING: «Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen.»; Crelle, t. XX, p. 323-27 [1840]. — D. CODAZZI: «Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura.»; Ann. di Scien. Mat. e Fis. t.VIII, p. 346-55 [1857].

§ 69. Dai precedenti §§ risulta che le proprietà relative alla somma degli angoli d'un triangolo, nella geometria delle superficie di curvatura costante, corrispondono rispettivamente:

- per $K = 0$, a quelle valide nel piano in forza dell'*ip. ang. retto*;
- per $K > 0$, a quelle che sussisterebbero nel piano in forza dell'*ip. ang. ottuso*;
- per $K < 0$, a quelle valide nel piano, in forza dell'*ip. angolo acuto*.

Il primo di questi risultati è evidente a priori, perchè si tratta di superficie sviluppabili.

L'analogia fra la geometria sulle superficie di curvatura costante negativa, ad es., e la geometria di LOBACEFSKI- BOLYAI si potrebbe rendere ancor più manifesta ponendo a riscontro le relazioni fra gli elementi dei triangoli geodetici tracciati su quelle superficie con le formule della trigonometria non-euclidea. Un tale riscontro fu fatto da E. BELTRAMI nel suo «*Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*⁽¹³⁷⁾».

Risulta così che la geometria sopra una superficie a curvatura costante positiva o negativa si può considerare come una *interpretazione concreta della geometria non-euclidea che si ottiene in una regione limitata di piano adottando l'ip. ang. ottuso o quella dell'ang. acuto*.

La possibilità di interpretare la geometria delle varietà a due dimensioni mediante quella delle superficie ordinarie era nota a B. RIEMANN [1826-1866] fino dal 1854, anno in cui egli compose la celebre dissertazione: «*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*⁽¹³⁸⁾», che sta a fondamento dell'indirizzo metrico differenziale.

L'interpretazione di BELTRAMI si presenta come caso particolare di quella di RIEMANN. La quale, per le proprietà delle superficie di curvatura costante, ci mostra chiaramente come il seguito delle deduzioni ricavato dalle tre ipotesi sulla somma degli angoli di un triangolo debba condurre a dei sistemi geometrici logicamente coerenti.

Questa conclusione, per quanto riguarda l'*ip. ang. ottuso*, sembra contraddire i teoremi di SACCHERI, LAMBERT, LEGENDRE, che escludono fin dal principio la possibilità d'una geometria fondata su detta ipotesi. La contraddizione si elimina però facilmente riflettendo che nella dimostrazione di quei teoremi si utilizzarono non solo le proprietà fondamentali pertinenti ad una regione limitata di piano, ma anche proprietà del piano completo, ad. es. l'infinità della retta.

FONDAMENTI D'UNA GEOMETRIA PIANA SECONDO LE IDEE DI RIEMANN.

§ 70. Le precedenti osservazioni ci guidano a porre i fondamenti d'una geometria metrica, prescindendo dal postulato di EUCLIDE e adottando un punto di vista più generale di quello innanzi tenuto.

⁽¹³⁷⁾ Giorn. di Matem., t. VI, p. 284-312 [1868]. — Opere Mat., t. 1, p. 374-405 [Hoepli, 1902].

⁽¹³⁸⁾ «*Opere di Riemann*», 1^a ed. [1876], p. 254-96; 2^a ed. [1892], p. 272-87. Fu letta da RIEMANN nel 1854, per la sua abilitazione presso la Facoltà filosofica di Göttinga, davanti ad un pubblico composto non di soli matematici. Perciò non contiene sviluppi analitici ed i concetti ivi esposti hanno veste prevalentemente intuitiva. Qualche schiarimento analitico si trova nelle note della Memoria inviata da RIEMANN in risposta ad una questione messa a concorso dall'Istituto di Parigi [*Op. Riemann*, 1^a ed. p. 384-91].

Il fondamento filosofico della «*Dissertazione*» è lo studio delle proprietà delle cose *dal loro modo di comportarsi nell'infinitesimo*. Cfr. il discorso di KLEIN: «*Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna*», tradotto da E. PASCAL negli Annali di Mat., (2), t. XXIII [p. 222].

La «*Dissertazione*» fu pubblicata soltanto nel 1867 [Gött. Abh., XIII], dopo la morte dell'A., per cura di R. DEDEKIND, poi tradotta in francese da J. HOÜEL [Annali di Mat., (2), t. III, 1870; Oeuvres Math. de Riemann, 1876], in inglese da W. CLIFFORD [Nature, t. VIII, 1873] e da G. B. HALSTED [Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji, t. VII, 1895], in polacco da DICKSTEIN [Comm. Acad. Litt. Cracoviensis, t. IX, 1877], in russo da D. SINSTOFF [Notizie della Società fisico-matematica della R. Università di Kasan, (2), t. III, Appendice, 1893].

a) Ammettiamo di partire da una regione limitata di piano [regione normale], non dell'intero piano;

b) concediamo come postulati quelle proposizioni elementari, rivelateci dai sensi, nella regione inizialmente presa; proposizioni relative alla determinabilità della retta, alla congruenza etc.;

c) ammettiamo che le proprietà della regione iniziale si possano estendere all'intorno di un punto qualunque del piano [non diciamo al piano completo abbracciato con un solo sguardo].

La geometria sviluppata in base a questi principi sarà la più generale geometria piana, conciliabile coi dati che esprimono il risultato delle nostre esperienze prese in un senso rigoroso, ma limitatamente ad un campo accessibile.

In base a quanto si disse nel § 69 è chiaro che la detta geometria troverà una concreta interpretazione in quella delle superficie a curvatura costante.

Ma tale corrispondenza sussiste soltanto dal punto di vista [differenziale] secondo cui si confrontano delle regioni limitate. Se ci si pone invece dal punto di vista [integrale] secondo cui si confrontano la geometria dell'intero piano e la geometria sopra la superficie, il riscontro non sussiste più. Già infatti, sotto questo aspetto, non può dirsi nemmeno che sopra due superficie con una medesima curvatura costante valga la medesima geometria. Per es., il cilindro circolare ha una curvatura nulla ed una regione di esso può svilupparsi sopra una regione di piano, ma l'intero cilindro non è applicabile in tal modo sopra l'intero piano. La geometria integrale sul cilindro differisce perciò da quella dell'intero piano euclideo. Infatti, vi sono sul cilindro delle geodetiche chiuse [sezioni circolari] e generalmente due geodetiche di esso [eliche] s'incontrano in un numero infinito di punti, anziché in due.

Differenze analoghe intercederanno in generale fra una delle geometrie metriche non-euclidee che potrebbe fondarsi sulla base dei postulati sopra enunciati e la geometria d'una corrispondente superficie a curvatura costante.

Quando tentiamo di abbracciare in senso integrale la geometria sopra una superficie a curvatura costante [p. es. sulla sfera o sulla pseudosfera] vediamo in generale che la proprietà fondamentale di una regione normale, relativa alla determinazione della geodetica passante per due punti, cessa di valere. Questo fatto non è però una conseguenza necessaria delle ipotesi su cui si basa, nel senso anzidetto, una metrica non-euclidea generale del piano. Infatti, quando si domandi se è logicamente possibile un sistema di geometria piana soddisfacente alle condizioni a) b) c) e tale che i postulati della congruenza e quello di determinazione della retta valgano nel piano completo, si ottengono, oltre l'ordinario sistema euclideo, i due sistemi geometrici seguenti:

1°) Il sistema di LOBACEFSKI- BOLYAI, già innanzi incontrato, in cui per un punto passano due parallele ad una retta.

2°) Un nuovo sistema [detto di RIEMANN], che corrisponde all'*ip. ang. ottuso* di SACCHERI, in cui non esistono parallele.

In quest'ultimo sistema la retta è una *linea chiusa*, di lunghezza finita: si evita perciò la contraddizione cui si andrebbe incontro supponendo la retta aperta [infinita], ipotesi di cui si fa uso per stabilire il teorema dell'angolo esterno di EUCLIDE ed alcuni risultati di SACCHERI.

§ 71. Il primo a notare l'esistenza di un sistema geometrico compatibile con l'*ip. ang. ottuso* fu RIEMANN, perchè egli fu il primo a sostituire l'ipotesi della retta infinita, con l'altra più generale della *retta illimitata*. La distinzione che qui si presenta tra infinito ed illimitato è di fondamentale importanza. Riportiamo, a tale proposito, le parole di RIEMANN. «Quando si estendono le costruzioni dello spazio all'infinitamente grande bisogna fare distinzione fra l'illimitato e l'infinito: il primo appartiene ai rapporti d'estensione, il secondo ai rapporti metrici. Che lo spazio sia una varietà illimitata a tre dimensioni è una ipotesi che si applica in tutte le concezioni relative al mondo esterno, che ci serve per completare in ogni momento il campo delle nostre percezioni effettive ed a costruire i luoghi possibili degli oggetti cercati e che si trova costantemente verificata in tutte queste applicazioni. La proprietà dello spazio di essere illimitato possiede dunque una certezza empirica che

nessun altro dato empirico possiede. Ma l'infinità dello spazio non ne segue in alcun modo; al contrario, se si suppongono i corpi indipendenti dalla loro posizione e si attribuisce allo spazio una curvatura costante, lo spazio sarebbe necessariamente finito non appena questa misura della curvatura avesse un valore positivo, comunque piccolo⁽¹³⁹⁾.».

Concludendo, il postulato che attribuisce alla retta una lunghezza infinita, sott'inteso nelle ricerche dei precedenti geometri, non è per RIEMANN meno discutibile di quello delle parallele: ciò che RIEMANN ritiene indiscutibile è l'illimitazione dello spazio, proprietà compatibile tanto con l'ipotesi della retta infinita [aperta], quanto con quella della retta finita [chiusa].

La possibilità logica del sistema di RIEMANN si può desumere dall'interpretazione concreta ch'esso riceve mediante *la geometria della stella di rette*. Le proprietà della stella di rette si traducono facilmente in quelle del piano di RIEMANN e viceversa, con il sussidio del seguente *dizionario*:

Stella	Piano
retta	punto
piano [fascio]	retta
angolo di due rette	segmento
angolo diedro	angolo
triedro	triangolo
.....

Ecco, per es., la traduzione di alcune fra le più notevoli proposizioni della stella:

a) La somma dei tre diedri di un triedro è maggiore di due diedri retti.

b) Tutti i piani perpendicolari ad un altro piano passano per una retta.

c) Se ad ogni retta del piano facciamo corrispondere il punto in cui s'intersecano le rette perpendicolari alla retta data, si ottiene una corrispondenza fra rette e punti, che gode della seguente proprietà: i punti corrispondenti alle rette d'un fascio appartengono ad una retta, la quale, alla sua volta, ha per punto corrispondente il centro del fascio.

La corrispondenza così definita prende il nome di *polarità assoluta* [ortogonale] della stella.

a) La somma dei tre angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti.

b) Tutte le rette perpendicolari ad un'altra retta passano per un punto.

c) Se ad ogni piano della stella facciamo corrispondere la retta in cui s'intersecano i piani perpendicolari al piano dato si ottiene una corrispondenza fra piani e rette, che gode della seguente proprietà: le rette corrispondenti ai piani di un fascio appartengono ad un piano, il quale, alla sua volta, ha per retta corrispondente l'asse del fascio.

La corrispondenza così definita prende il nome di *polarità assoluta* del piano.

§ 72. Una notevole osservazione intorno all'*ip. ang. ottuso* fu fatta recentemente da DEHN.

Riferendoci ai ragionamenti di SACCHERI [§ 15], LAMBERT [§ 19], LEGENDRE [§ 27], si scorge facilmente che questi autori, per dimostrare la falsità dell'*ip. ang. ottuso*, si giovarono non solo dell'ipotesi della retta infinita, ma anche dell'*ipotesi archimedeae*. Ora ci possiamo chiedere se quest'ultima sia realmente necessaria per stabilire il risultato. In altre parole possiamo chiederci se, escludendo il *postulato di Archimede*, le due ipotesi che attribuiscono l'una alla retta i caratteri delle linee aperte, l'altra alla somma degli angoli di un triangolo un valore maggiore di 180° siano compatibili fra loro. A una tale domanda rispose DEHN, con la memoria citata a § 14 [nota 30], costruendo una geometria *non-archimedeae*, in cui la retta è aperta ed i triangoli verificano la 2^a ipotesi saccheriana. Sicchè, la seconda delle tre ipotesi di SACCHERI è compatibile con l'ipotesi della retta aperta,

⁽¹³⁹⁾ Cfr. la «Dissertazione» di RIEMANN, parte III, § 2.

nel seno d'un sistema *non-archimedeo*. La nuova geometria fu chiamata da DEHN «*Nicht-Legendre'sche Geometrie*».

§ 73. Sebbene, come abbiamo detto, la geometria di una superficie a curvatura costante [positiva o negativa] non rispecchi in generale la intera geometria non-euclidea del piano di LOBACEFSKI e di RIEMANN si può domandare se un tale riscontro possa aver luogo per una qualche superficie particolare.

A questa domanda si risponde così

1°) *Non esiste alcuna superficie regolare⁽¹⁴⁰⁾, analitica, su cui valga nella sua integrità la geometria di Lobacefski-Bolyai* [Teorema di HILBERT⁽¹⁴¹⁾].

2°) *Una superficie su cui valesse nella sua integrità la geometria del piano di Riemann dovrebbe essere necessariamente chiusa.*

La sola superficie regolare, analitica, chiusa a curvatura costante positiva è la sfera [Teorema di LIEBMANN⁽¹⁴²⁾]. Ma sulla sfera, nelle cui regioni normali è valida la geometria di RIEMANN, due rette s'incontrano sempre in due punti [opposti]. Concluderemo pertanto:

Nello spazio ordinario non esistono superficie che verifichino integralmente tutte le proprietà dei piani non-euclidei.

§. 74. A questo punto conviene osservare che la sfera, fra tutte le superficie di curvatura costante non nulla, è dotata d'un carattere che l'avvicina più delle altre al piano. Infatti la sfera può muoversi su stessa allo stesso modo del piano, di guisa che le proprietà della congruenza valgono non solo per regioni normali ma, come sul piano, per l'intera superficie sferica abbracciata d'uno sguardo.

Questo fatto ci suggerisce un modo di enunciare i postulati della geometria, che non escluda a priori la possibile esistenza di un piano con tutti i caratteri della sfera, compreso quello dei punti opposti. Si potrebbe infatti richiedere che sul piano fossero validi:

1°) i postulati *b), c)* [cfr. § 70], in ogni regione normale;

2°) i postulati della congruenza sull'intero piano.

Si troverebbero allora i sistemi geometrici di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN [tipo ellittico], precedentemente incontrati, in cui due rette hanno solo un punto comune; un altro sistema riemanniano [tipo sferico], in cui due rette hanno sempre in comune due punti.

⁽¹⁴⁰⁾ Cioè priva di singolarità.

⁽¹⁴¹⁾ «*Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung.*», Transactions of the American Math. Society, t. II, p. 86-99 [1901]; «*Grundlagen der Geometrie.*», 2^a ediz., p. 162-75 [Leipzig, Teubner, 1903].

La questione risolta col teorema di HILBERT si affacciò ai geometri in seguito all'interpretazione di BELTRAMI della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI. — HELMHOLTZ, fin dal 1870, nel suo articolo «*Les axiomes de la géométrie.*» [Revue des cours scientif., t. VII, p. 499] aveva affermato l'impossibilità di costruire una superficie pseudosferica, estesa indefinitamente in ogni direzione, e A. GENOCCHI, nella «*Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques.*» [Belgique Bull., (2), t. XXXVI, p. 181-98, 1873] e più distesamente nello scritto: «*Sur un Mémoire de D. Fonce-nex et sur les géométries non-euclidiennes.*» [Torino, Memorie, (3), t. XXIX, 365-404, 1877], dopo aver rilevato l'insufficienza di certi ragionamenti intuitivi, diretti a provare l'esistenza concreta d'una superficie atta a rappresentare l'intero piano non-euclideo, insiste sulla probabile esistenza di punti singolari, [come, ad es., quelli situati sulla linea di regresso della fig. 47], in ogni modello concreto di superficie a curvatura costante negativa.

Sul teorema di HILBERT aggiungiamo che il carattere analitico della superficie, ammesso dall'autore, fu dimostrato superfluo. Vedi in proposito la dissertazione di G. LÜTKEMEYER: «*Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differential-gleichungen.*», [Göttingen 1902] e la nota di E. HOLMGREN: «*Sur les surfaces à courbure constante négative.*», Comptes Rendus, I^o sem. 1902, p. 840-43.

⁽¹⁴²⁾ «*Eine neue Eigenschaft der Kugel.*», Gött. Nachrichten, 1899, p. 44-54. — A p. 172-75 dei «*Grundlagen der Geometrie.*» di HILBERT è pure dimostrata questa proprietà. Notiamo che le superficie di curvatura costante positiva sono necessariamente analitiche. Vedi in proposito la citata dissertazione di LÜTKEMEYER, [nota 140] e la memoria di HOLMGREN: «*Über eine Klasse von partielle Differentialgleichungen der Zweiten Ordnung.*», Math. Ann., t. LVII, p. 407-20 [1903].

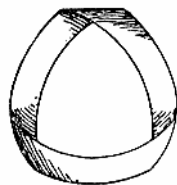
§. 75. Come RIEMANN abbia concepito il suo piano completo, se abbia cioè pensato al *piano-ellittico* o al *piano-sfera*, od abbia riconosciuto la possibilità di entrambi, non si può precisare, perchè egli, nella sua memoria, fa della geometria differenziale e dedica soltanto poche parole alle forme complete. Però i continuatori del suo indirizzo, fra cui BELTRAMI, considerando costantemente la geometria riemanniana accanto alla sferica, furono tratti a supporre che sul piano completo di RIEMANN, come sulla sfera [per l'esistenza dei punti opposti], il postulato di determinazione della retta presentasse delle eccezioni⁽¹⁴³⁾ e che l'unica forma compatibile con l'*ip. ang. ottuso* fosse il *piano-sfera*.

Le proprietà essenziali del *piano-ellittico* furono date da A. CAYLEY [1821-1895] nel 1859, ma la relazione fra queste proprietà e la geometria non euclidea fu additata da KLEIN solo nel 1871. A KLEIN si deve pure la netta distinzione fra le due geometrie riemanniane e la rappresentazione di quella ellittica con la geometria della stella [cfr. § 71]

Per comprendere in che consista la differenza fra la geometria sferica e la ellittica fissiamo l'attenzione su due tipi di superficie che si presentano nello spazio ordinario, cioè sulle superficie a due faccie [*bilatere*] e sulle superficie ad una sola faccia [*unilatera*].

Esempi di superficie bilatere sono il piano ordinario, le superficie del 2° ordine [coniche, cilindriche, sferiche] ed in generale tutte quelle che racchiudono solidi. Su queste è possibile distinguere due faccie.

Un esempio di superficie unilatera ci è dato dal *foglio di Moebius* [*Moebius'sche Blatte*], il quale si costruisce facilmente così. Tagliata una striscia rettangolare ABCD, invece di congiungere i lati opposti AB, CD in modo da ottenere una superficie cilindrica, si congiungano gli stessi lati dopo che uno di essi, ad es. CD, ha ruotato di 180° intorno al suo punto di mezzo. Allora, quella ch'era la faccia superiore del rettangolo, in prossimità di CD, viene a trovarsi proseguita dalla faccia inferiore del rettangolo primitivo, sicchè *sul foglio di Moebius la distinzione delle due faccie diventa impossibile*.



Foglio di Moebius

Fig. 50

Volendo distinguere le superficie unilatera dalle bilatere mediante un carattere che dipenda solo dalle proprietà intrinseche delle superficie si procede così. Fissato un punto della superficie ed un verso di rotazione intorno ad esso, si faccia percorrere al punto un cammino chiuso sulla superficie che non ne attraversi l'eventuale contorno: per le superficie bilatere, allorchè il punto ritorna nella posizione iniziale, il verso iniziale della rotazione coincide col verso finale; per le superficie unilatera [come facilmente si verifica sul foglio di MOEBIUS, percorrendo la linea mediana della superficie] esistono dei cammini chiusi per cui il verso finale della rotazione è l'inverso dell'iniziale.

Ritornando ai due piani di RIEMANN si può ora facilmente spiegare in che consista la loro sostanziale differenza: *il piano-sfera è dotato dei caratteri delle superficie bilatere, il piano ellittico di quelli delle superficie unilatera*.

La proprietà del piano ellittico ora enunciata trova poi, come tutte le altre, una interpretazione concreta nella stella di rette.

⁽¹⁴³⁾ Cfr., ad es., il breve cenno sulla geometria degli spazi di curvatura costante positiva, con cui BELTRAMI chiude la sua memoria «*Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*» [Annali di Matem., (2), t. II, p. 354-5, 1868]. Questa memoria, che dovremo richiamare nel seguito, fu tradotta in francese da HOÜEL nel t. VI, p. 347-77, degli Annales scien. de l'École Normale supérieure.

Infatti, un ribaltamento d'una retta su se stessa, intorno al centro della stella, scambia fra loro le due rotazioni che hanno per asse quella retta.

Un'altra proprietà del piano ellittico, legata alla precedente, è questa: *Il piano ellittico, contrariamente a ciò che accade per l'euclideo e gli altri non euclidei, non viene spezzato in due falde dalle sue rette.* Ciò può esprimersi ancora dicendo che dati su esso due punti A, A' ed una retta arbitraria si può passare da A ad A' per un cammino che non esca dal piano nè attraversi la retta.

Questo fatto si traduce in una chiara proprietà della stella, che è superfluo richiamare.

§ 76. Analoga all'interpretazione del piano ellittico è quella che può darsi del piano-sfera mediante la *stella di raggi* [*semirette*]. La traduzione delle proprietà di questo piano nella proprietà della stella di raggi si effettua con l'uso di un *dizionario*, simile a quello del § 71, in cui la parola *punto* si trova contrapposta alla parola *raggio*.

La considerazione della stella di raggi a fianco della stella di rette si presta assai bene per rischiarare i legami e spiegare le differenze che intercedono fra le due geometrie riemanniane.

Noi possiamo considerare due stelle, l'una di rette e l'altra di raggi, col medesimo centro. È chiaro che ad ogni retta della prima corrispondono due raggi della seconda, che ogni figura della prima è formata con due figure *simmetriche* della seconda e che, sotto certe restrizioni, le proprietà metriche delle due forme sono le stesse. Cosicché se si conviene di riguardare i due raggi opposti della stella di raggi come formanti un solo elemento, la stella di raggi s'identifica con la stella di rette.

Le stesse considerazioni si applicano ai due piani di RIEMANN. Ad ogni punto del piano ellittico ne corrispondono due distinti e opposti del piano-sfera, a due rette del primo che passano per quel punto, due rette del secondo che hanno due punti in comune, etc....

Il piano ellittico, a fianco del piano-sfera, deve adunque concepirsi come un *piano doppio*.

A proposito del piano ellittico e del piano sfera conviene osservare che le formule della trigonometria assoluta, indicate al § 56, possono ad essi applicarsi in ogni loro regione convenientemente limitata. Ciò risulta dal fatto, già notato al § 58, che le formule della trigonometria assoluta sono valide sulla sfera, la cui geometria, per quanto riguarda le regioni normali, coincide con quella de' due piani in discorso.

FONDAMENTI D'UNA GEOMETRIA SPAZIALE SECONDO RIEMANN.

§ 77. Rivolgendoci ora allo spazio, partiamo dal fondamento filosofico che i postulati, sebbene ad essi si accordi per ipotesi un valore rigoroso, esprimono delle verità d'indole sperimentale, verificabili solo in una regione limitata e ammettiamo che, in base ai detti postulati, i punti dello spazio siano rappresentati da tre coordinate x_1, x_2, x_3 .

In tale rappresentazione [analitica] ad ogni linea verranno a corrispondere tre equazioni parametriche:

$$x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), x_3 = f_3(t),$$

ed allora potremo proporci di determinare una funzione s , del parametro t , che esprima la *lunghezza* d'un arco di curva.

Stante la *proprietà distributiva*, per la, quale la lunghezza d'un arco è uguale alla somma delle lunghezze delle parti in cui può immaginarsi diviso, una tale funzione sarà pienamente determinata quando si conosca la *distanza elementare* [ds] di due punti infinitamente vicini, di coordinate:

$$x_1, x_2, x_3, \\ x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3.$$

RIEMANN parte da ipotesi assai generali, che vengono soddisfatte, nel modo più semplice, assumendo come espressione del quadrato della distanza elementare [ds^2] una forma quadratica, sempre positiva, nei differenziali delle variabili:

$$ds^2 = \sum a_{ij}, dx_i, dx_j,$$

nella quale le a_{ij} sono funzioni di x_1, x_2, x_3 .

Ammettendo ora il principio della sovrapposibilità delle figure, si dimostra che le funzioni a_{ij} debbono essere di tale natura da permettere, in seguito ad un opportuno mutamento del sistema di coordinate, che il ds^2 assuma la forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{K}{4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

nella quale la costante K è ciò che RIEMANN, per estensione del concetto gaussiano, denomina convenzionalmente *curvatura dello spazio*.

A seconda poi che K è maggiore, uguale, minore di zero abbiamo lo spazio a curvatura costante positiva, lo spazio a curvatura nulla, lo spazio a curvatura costante negativa.

Facciamo un passo ulteriore ammettendo di estendere allo spazio completo il principio di sovrapposibilità [movimenti] e il postulato per cui la retta è determinata, senza eccezione, da due punti: si trovano allora tre forme spaziali, cioè tre geometrie logicamente possibili e conciliabili coi dati da cui siamo partiti.

La prima di tali geometrie, rispondente alla curvatura positiva, è caratterizzata dal fatto che in ogni piano vale il sistema di RIEMANN, per la qual cosa lo spazio a curvatura positiva sarà illimitato e finito in tutte le direzioni; la seconda, rispondente alla curvatura nulla, è l'ordinaria geometria d'EUCLIDE; la terza infine, che risponde al valore negativo della curvatura, da luogo in ogni piano al sistema di LOBACEFSKI-BOLYAI.

L'OPERA DI H. HELMHOLTZ E LE RICERCHE DI S. LIE.

§ 78. Anche HERMANN HELMHOLTZ [1821-1894], in alcuni suoi scritti d'indole matematica e filosofica⁽¹⁴⁴⁾, ha trattato la questione relativa ai fondamenti della Geometria. Invece di assumere a priori la forma

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j,$$

⁽¹⁴⁴⁾ «*Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.*»; Heidelberg, Verhandl. d. natur.-med. Vereins, t. IV. p. 197-202 [1868]; t. V, p. 31-32 [1869]. - Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, p. 610-17 [Leipzig, 1883] — Fu tradotto in francese da J. HOÜEL e pubblicato nei Mémoires de la Société des Sciences Phy. et Nat. de Bordeaux [t. V, 1868] ed anche insieme agli «*Études géométriques*» di LOBACEFSKI ed alla *Correspondance de Gauss et de Schumacher.*» [Paris, Hermann, 1895].

«*Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.*»; Götting. Nachr., t. XV 193-221 [1868] — Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, p. 618-39.

«*The Axioms of Geometry.*»; The Academy, t. I p. 123-81 [1870]. — Revue des cours scientifiques, t. VII, p. 498-501 [1870].

«*Ueber die Axiome der Geometrie*»; Populäre wissenschaftliche Vorträge. 3. Heft. p. 21-54. [Braunschweig, 1876]. — Trad. inglese: Mind, t. I, p. 301-21. — Trad. francese: Revue scient. de la France et de l'Etranger, (2) t. XII, p. 1197-1207 [1877].

«*Ueber den Ursprung und Sinn Bedeutung der geometrischen Sätze.*»; Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II. p. 640-60. — Trad. inglese: Mind, t. II, p. 212-24 [1878].

come espressione della distanza elementare, egli ha fatto vedere che questa espressione, nella forma datale da RIEMANN per gli spazi di curvatura costante, è la sola possibile, quando alle ipotesi di RIEMANN si aggiunga, fin da principio, quella riguardante la sovrapposibilità delle figure, in modo conforme al movimento dei *corpi rigidi*. Il problema di RIEMANN-HELMHOLTZ è stato sottoposto ad una profonda critica da S. LIE [1842-1899]. Il quale è partito dall'idea fondamentale, ravvisata da KLEIN nelle ricerche di HELMHOLTZ, che *essere due figure congruenti significa potersi trasformare l'una nell'altra mediante una certa trasformazione puntuale dello spazio e che le proprietà per cui la congruenza assume l'aspetto logico di uguaglianza sono inerenti al fatto che i movimenti formano un gruppo di trasformazioni*⁽¹⁴⁵⁾.

Pertanto il problema di RIEMANN - HELMHOLTZ venne messo dal LIE sotto la forma seguente:

Determinare tutti i gruppi continui dello spazio che, entro una regione limitata, godono delle proprietà dei movimenti.

Postulate convenientemente tali proprietà, in relazione al concetto di *libera mobilità* degli elementi lineari e superficiali uscenti da un punto, si trovano *tre tipi di gruppi*, i quali caratterizzano le tre geometrie di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN⁽¹⁴⁶⁾.

Indirizzo proiettivo

SUBORDINAZIONE DELLA GEOMETRIA METRICA ALLA PROIETTIVA.

§. 79. Finalmente anche la *geometria proiettiva* sta in un'elegante relazione coi tre sistemi geometrici di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN.

Per dare un'idea anche di quest'ultimo modo di trattare il problema rammentiamo che la geometria proiettiva, secondo il sistema di G. C. STAUDT [1798-1867], riposa esclusivamente sopra le *nozione grafiche* relative ai punti, alle rette, ai piani e bandisce sistematicamente ogni concetto di *congruenza e di movimento* [quindi di *misura* etc.]. Per la qual cosa la geometria proiettiva, prescindendo da un certo gruppo di postulati, comprenderà un numero più ristretto di proprietà generali, le quali, per quanto concerne le figure piane, sono le proprietà [*proiettive*] che restano invariate per proiezioni e sezioni.

Non di meno, fondata nello spazio la geometria proiettiva, *possono introdursi nell'organismo di essa i concetti metrici, come relazioni delle figure con certi enti [metrici] particolari.*

Restringendoci al caso del piano euclideo vediamo di quale interpretazione *grafica* siano suscettibili *i concetti metrici fondamentali di parallelismo e di ortogonalità.*

Giova, a tale scopo, considerare in modo speciale *la retta all'infinito* del piano e *l'involuzione assoluta* che su di essa determinano le coppie di raggi ortogonali di un fascio. I punti doppi di tale involuzione, immaginari coniugati, vengono denominati *punti ciclici*, per la loro proprietà di appartenere a tutti i cerchi del piano [PONCELET, 1822⁽¹⁴⁷⁾].

Ciò posto, il *parallelismo* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà che esse hanno di concorrere in un punto della retta all'infinito; l'ortogonalità* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà dei loro punti all'infinito, di essere coniugati nella involuzione assoluta, cioè di separare armonicamente i punti ciclici* [CHASLES, 1850⁽¹⁴⁸⁾].

Altre proprietà metriche, che possono esprimersi graficamente, sono quelle inerenti alle grandezze angolari, imperocchè ogni relazione:

⁽¹⁴⁵⁾ Cfr. KLEIN: «*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.*», [Erlangen, 1782] — Trad. italiana di G. FANO. *Annali di Matem.*, (2), t. XVII, p. 301-43 [1899].

⁽¹⁴⁶⁾ Cfr. LIE: «*Theorie der Transformationsgruppen.*», t. III, p. 437-543. [Leipzig, Teubner 1893]. — Nello stesso ordine di idee, H. POINCARÉ, nel suo scritto «*Sur les hypothèses fondamentaux de la Géométrie.*» [Bull. de la Société Math. de France, t. XV, p. 203-16, 1887], risolveva il problema di assegnare *tutte le ipotesi* che caratterizzano, fra i vari gruppi di trasformazioni, il gruppo fondamentale della geometria piana euclidea.

⁽¹⁴⁷⁾ «*Traité des propriétés projectives des figures.*», 2^a ed., t. I, n.° 94, p. 48 [Paris, G. Villars, 1865].

⁽¹⁴⁸⁾ «*Traité de Géométrie supérieure.* », 2^a ed., n° 660, p. 425 [Paris, G. Villars, 1880].

$$F(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \dots) = 0,$$

fra gli angoli A, B, C, \dots , può sostituirsi con l'altra:

$$F\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i}, \dots\right) = 0,$$

in cui a, b, c, \dots sono i *birapporti* formati dai lati degli angoli con le rette [immaginarie] che dal loro vertice proiettano i punti ciclici [LAGUERRE, 1853⁽¹⁴⁹⁾].

Più in generale si dimostra che la congruenza tra due figure piane qualunque può esprimersi con una relazione grafica di esse colla retta all'infinito e l'involuzione assoluta⁽¹⁵⁰⁾ e poichè la congruenza è il fondamento di tutte le proprietà metriche, segue che la retta all'infinito e l'involuzione assoluta permettono di subordinare alla geometria proiettiva tutte le proprietà della geometria metrica euclidea. *Le proprietà metriche compariscono dunque nella geometria proiettiva non come proprietà grafiche delle figure considerate in sè stesse, ma come proprietà grafiche in relazione agli enti metrici fondamentali, costituiti dalla retta all'infinito e dalla involuzione assoluta.*

L'insieme degli enti metrici fondamentali si denomina brevemente *assoluto del piano* [CAYLEY].

Quanto abbiamo detto per il piano si estende naturalmente allo spazio. Nello spazio gli enti metrici fondamentali, che permettono di subordinare le proprietà metriche alle grafiche, sono *il piano all'infinito ed una certa polarità [polarità assoluta]* su questo piano, segata dalla polarità della stella che ad ogni retta fa corrispondere il piano ortogonale [cfr. § 71]. La conica fondamentale di detta polarità è *immaginaria*, perchè nella stella non esistono rette reali che giacciono sul rispettivo piano perpendicolare. Si vede poi facilmente ch'essa contiene tutte le coppie di punti ciclici appartenenti ai vari piani dello spazio e che perciò risulta comune a tutte le sfere. Da ciò la denominazione di *cerchio ciclico* per l'ente metrico fondamentale dello spazio.

§ 80. Sorgono ora spontanee le due domande seguenti.

1.° *Nelle ipotesi non-euclidee è possibile la fondazione della geometria proiettiva?*

2.° *Data la possibilità di tale fondazione, le proprietà metriche potranno, come nel caso euclideo, subordinarsi alle proiettive?*

La risposta è affermativa per entrambe. Se nello spazio è valido il sistema di RIEMANN la fondazione della geometria proiettiva non offre difficoltà alcuna, pel fatto che si trovano senz'altro verificate le proprietà grafiche che stanno a base dell'ordinaria proiettiva dopo l'introduzione degli *enti impropri*. Se nello spazio è valido il sistema di LOBACHEFSKI-BOLYAI si può ancora fondare la geometria proiettiva introducendo, con opportune convenzioni, dei *punti, rette e piani impropri o ideali*, per mezzo dello stesso criterio che ordinariamente si segue nel caso euclideo per completare lo spazio con gli elementi all'infinito. Basterebbe, per ciò, considerare, accanto alla *stella propria* [insieme delle rette passanti per un punto], due *stelle improprie*, formate l'una da tutte le rette parallele in uno stesso senso ad una retta data, l'altra da tutte le perpendicolari ad un piano dato, ed introdurre dei *punti impropri* da riguardarsi come *centri* di queste stelle.

Senonchè i punti impropri appartenenti ad un piano non possono, in questo caso, come nell'euclideo, assegnarsi ad una retta [*retta all'infinito*]: essi costituiscono una intera regione, separata dalla regione dei punti effettivi [punti *propri*] da una conica [*conica limite o all'infinito*]. Questa conica è il luogo dei punti *impropri* determinati dai fasci di rette parallele.

⁽¹⁴⁹⁾ «*Sur la theorie des foyers.*», Nouv. Ann., t. XII, p. 57 — Oeuvres de LAGUERRE, t. II, p. 12-3, [Paris, G. Villars, 1902].

⁽¹⁵⁰⁾ Vedi, ad es., le «*Lezioni di Geometria proiettiva.*» di F. ENRIQUES, p. 177-88. [Bologna, Zanichelli, 2^a ed., 1904].

Nello spazio poi i punti *impropri* sono separati dai punti propri da una *quadrica non rigata* [*quadrica limite o all'infinito*], luogo dei punti impropri secondo cui s'intersecano le rette parallele. Stabilita la validità della geometria proiettiva anche nelle ipotesi non-euclidee [KLEIN⁽¹⁵¹⁾], per ottenere la subordinazione della metrica alla proiettiva basta considerare, come nel caso euclideo, gli *enti metrici fondamentali* [assoluto] ed interpretare le proprietà metriche delle figure come relazioni grafiche di esse rispetto a questi enti. Sul piano di LOBACEFSKI-BOLYAI l'ente metrico fondamentale è la conica limite che separa la regione dei punti propri da quella dei punti impropri; sul piano di RIEMANN è una *conica immaginaria*, definita dalla *polarità assoluta* del piano [cfr. § 71 – punto c seconda colonna].

Tanto nell'uno quanto nell'altro caso le *proprietà metriche delle figure sono tutte le proprietà grafiche che rimangono inalterate nelle trasformazioni proiettive*⁽¹⁵²⁾ che lasciano fisso l'assoluto.

Queste trasformazioni proiettive costituiscono poi gli ∞^3 movimenti del piano non-euclideo.

Nel caso euclideo le nominate trasformazioni [che non alterano l'assoluto] sono le ∞^4 similitudini, fra cui, in particolare, si trovano gli ∞^3 movimenti.

Nello spazio la subordinazione della metrica alla proiettiva si fa per mezzo della quadrica limite [assoluto dello spazio]. Se questa è reale si ottiene la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI, se è immaginaria si ottiene quella di RIEMANN, tipo ellittico.

Le proprietà metriche delle figure sono dunque le proprietà grafiche dello spazio in relazione al suo assoluto, cioè *le proprietà grafiche che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni proiettive che lasciano fisso l'assoluto dello spazio*.

§ 81. Come si esprimono, rispetto all'assoluto, i concetti di distanza e di angolo?

Introdotta sul piano proiettivo un sistema qualunque di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) , che permetta di rappresentare la retta con equazioni lineari, l'equazione della conica assoluto sarà del tipo:

$$\Omega_{xx} = \sum a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Allora, la distanza dei due punti $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ viene espressa, a meno d'un fattore costante, dal *logaritmo del birapporto del gruppo ch'essi formano coi punti M, N in cui la loro congiungente incontra l'assoluto*.

Ponendo poi:

$$\Omega_{xy} = \sum a_{ij} x_i y_j$$

e rammentando, dalla geometria analitica, che il birapporto dei quattro punti X, Y, M, N è dato da:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

l'espressione D_{xy} della distanza sarà dunque:

⁽¹⁵¹⁾ La questione dell'indipendenza della geometria proiettiva dalla teoria delle parallele è rapidamente toccata da KLEIN nella sua prima pubblicazione «*Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*»; Math. Ann., t. IV, p. 573-625 [1871]. Un più ampio sviluppo della questione si può vedere nella seconda pubblicazione di KLEIN sullo stesso argomento: Math. Ann., t. VI, p. 112-145 [1873].

⁽¹⁵²⁾ È noto che per *trasformazioni proiettive* s'intendono quelle trasformazioni che fanno corrispondere ad un punto un punto, ad una retta una retta, a punto e retta che si appartengono punto e retta che si appartengono.

$$(1) D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}$$

ovvero, introducendo le funzioni inverse delle funzioni circolari ed iperboliche⁽¹⁵³⁾:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} D_{xy} = ik \text{ arc. cos } \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}} \\ D_{xy} = k \text{ Arc. Ch } \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}} \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} D_{xy} = ik \text{ arc. sen } \frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}} \\ D_{xy} = k \text{ Arc. Sh } \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy}}} \end{array} \right.$$

La costante k , che compare in queste formule, è poi legata alla curvatura K di RIEMANN dalla seguente relazione:

$$K = - \frac{1}{k^2}$$

Per l'interpretazione proiettiva del concetto di angolo valgono considerazioni analoghe. *L'angolo di due rette è proporzionale al logaritmo del birapporto del gruppo ch'esse formano con le tangenti condotte all'assoluto pel loro punto comune.*

⁽¹⁵³⁾ Le relazioni fra le funzioni circolari, iperboliche e la funzione logaritmica sono contenute nelle seguenti identità:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{\log a}{2i} \right) = \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \\ \text{sen} \left(\frac{\log a}{2i} \right) = \frac{1}{i} \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ch} \left(\frac{\log a}{2} \right) = \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \\ \text{Sh} \left(\frac{\log a}{2} \right) = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \end{array} \right.$$

Se si vuole poi che la misura dell'intero fascio sia data da 2π , come nell'ordinaria metrica, è necessario assumere per fattore di proporzionalità la frazione $1/2i$. Per esprimere poi analiticamente l'angolo di due rette $u (u_1 u_2 u_3)$, $v (v_1 v_2 v_3)$, poniamo:

$$\Psi_{uu} = \Sigma b_{ij} u_i u_j.$$

Se b_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} del discriminante di Ω_{xx} l'equazione tangenziale dell' assoluto è data da:

$$\Psi_{uu} = 0$$

e l'angolo di due rette dalle seguenti formule:

$$(1') \quad uv = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu} \Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu} \Psi_{vv}}}$$

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} uv = \text{arc. cos} \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu} \Psi_{vv}}} \\ uv = \frac{1}{i} \text{Arc. Ch} \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu} \Psi_{vv}}} \end{array} \right.$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} uv = \text{arc. sen} \frac{\sqrt{\Psi_{uu} \Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2}}{\sqrt{\Psi_{uu} \Psi_{vv}}} \\ uv = \frac{1}{i} \text{Arc. Sh} \frac{\sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu} \Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu} \Psi_{vv}}} \end{array} \right.$$

Una espressione identica vale per la distanza di due punti e l'angolo di due piani nella geometria dello spazio: basterebbe supporre che:

$$\Omega_{xx} = 0, \Psi_{uu} = 0$$

rappresentassero le equazioni [puntuale e tangenziale] dell'assoluto dello spazio, anzichè dell'assoluto del piano. A seconda che $\Omega_{xx} = 0$ è l'equazione di una quadrica reale a punti ellittici ovvero di una quadrica immaginaria le formule si riferiranno alla geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI od alla geometria di RIEMANN.

§ 82. Le formule precedenti, relative all'angolo di due rette o due piani, contengono, come caso particolare, quelle dell'ordinaria metrica. Infatti, riferendoci per semplicità al piano e ad un sistema ortogonale di assi coordinati, l'equazione tangenziale dell'assoluto euclideo [punti ciclici, § 79] è

$$u_1^2 + u_2^2 = 0$$

La formula (2'), ponendo in essa:

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2, \quad \Psi_{vv} = v_1^2 + v_2^2, \quad \Psi_{uv} = u_1v_1 + u_2v_2$$

diventa:

$$uv = \text{arc. cos} \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}}$$

da cui:

$$\cos uv = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}}$$

Se ora si tien conto che i coseni direttori della retta, $u(u_1, u_2, u_3)$ sono:

$$\cos ux = \frac{u_1}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}}, \quad \cos uy = \frac{u_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}}$$

l'ultima relazione diventa:

$$\cos uv = \cos ux \cos vx + \cos uy \cos vy,$$

cioè l'ordinaria espressione che dà l'angolo di due rette nel piano euclideo.

Per la distanza di due punti X, Y le cose non procedono così semplicemente quando l'assoluto degenera nei punti ciclici. Infatti le due intersezioni M, N della retta XY con l'assoluto coincidono allora nell'unico punto all'infinito di questa retta e la formula (1) dà costantemente:

$$D_{xy} = \frac{k}{2} \log (M_{\infty}N_{\infty}XY) = \frac{k}{2} \log. 1 = 0$$

Tuttavia un opportuno artificio permette di ottenere l'ordinaria formula della distanza come caso limite della (3).

Per raggiungere più facilmente lo scopo immaginiamo le equazioni dell'assoluto [non degenerare], in coordinate di punti e di rette, ridotte alla forma:

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= \varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ \Psi_{uu} &= u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Allora, ponendo:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\varepsilon(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon x_3^2} \sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + \varepsilon y_3^2}}$$

la (3) del precedente § dà:

$$D_{xy} = ik \text{ arc. sen } \sqrt{\varepsilon \Delta}$$

Sia ε infinitamente piccolo: trascurando infinitesimi di ordine superiore al 2° potremo, nella formula precedente, sostituire all'*arco* il *seno*. Se poi scegliamo k^2 infinitamente grande, in modo che il prodotto $ik \sqrt{\varepsilon}$ si mantenga finito ed uguale all'unità per ogni valore di ε , la formula in discorso diventa:

$$D_{xy} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x_2 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon x_3^2} \sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + \varepsilon y_3^2}}$$

Passiamo ora al limite per, $\varepsilon = 0$. L'equazione tangenziale dell'assoluto diventa:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0;$$

corrispondentemente la conica degenera in due punti immaginari coniugati posti sulla retta $u_3 = 0$. La formula della distanza, introducendo le coordinate non omogenee:

$$X_i = \frac{x_i}{x_3}, \quad Y_i = \frac{y_i}{y_3},$$

assume la forma,

$$D_{xy} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

la quale è caratteristica per la geometria euclidea. Con ciò è raggiunto il nostro scopo.

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che per ricavare dalla formula generale della distanza quella speciale del caso euclideo, dovemmo far tendere k^2 all'infinito. E poichè la curvatura di RIEMANN è data da

$$-\frac{1}{k^2}$$

si ottiene, anche per questa via, una conferma del risultato che assegna allo spazio euclideo una curvatura riemanniana nulla.

§ 83. Le proprietà delle figure piane in relazione ad una conica e quelle dello spazio in relazione ad una quadrica, costituiscono, nel loro insieme, la *metrica proiettiva*. La metrica proiettiva fu studiata da CAYLEY⁽¹⁵⁴⁾, indipendentemente dalle relazioni ch'essa ha con le geometrie non euclidee, relazioni che furono scoperte ed illustrate qualche anno dopo da F. KLEIN⁽¹⁵⁵⁾.

A KLEIN è pure dovuta una nomenclatura molto usata per le metriche-proiettive. Egli chiama *geometria iperbolica*, la geometria di CAYLEY relativa ad un assoluto reale non degenere, *geometria ellittica* quella relativa ad un assoluto immaginario non degenere, *geometria parabolica* il caso limite delle due precedenti. Sicchè, nel seguito, potremo usare questa nomenclatura per denotare i tre sistemi geometrici di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN [tipo ellittico] di EUCLIDE.

⁽¹⁵⁴⁾ Cfr.: «Sixth Memoir upon Quantics.»; Philosophical Transactions, t. CXLIX, p. 61-90 [1859]; ovvero: Math. Papers di CAYLEY, t. II p. 561-92.

⁽¹⁵⁵⁾ Cfr. «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.»; Math. Ann., t. IV, p. 573-625 [1871].

RAPPRESENTAZIONE DELLA GEOMETRIA DI LOBACEFSKI-BOLYAI
SUL PIANO EUCLIDEO.

§ 84. Alla interpretazione proiettiva delle metriche non-euclidee, di cui sopra abbiamo discusso, si collega una interessante rappresentazione che può darsi della *geometria iperbolica* sul piano euclideo. Per ottenerla fissiamo sul piano una conica reale non degenera, per es. un cerchio, e relativamente a questo cerchio poniamo le seguenti definizioni:

- Piano* = Regione dei punti interni al cerchio.
- Punto* = Punto interno al cerchio.
- Retta* = Corda del cerchio.

Si può allora verificare immediatamente che i postulati relativi alla determinazione della retta, alle proprietà segmentarie ed angolari si traducono in proporzioni che sono sempre valide anche quando si adottino le predette significazioni degli enti.

Ma nel successivo sviluppo della geometria ai detti postulati si aggiungono i postulati della congruenza, contenuti nel seguente *principio del movimento*.

Dati nel piano due punti A, A' e per essi rispettivamente le rette a, a', esistono quattro maniere di sovrapporre il piano a se stesso, in modo che A ed a coincidano rispettivamente con A' ed a'. Più precisamente una maniera di sovrapposizione resta definita se si fissano come corrispondenti un raggio di a ed un raggio di a', una banda del piano rispetto ad a ed una banda del piano rispetto ad a'. Di questi quattro movimenti due sono *congruenze dirette*, due *congruenze inverse*.

Quando si adottino le precedenti interpretazioni degli enti *punto, retta, piano*, il principio qui espresso si traduce nella seguente proposizione:

Data nel piano una conica [ad es. un cerchio] e fissati due punti interni A, A' e per essi rispettivamente le corde a, a', esistono quattro trasformazioni proiettive del piano che mutano in se stessa la regione dei punti interni alla conica e che fanno corrispondere A ed a rispettivamente ad A' ed a'. Per fissarne una basta richiedere che un dato estremo di a corrisponda ad un dato estremo di a' e che ad una determinata banda del piano rispetto ad a, una determinata banda del piano rispetto ad a'. Di queste quattro trasformazioni due subordinano sulla conica *proiettività concordi*, le altre due *proiettività discordi*.

§ 85. Dimostriamo il contenuto di questa proposizione, riferendoci per semplicità a due coniche distinte τ, τ' , giacenti o no sullo stesso piano.

Siano M, N gli estremi della corda a; M', N' quelli della corda a' e P, P' i poli di a ed a' rispetto alle relative coniche τ, τ' .

Ciò posto la retta PA interseca la conica τ in due punti reali e distinti R, S e la retta P'A' la conica τ' nei due punti reali e distinti R', S'.

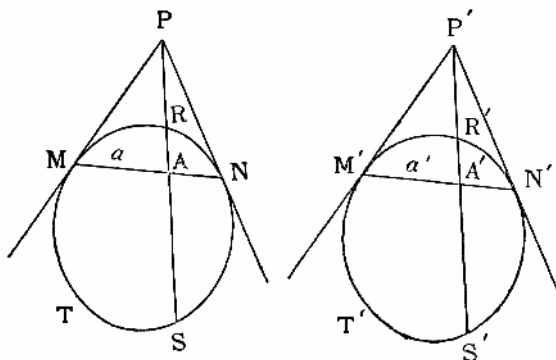


Fig. 51.

Una trasformazione proiettiva che muti τ in τ' , la retta a nella retta a' , il punto A nel punto A' , fa corrispondere al punto P punto P' , alla retta PA la retta $P'A'$. Questa trasformazione subordina poi fra le due coniche una corrispondenza proiettiva in cui ai punti della coppia M, N corrispondono quelli della coppia M', N' , ed a quelli della coppia R, S quelli della coppia R', S' .

Viceversa una trasformazione proiettiva fra le due coniche che goda di queste proprietà è subordinata da una trasformazione proiettiva fra i due piani, come quella sopra descritta⁽¹⁵⁶⁾.

Ma considerando le due coniche τ, τ' vediamo che ai punti della quaterna $MNRS$ di τ si possono ordinatamente fare corrispondere i punti di una qualunque delle seguenti quaterne di τ' :

$$\begin{aligned} &M' N' R' S' \\ &N' M' S' R' \\ &M' N' S' R' \\ &N' M' R' S', \end{aligned}$$

per cui rimane provata l'esistenza delle quattro proiettività, di cui si parla nell'enunciata proposizione.

Se ora supponiamo che le due coniche coincidano nulla dobbiamo mutare nel precedente ragionamento. Aggiungeremo però che delle quattro proiettività in discorso una ed una sola fa corrispondere il segmento AM al segmento $A'M'$, mentre si corrispondono fra loro le due regioni tratteggiate nella figura.

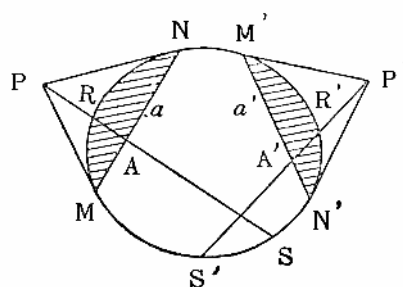


Fig. 52.

Inoltre le due proiettività definite dalle quaterne:

$$\left(\begin{array}{cccc} M & N & R & S \\ M' & N' & R' & S' \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} M & N & R & S \\ N' & M' & S' & R' \end{array} \right)$$

subordinano sulla conica proiettività concordi, le altre due, definite dalle quaterne:

$$\left(\begin{array}{cccc} M & N & R & S \\ M' & N' & S' & R' \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} M & N & R & S \\ N' & M' & R' & S' \end{array} \right)$$

subordinano proiettività discordi.

§ 86. Ciò posto, riprendiamo, completando, le definizioni del § 84, relativamente ad un cerchio dato sul piano.

⁽¹⁵⁶⁾ Per questa dimostrazione ed i teoremi di geometria proiettiva su cui essa è fondata cfr., ad es., le «Lezioni di geometria proiettiva.» di F. ENRIQUES, Cap. X, p. 251-3.

<i>Piano</i>	=	Regione dei punti interni al cerchio.
<i>Punto</i>	=	Punto interno al cerchio.
<i>Retta</i>	=	Corda del cerchio
<i>Movimenti</i>	=	Trasformazioni proiettive del piano che mutano in se stessa la regione dei punti interni al cerchio.
<i>Ribaltamenti</i>	=	Trasformazioni omologiche del cerchio.
<i>Figure congruenti</i>	=	Figure trasformabili l'una nell'altra mediante una delle nominate proiettività.

I precedenti sviluppi permettono senz'altro di affermare che tutte le proposizioni della geometria piana elementare, legate ai concetti di retta, angolo, congruenza, possono convenientemente tradursi in proprietà relative al sistema dei punti interni al cerchio, sistema che indicheremo {S}.

In particolare vediamo che cosa corrisponda nel sistema {S} a due rette ortogonali del piano ordinario.

Osserviamo perciò che se *r* ed *s* sono due rette ortogonali, un ribaltamento del piano intorno ad *s* sovrappone a se stessa la retta *r*, scambiando però i due raggi in cui essa è divisa da *s*.

Secondo le definizioni poste un *ribaltamento* in {S} è una omologia che ha per *asse* una corda *s* del cerchio e per *centro* il polo della corda. Le rette unite in questa omologia sono, all'infuori di *s*, tutte le rette passanti per il centro di omologia; talchè *nel sistema* {S}, *dovranno chiamarsi perpendicolari due rette coniugate rispetto al cerchio fondamentale*.

Si potrebbero facilmente verificare in {S} tutte le proposizioni relative alle rette perpendicolari; in particolare che se dal punto comune di due corde coniugate in {S} si tracciano le tangenti [immaginarie coniugate] al cerchio fondamentale, queste tangenti sono separate armonicamente dalle due rette ortogonali [cfr. § 79].

§ 87. Vediamo ancora come nella metrica convenzionale, stabilita nell'interno del cerchio, possa esprimersi la *distanza* di due punti.

Si introduca perciò un sistema di coordinate ortogonali (*x*, *y*) con l'origine nel centro del cerchio. La *distanza* di due punti A (*x*, *y*), B (*x'*, *y'*), nel piano convenzionale, non può rappresentarsi col solito radicale:

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

giacchè esso *non è invariante* per le trasformazioni proiettive sopra chiamate movimenti; la *distanza* sarà una funzione delle loro coordinate, invariante rispetto alle predette trasformazioni, che sulla retta gode della proprietà distributiva, espressa dalla formula:

$$\text{dist. (AB)} = \text{dist. (AC)} + \text{dist. (CB)}.$$

Ora una espressione delle coordinate (*x*, *y*), (*x'*, *y'*), di A e B, che rimanga invariata per tutte le trasformazioni proiettive che lasciano fisso il cerchio limite, è il birapporto dei quattro punti A, B, M, N, dove M N sono gli estremi della corda AB: la espressione più generale che gode della richiesta proprietà invariante è una funzione arbitraria di tale birapporto.

Richiedendo poi che la detta funzione riesca distributiva, nel senso sopra indicato, bisogna assumerla, a meno d'un fattore di proporzionalità, uguale al logaritmo di

$$(\text{ABMN}) = \frac{\text{AM}}{\text{BM}} : \frac{\text{AN}}{\text{BN}}$$

Avremo dunque:

$$\text{dist. (AB)} = \frac{k}{2} \log. (\text{ABMN}).$$

Analogamente si procede per valutare l'angolo di due rette. In questo caso bisogna osservare che volendo che l'angolo retto sia espresso da $\pi/2$, è necessario assumere per costante moltiplicatrice del logaritmo il fattore $1/2i$. Avremo così:

$$ab = \frac{1}{2i} \log. (abmn),$$

ove con m, n s'indicano le tangenti immaginarie coniugate condotte pel vertice dell'angolo al cerchio e con $(abmn)$ il birapporto delle quattro rette, a, b, m, n , espresso analiticamente da:

$$\frac{\text{sen}(am)}{\text{sen}(bm)} : \frac{\text{sen}(an)}{\text{sen}(bn)}$$

§ 88. Riferendoci a quanto si disse intorno alla subordinazione della geometria metrica alla proiettiva [§ 81] è chiaro che le formule precedenti, relative alla *distanza* ed all'*angolo*, coincidono con quelle che si avrebbero sul piano non euclideo, il cui assoluto fosse un cerchio. Questo basterebbe per farci concludere che la geometria del sistema {S} fornisce una rappresentazione concreta della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI. Però, volendo renderci conto in modo più approfondito di questo fatto, cerchiamo come si traducano in {S} la definizione e le proprietà delle rette parallele.

Siano $r(u_1, u_2, u_3)$ e $r'(v_1, v_2, v_3)$ due corde distinte del cerchio fondamentale. Riferendo il cerchio ad un sistema cartesiano ortogonale, con l'origine nel centro, e prendendo per unità di misura il raggio avremo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ u^2 + v^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

per equazione puntuale e tangenziale del cerchio.

Rendendo omogenee queste equazioni otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

L'angolo rr' delle due rette può calcolarsi per mezzo delle formule (3') del § 81, ponendo in esse:

$$\begin{aligned} \Psi_{uu} &= u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \\ \Psi_{vv} &= v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 \\ \Psi_{uv} &= u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3. \end{aligned}$$

Otterremo, ad es.:

$$\text{sen } rr' = \frac{\sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 - (u_2v_3 - u_3v_2)^2 - (u_3v_1 - u_1v_3)^2}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}$$

Se ora si osserva che le rette r e r' hanno rispettivamente per equazione:

$$\begin{aligned} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 &= 0, \\ x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 &= 0, \end{aligned}$$

e che queste rette concorrono nel punto di coordinate:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_2v_3 - u_3v_2, \\ x_2 &= u_3v_1 - u_1v_3, \\ x_3 &= u_1v_2 - u_2v_1, \end{aligned}$$

la precedente espressione dell'angolo rr' assume la forma:

$$(4) \quad \text{sen } rr' = \frac{\sqrt{(x_3^2 + x_2^2 - x_1^2)}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}$$

Da questa si vede che la condizione necessaria e sufficiente affinché l'angolo rr' sia nullo è data dall'annullarsi del numeratore della frazione ottenuta.

Ma perchè si annulli questo numeratore il punto (x_1, x_2, x_3) , in cui s'intersecano le due corde, deve appartenere alla circonferenza del cerchio fondamentale e viceversa; per cui:

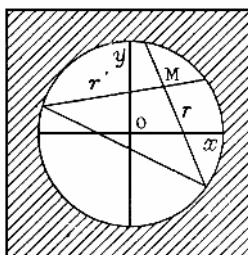


Fig. 53.

Nella interpretazione convenzionale delle proposizioni geometriche, per mezzo del sistema {S}, dovremo chiamare parallele due corde che s'incontrano in un punto della circonferenza fondamentale, perchè l'angolo di tali corde è nullo.

E poichè per un punto interno ad un cerchio passano due corde che congiungono quel punto con gli estremi di un'altra corda arbitraria, nel sistema {S} sarà verificata la proposizione fondamentale della geometria iperbolica.

§ 89. Per ritrovare in {S} la formula relativa all'angolo di parallelismo calcoliamo anzitutto l'angolo OMN, compreso fra l'asse y e la retta MN che congiunge un punto M di y con l'estremo N dell'asse x . Indicando con a la distanza ordinaria dei due punti M ed O, le coordinate omogenee della retta MN e della retta OM sono rispettivamente $(a, 1, -a)$, $(1, 0, 0)$ e le coordinate del punto d'incontro, di queste rette sono $(0, a, 1)$. Allora la formula (4) del precedente § da:

$$\text{sen } \text{OMN} = \sqrt{1 - a^2}.$$

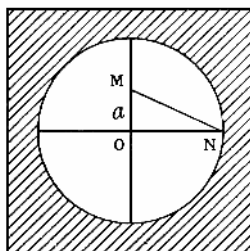


Fig. 54.

D'altra parte, la distanza convenzionale fra i due punti O ed M, per le (2) del § 81, è data da:

$$OM = k \text{ Arc. Ch } \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

da cui

$$\text{Ch } \frac{OM}{k} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Confrontando questa formula con quella relativa al seno dell'angolo OMN si deduce:

$$\text{Ch } \frac{OM}{k} = \frac{1}{\text{Sen OMN}},$$

relazione che coincide con quella data da TAURINUS, LOBACEFSKI, BOLYAI per l'angolo di parallelismo [cfr. §. 41].

§ 90. Vediamo finalmente come si esprima in {S} la distanza di due punti infinitamente vicini [*distanza elementare*], per riavvicinare l'attuale rappresentazione della geometria iperbolica con quella di BELTRAMI [cfr. § 69].

Siano $(x, y), (x + dx, y + dy)$ due punti infinitamente vicini. La loro distanza ds si calcola per mezzo della (2) del § 81, ponendo in essa:

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= x^2 + y^2 - 1, \\ \Omega_{yy} &= (x + dx)^2 + (y + dy)^2 - 1, \\ \Omega_{xy} &= x(x + dx) + y(y + dy) - 1. \end{aligned}$$

Se poi si sostituisce all'*arco* il *seno* e si eleva al quadrato, dopo alcune riduzioni si ricava:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (xdx + ydy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2(1 - 2xdx + 2ydy - dx^2 - dy^2)}$$

Trascurando finalmente gli infinitesimi di ordine superiore al secondo:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (xdx + ydy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

ovvero:

$$(5) \quad ds^2 = k^2 \frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Rammentiamo ora che BELTRAMI, nel 1868, interpretava la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI con quella delle superficie di curvatura costante negativa. Lo studio della geometria di tali superficie si effettua muovendo da un sistema (u, v) di coordinate assunto sulla superficie e dalla legge secondo cui si misurano le *distanze elementari* $[ds]$. La scelta di un opportuno sistema (u, v) permise a BELTRAMI [1866] di rappresentare il quadrato del ds nella forma seguente:

$$k^2 \frac{(1 - v^2) du^2 + 2uv du dv + (1 - u^2) dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

dove la costante k^2 è l'inversa, con segno mutato, della curvatura della superficie⁽¹⁵⁷⁾.

Per studiare le proprietà delle superficie in discorso e metterle a confronto con quelle della metrica di LOBACEFSKI-BOLYAI, il BELTRAMI, nel suo «Saggio» citato a § 69, si giovò del seguente artificio. Su di un piano ausiliario rappresentò i punti della superficie, in modo che al punto (u, v) di questa corrispondesse su quello il punto di coordinate cartesiane

$$x = u, y = v.$$

I punti della superficie vennero così rappresentati sul piano in punti interni al cerchio

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

i punti all'infinito della superficie in punti della circonferenza di questo cerchio, le geodetiche in corde, le geodetiche parallele in corde incidenti in un punto della nominata circonferenza, etc. L'espressione del ds^2 si tradusse poi nell'espressione (5), secondo cui si misurano le distanze elementari nel sistema $\{S\}$. Da ciò risulta che BELTRAMI, con la sua rappresentazione piana delle superficie di curvatura costante, fu condotto ad una delle metriche proiettive di CAYLEY, e precisamente alla metrica relativa ad un cerchio fondamentale, da noi esposta nei §§ 80, 81.

§ 91. La rappresentazione della geometria piana iperbolica sul piano euclideo è suscettibile di essere estesa al caso dello spazio. Per rappresentare la geometria dello spazio di LOBACEFSKI-BOLYAI nello spazio ordinario basterebbe porre in quest'ultimo le definizioni seguenti:

- Spazio* = Regione dei punti interni ad una sfera.
- Punto* = Punto interno alla sfera.
- Retta* = Corda della sfera.
- Piano* = Punti di un piano secante interni alla sfera.
- Movimenti* = Trasformazioni proiettive dello spazio che mutano in se stessa la regione dei punti interni alla sfera, etc....

⁽¹⁵⁷⁾ «Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.»; Ann. di Mat., t. VII, p. 185-204 [1866]. — Opere Mat., t. I, p. 262-80 [Milano, Hoepli, 1902].

Con questa specie di *dizionario* si potrebbero tradurre le proposizioni della stereometria iperbolica in altrettante proprietà dello spazio euclideo relative al sistema dei punti interni alla sfera⁽¹⁵⁸⁾.

RAPPRESENTAZIONE DELLA GEOMETRIA ELLITTICA DI RIEMANN NELLO SPAZIO EUCLIDEO.

§ 92. Per quanto riguarda la geometria piana già dicemmo altrove [§ 71] che la geometria dell'ordinaria stella di rette offre una interpretazione concreta del sistema ellittico di RIEMANN. Se poi si sega la stella col piano ordinario, completato dalla retta all'infinito, si ottiene una rappresentazione sul piano euclideo del piano riemanniano in discorso.

Volendo una rappresentazione dello spazio ellittico sullo spazio euclideo basterebbe assumere in questo una polarità uniforme, *cui corrisponde una quadrica fondamentale immaginaria non degenera*, e porre, rispetto a questa quadrica, un sistema di definizioni analogo a quello precedentemente indicato nel caso iperbolico. Non insistiamo però sulla cosa, perchè non offre alcuna nuova difficoltà.

Notiamo però che in questa rappresentazione *tutti i punti dello spazio euclideo, compresi i punti del piano all'infinito, verrebbero a corrispondere biunivocamente a punti dello spazio riemanniano*.

FONDAZIONE DELLA GEOMETRIA
PARTENDO DAI CONCETTI GRAFICI.

§ 93. I principi esposti nei precedenti §§ conducono ad un nuovo ordine di idee, nel quale si pongono a primo fondamento della geometria le *proprietà grafiche*, anzichè le proprietà della congruenza e del movimento, di cui si servirono RIEMANN ed HELMHOLTZ. Si noti che, non volendo sin da principio introdurre veruna ipotesi sulla intersezione di rette coplanari, conviene partire da un opportuno sistema di postulati, valido in una *regione limitata* di spazio, e completare successivamente la regione iniziale per mezzo di *punti, rette, piani impropri* [cfr. § 80]⁽¹⁵⁹⁾.

Sviluppata la geometria proiettiva si possono introdurre nello spazio le proprietà metriche aggiungendo ai postulati iniziali quelli che caratterizzano i movimenti o la congruenza. Così facendo si trova che una certa polarità dello spazio, legata ai concetti metrici, viene trasformata in se stessa da tutti i movimenti. Si dimostra poi che la quadrica fondamentale di questa polarità non può essere che:

- a) una *Quadrica reale non rigata*,
- b) una *Quadrica immaginaria* [ad equazione reale],
- c) una *Quadrica degenera come luogo*.

Si ritrovano dunque, anche per questa via, I TRE SISTEMI GEOMETRICI, cui giunsero RIEMANN ed HELMHOLTZ partendo dal concetto di distanza elementare⁽¹⁶⁰⁾.

SULLA INDIMOSTRABILITÀ DEL POSTULATO D'EUCLIDE.

⁽¹⁵⁸⁾ Della interpretazione della stereometria non-euclidea ed in generale della interpretazione della geometria delle varietà di curvatura costante a più dimensioni, si occupò pure il BELTRAMI, nella memoria: «*Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante*»; Annali di Matem., (2), t. II, p. 232-55 [1868]. - Opere Mat., t. I, p. 406-29 [Milano, Hoepli, 1902].

⁽¹⁵⁹⁾ Per gli sviluppi relativi vedi: KLEIN, opere citate nella nota n. 150; PASCH: «*Vorlesungen über neuere Geometrie*»; [Leipzig, Teubner, 1882]; SCHUR: «*Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie*»; Math. Ann., t. XXXIX, p. 113-124, [1891]; BONOLA: «*Sulla introduzione degli elementi impropri in geometria proiettiva*»; Giornale di Matem. t. XXXVIII, p. 105-116 [1900].

⁽¹⁶⁰⁾ Per la deduzione di questo risultato vedi: BONOLA; «*Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, ellittico*»; Circolo Mat. Palermo, t. XV, p. 56-65, [1901].

§ 94. Avanti di porre fine a questa esposizione storica, ci sembra utile dire qualche parola sulla indimostrabilità del postulato d'EUCLIDE.

Il fatto stesso che gli innumerevoli tentativi fatti per la sua dimostrazione non condussero al risultato atteso, può far sorgere il dubbio *ch'esso sia indimostrabile*, giacchè l'istinto geometrico sembra attestarci che una proposizione così semplice, se è dimostrabile, debba esserlo per via di ragionamenti del pari semplici. Ma tale considerazione non può in verun modo tenersi in conto di una *prova* della indimostrabilità in questione.

Prescindendo dal postulato d'EUCLIDE, per seguire gli sviluppi di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI, si costruisce un edificio geometrico, nel quale non s'incontrano contraddizioni logiche e che perciò appunto sembra attestare la possibilità logica dell'ipotesi non-euclidea, che è quanto dire l'*indipendenza* del postulato d'EUCLIDE dai primi principi della geometria e quindi la sua *indimostrabilità*. Tuttavia il fatto che non si siano incontrate contraddizioni non basta ad assicurarci di ciò; occorre accertarci che, proseguendo negli indicati sviluppi mai tali contraddizioni potranno incontrarsi. Tale convinzione si può fare scaturire, in modo sicuro, dalla considerazione delle formule della trigonometria non-euclidea. Se infatti ci riferiamo al sistema di tutte le terne di numeri (x, y, z) e consideriamo convenzionalmente ogni terna come un *punto analitico*, possiamo definire la *distanza* di due punti analitici partendo dalle formule della suddetta trigonometria non-euclidea. Costruiamo così un sistema analitico, il quale, offrendo una convenzionale interpretazione della geometria non-euclidea, dimostra la possibilità logica di essa.

In questo senso le formule della trigonometria non-euclidea di Lobacefski-Bolyai danno la prova dell'indipendenza del postulato d'Euclide dai primi principii della geometria [relativi alla retta, al piano e alla congruenza].

Si può cercare una *prova geometrica* dell'indipendenza stessa riattaccandosi agli sviluppi ulteriori, di cui abbiamo fatto menzione. Per ciò conviene partire dal principio che i concetti costruiti dalla nostra intuizione, indipendentemente dalla rispondenza che essi trovano nel mondo esterno, sono a priori *logicamente possibili*, e così è logicamente possibile la geometria euclidea ed ogni serie di deduzioni su di essa fondata.

Ora, l'interpretazione che la geometria piana non-euclidea iperbolica riceve nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa offre, *fino ad un certo punto*, una prima prova della indimostrabilità del postulato euclideo. Precisamente resta così stabilito che *il postulato suddetto non può dimostrarsi fondandosi sui primi principii della geometria, validi in una regione limitata del piano*. Infatti, ogni contraddizione logica che scaturisse dall'ipotesi opposta si tradurrebbe in una contraddizione nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa.

Tuttavia, poichè il confronto tra il piano iperbolico e le superficie a curvatura negativa sussiste, come abbiam detto, soltanto per *regioni limitate*, non resta così escluso che il postulato euclideo possa dimostrarsi nel *piano completo*.

A togliere questo dubbio converrebbe riferirsi alla *varietà* astratta di curvatura costante, imperocchè non esiste alcuna superficie concreta dello spazio ordinario sulla quale valga la geometria iperbolica *integrale* [cfr. § 73].

Ma anche dopo di ciò l'indimostrabilità del postulato d'EUCLIDE riuscirebbe provata soltanto *nella geometria piana*. Resterebbe dunque da discutere la possibilità di dimostrare il postulato stesso con *considerazioni stereometriche*.

La fondazione della geometria, secondo le vedute di RIEMANN, estendenti ad un campo a 3 dimensioni le idee della geometria sopra le superficie, offre la prova completa dell'indimostrabilità, basata sull'esistenza d'un *sistema analitico non-euclideo*. Si tratta dunque di un'altra prova analitica. Lo stesso può dirsi per gli sviluppi di HELMHOLTZ, LIE; ma questi ultimi offrono, si può dire, anche una prova geometrica, desunta dall'esistenza di *gruppi di trasformazioni dello spazio euclideo, simili ai gruppi di movimenti della geometria non-euclidea*. Beninteso bisogna qui aver riguardo alla considerazione della geometria nella sua interezza.

Più semplice e geometricamente luminosa, è la *prova dell'indimostrabilità del postulato d'Euclide, desunta dalle metriche proiettive di Cayley*.

Questa prova si riattacca alla rappresentazione della geometria non-euclidea con la metrica convenzionale relativa ad un cerchio o ad una sfera, interpretazione che abbiamo largamente sviluppato nel caso del piano [cfr. §§ 84-92].

Dalle anzidette metriche proiettive scaturisce pure e con altrettanta semplicità, la prova della possibilità logica dell'ipotesi ellittica di RIEMANN, per la quale, limitatamente al caso del piano, servirebbe ancora la interpretazione che ne abbiamo dato come *geometria della stella* [§ 71].

NOTA I.

I principi fondamentali della statica
e il postulato d'Euclide.

SUL PRINCIPIO DELLA LEVA.

§ 1. Per dimostrare il principio della leva ARCHIMEDE [287-212] si giova di certe ipotesi, alcune enunciate, altre sottintese. Fra le ipotesi passate sotto silenzio, oltre quella che con linguaggio moderno si chiama *ipotesi del rinforzo dei vincoli*⁽¹⁶¹⁾, vi è uno degli stessi casi d'equilibrio della leva, che potrebbe enunciarsi così:

Una leva, sospesa per il suo punto di mezzo, è in equilibrio quando ad un estremo si applichi il peso 2P ed all'altro estremo si appenda, per il punto di mezzo, una nuova leva, portante a ciascun estremo un peso uguale a P⁽¹⁶²⁾.

Senza qui fare la storia delle critiche mosse ad ARCHIMEDE per l'uso di tale ipotesi, e dei vari tentativi fatti per dimostrarla⁽¹⁶³⁾, riporteremo in proposito le argomentazioni di LAGRANGE, perchè da esse può farsi scaturire in modo semplice e chiaro un importantissimo legame fra l'ipotesi in discorso ed il postulato delle parallele.

§ 2. Sia ABD un triangolo isoscele [AD = BD], i cui vertici A e B sopportino due pesi uguali a P ed il vertice D un peso uguale a 2P. Questo triangolo sarà in equilibrio intorno alla retta MN, che congiunge i punti medi dei lati uguali del triangolo, perchè ciascuno di questi lati può riguardarsi come una leva, i cui estremi sopportino pesi uguali.

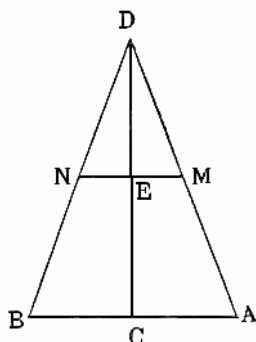


Fig. 55.

Ma l'equilibrio della figura si può ottenere anche appoggiando il triangolo su una retta che passi pel vertice D e pel punto di mezzo [C] del lato AB, per la qual cosa, denotando con E il punto d'incontro dei due assi MN, CD, il nostro triangolo sarà in equilibrio se lo si sospende per il punto E.

«Or, continua LAGRANGE, comme l'axe [MN] passe par le milieu des deux côté du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu [C] de sa base; donc le levier transversal [CD] aura le point d'appui [E] dans le milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts [C, D]: donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids.»⁽¹⁶⁴⁾

§ 3. Il ragionamento di LAGRANGE, oltre contenere implicitamente talune *ipotesi d'indole statica*, relative alle simmetrie, al rinforzo dei vincoli, etc.⁽¹⁶⁵⁾, utilizza una proprietà geometrica del

⁽¹⁶¹⁾ Questa ipotesi può enunciarsi così: *Se dei corpi, soggetti a vincoli, sono in equilibrio sotto l'azione di forze date, saranno pure in equilibrio se ai vincoli già esistenti se ne aggiungono dei nuovi*. Cfr., ad es., J. ANDRADE: «*Léçons de Mécanique Physique*», p. 59 [Paris, 1898].

⁽¹⁶²⁾ Cfr.: «*Archimedis opera Omnia*», nell'edizione critica di J. L. HEIBERG, t. II, p. 142 e successive. [Lipsia, Teubner, 1881]

⁽¹⁶³⁾ Cfr., ad es., E. MACH: «*La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*», trad. par E. BERTRAND; p. 21 e succ. [Paris, Hermann, 1904]. — Intorno alle varie ipotesi su cui può fondarsi la dimostrazione del principio della leva rimandiamo al recente volume di P. DUHEM: «*Les origines de la Statique*» [Paris, Hermann, 1905], segnatamente alla nota C [p. 356-58], *Sur les divers axiomes d'où se peut déduire la théorie du levier*.

⁽¹⁶⁴⁾ «*Oeuvres de Lagrange*», t. XI, p. 4-5.

⁽¹⁶⁵⁾ Per l'analisi dei *principi fisici* su cui si fonda la statica ordinaria si veggia il Cap. V dell'opera in corso di stampa di F. ENRIQUES «*Problemi della Scienza*» [Bologna, Zanichelli, 1906].

triangolo euclideo. Ma se si vuole prescindere da questa, il che, sotto un certo aspetto, appare naturale, le precedenti conclusioni vanno modificate.

Infatti, fermo restando il principio che il triangolo ABD sia in equilibrio intorno al punto [E] in cui s'incontrano i due assi MN, CD, non si può asserire che E sia punto di mezzo di CD, perchè ciò equivarrebbe ad ammettere il postulato d'EUCLIDE.

Consequentemente *non si potrà asserire che i due pesi applicati in A e B possano sostituirsi con l'unico peso 2P, applicato in C*, poichè, se tale sostituzione potesse aver luogo, dovrebbe sussistere l'equilibrio d'una leva con pesi uguali agli estremi, intorno ad un punto che *può non essere* il suo punto di mezzo.

Viceversa, se si concede, con ARCHIMEDE, che a due pesi uguali possa sostituirsi un unico peso applicato al punto medio della leva, si deduce facilmente che E è il punto di mezzo di CD e successivamente che ABD è un triangolo euclideo.

Con ciò resta stabilita l'equivalenza fra il V postulato d'Euclide e la suddetta ipotesi d'Archimede. Una tale equivalenza, beninteso, è *relativa* al sistema di ipotesi formato dalle ipotesi statiche sopra accennate e dalle ipotesi geometriche ordinarie.

Adottando il linguaggio moderno potremo parlare di *forze*, di *composizione di forze*, di *risultante*, invece che di pesi, di leve, etc.

Allora l'ipotesi in discorso assume la forma seguente:

Due forze d'uguale intensità, giacenti in uno stesso piano, applicate perpendicolarmente agli estremi di un segmento e dalla stessa banda di esso, si compongono in un'unica forza, d'intensità uguale alla somma delle intensità delle forze date ed applicata al punto medio del segmento.

In forza di quanto sopra si disse, l'applicabilità di questa legge di composizione richiede che nello spazio si verifichi l'ordinaria teoria delle parallele.

SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE CONCORRENTI.

§ 4. Anche l'altro principio fondamentale della statica, cioè la *legge del parallelogramma delle forze*, nell'usuale interpretazione geometrica che ad esso si accompagna, è in stretta connessione con la natura euclidea dello spazio. Tuttavia se si esamina la parte essenziale di detto principio, vale a dire l'espressione analitica della risultante [R] di due forze [P] uguali e concorrenti, è facile stabilire ch'esso sussiste *indipendentemente* da qualunque ipotesi sulle parallele. Ciò può mettersi in evidenza deducendo la formula

$$R = 2P \cdot \cos \alpha,$$

ove 2α è l'angolo formato dalle due forze concorrenti, dai seguenti principi.

1. Due o più forze applicate ad uno stesso punto ammettono una determinata risultante.
2. La risultante di due forze uguali e contrarie è nulla.
3. La risultante di due o più forze applicate ad uno stesso punto ed aventi la stessa linea d'azione ha per intensità la somma delle intensità delle forze date, ha lo stesso punto di applicazione e linea d'azione.
4. La risultante di due forze uguali applicate ad uno stesso punto è diretta secondo la bisettrice dell'angolo formato dalle due forze.
5. L'intensità della risultante è funzione continua della intensità delle componenti.

Vediamo rapidamente come possa ottenersi lo scopo. Il valore [R] della risultante di due forze d'uguale intensità [P], formanti fra loro l'angolo 2α , è funzione solo di P e di α , talchè potremo scrivere:

$$R = 2 f(P, \alpha).$$

Una prima applicazione degli enumerati principi conduce a stabilire la proporzionalità fra R e P, e ciò indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulle parallele [cfr. la nota 168]: allora la precedente relazione può scriversi più semplicemente così:

$$R = 2 P \cdot f(\alpha).$$

Si tratta di assegnare la forma di $f(\alpha)$.

§ 5. Calcoliamo $f(\alpha)$ per alcuni particolari valori dell'argomento.

1°) Sia $\alpha = 45^\circ$.

Nel punto O, in cui concorrono le due forze P_1, P_2 , d'uguale intensità P, immaginiamo applicate due forze uguali e contrarie, perpendicolari ad R e d'intensità $\frac{1}{2} R$. Nello stesso tempo immaginiamo decomposta R in due altre, dirette secondo R e d'intensità $\frac{1}{2} R$: potremo allora riguardare ciascuna P come la risultante di due forze ad angolo retto, d'intensità $\frac{1}{2} R$. Avremo allora:

$$P = 2 \frac{1}{2} R \cdot f(45^\circ).$$

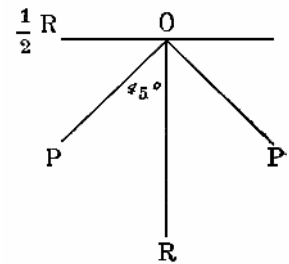


Fig. 56.

D'altra parte, essendo R la risultante di P_1 e P_2 , sarà

$$R = 2P \cdot f(45^\circ).$$

Da queste due relazioni si ricava:

$$f(45^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

2°) Sia $\alpha = 60^\circ$

Allora in O e in direzione opposta ad R, applichiamo una forza R' , d'intensità R.

Il sistema formato dalle due forze P e dalla R' è un sistema in equilibrio. Allora, per la simmetria della figura, risulta $R' = P$, quindi $R = P$. D'altra parte, essendo

$$R = 2P \cdot f(60^\circ),$$

avremo:

$$f(60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

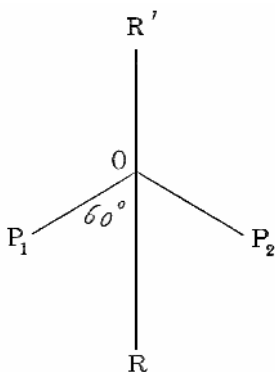


Fig. 57.

3°) Sia $\alpha = 36^\circ$.

Se in O si applicano 5 forze P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , d'intensità P e tali che ciascuna di esse formi con la successiva un angolo di 72° , si ottiene un sistema in equilibrio. Per la risultante R di P_2, P_3 avremo allora;

$$R = 2P \cdot f(36^\circ);$$

per la risultante R' di P_1, P_4 , avremo invece:

$$R' = 2P \cdot f(72^\circ).$$

D'altra parte R' ha la stessa direzione di P_5 , cioè direzione uguale e contraria a quella di R, per cui:

$$2 P \cdot f(36^\circ) = 2 P \cdot f(72^\circ) + P,$$

quindi:

$$(1) \quad f(36^\circ) = 2 f(72^\circ) + 1.$$

Se invece componiamo P_1 con P_2 , e P_3 con P_4 otteniamo due forze d'intensità $2 P \cdot f(36^\circ)$, formanti fra loro un angolo di 144° : componendo le due forze ottenute ricaveremo una nuova forza R'' , d'intensità:

$$4 P \cdot f(36^\circ) \cdot f(72^\circ).$$

Ma R'' per la simmetria della figura, ha la stessa direzione di P_5 e senso contrario; perciò, dovendo sussistere l'equilibrio, potremo scrivere:

$$P = 4 P \cdot f(36^\circ) \cdot f(72^\circ),$$

ovvero:

$$(2) \quad 1 = 4 f(36^\circ) \cdot f(72^\circ).$$

Dalle relazioni (1) e (2), risolvendo rispetto ad $f(36^\circ)$ ed $f(72^\circ)$, si ricava:

$$f(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad f(72^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

§ 6. Con procedimenti analoghi a quelli del precedente si potrebbero dedurre altri valori per $f(\alpha)$. Arrestandoci però a quelli calcolati e mettendoli a confronto coi corrispondenti valori della funzione $\cos \alpha$ otteniamo il seguente specchio:

$\cos 0^\circ = 1$	$f(0^\circ) = 1$
$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$f(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$
$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$f(60^\circ) = \frac{1}{2}$
$\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$	$f(72^\circ) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$
$\cos 90^\circ = 0$	$f(90^\circ) = 0$

Lo specchio ci fa prevedere l'identità delle due funzioni, $f(\alpha)$ e $\cos \alpha$. Per avere un'ulteriore conferma di questo fatto determiniamo l'equazione funzionale a cui soddisfa $f(\alpha)$.

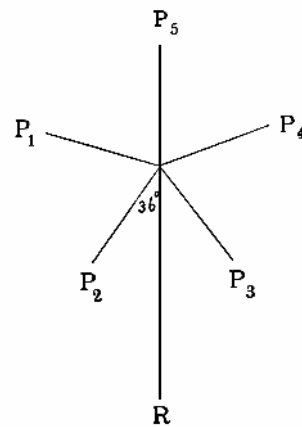


Fig. 59.

Perciò immaginiamo applicate in un punto O quattro forze P_1, P_2, P_3, P_4 , d'intensità P e formanti fra loro i seguenti angoli:

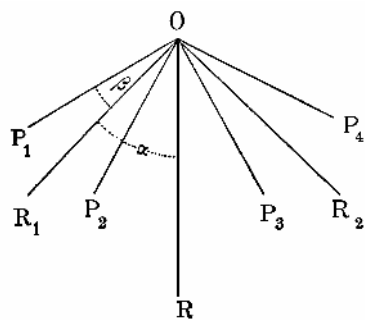


Fig. 60.

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= P_3P_4 = 2\beta, \\ P_2P_3 &= 2(\alpha - \beta), \\ P_1P_4 &= 2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Determineremo la risultante R di queste 4 forze procedendo in due modi diversi.

Se componiamo P_1 con P_2 e P_3 con P_4 , otteniamo due forze R_1, R_2 , d'intensità:

$$2 P. f(\beta)$$

formanti fra loro l'angolo 2α . Componendo R_1 ed R_2 in un'unica forza R, otterremo:

$$R = 4 P. f(\alpha). f(\beta),$$

D'altra parte, componendo P_1 con P_4 e P_2 con P_3 si ottengono due risultanti parziali, aventi entrambe la direzione di R e rispettivamente le intensità:

$$2 P. f(\alpha + \beta) , 2 P. f(\alpha - \beta)$$

Queste due forze si compongono per somma e danno:

$$R = 2 P. (f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)).$$

Dal paragone dei due valori di R si deduce:

$$(1) \quad 2 f(\alpha). f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$$

cioè l'equazione funzionale richiesta.

Se ora ricordiamo che:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha . \cos \beta,$$

e teniamo presente l'identità fra i valori di $f(\alpha)$ e $\cos \alpha$, dati dalla precedente tabella, e l'ipotesi della continuità di $f(\alpha)$, senza ulteriori sviluppi potremo scrivere:

$$f(\alpha) = \cos \alpha,$$

e conseguentemente:

$$R = 2 P. \cos \alpha.$$

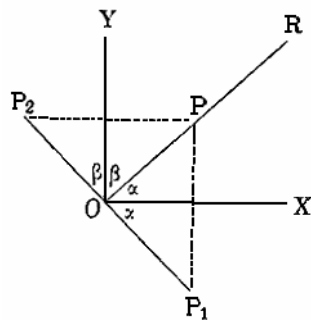


Fig. 61.

La validità di questa formula dello spazio euclideo, viene così estesa anche agli spazi non-euclidei.

§ 7. La legge di composizione di due forze uguali e concorrenti permette di risolvere il problema generale della risultante, per-

chè si possono assegnare, senza ulteriori ipotesi, le *componenti* d'una forza R su due assi ortogonali uscenti dal suo punto di applicazione O.

Infatti siano x, y questi assi ed α, β gli angoli che formano con R. Se per O si traccia la perpendicolare ad OR, essa forma con x l'angolo α , e con y l'angolo β . Su questa retta ed uscenti da O, si immaginino due forze P_1, P_2 uguali e contrarie, d'intensità $\frac{1}{2} R$ e si decomponga R in due forze $P = \frac{1}{2} R$, dirette entrambe secondo R. Il sistema P_1, P_2, P ha per risultante R.

Ora, componiamo P_1 e P , poi P_2 e P : otteniamo due forze X, Y, l'una diretta secondo x , l'altra secondo y , d'intensità:

$$\begin{aligned} X &= R \cdot \cos \alpha, \\ Y &= R \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

Queste due forze sono le componenti di R nei due assi assegnati. Per quanto si riferisce alla loro intensità esse coincidono con quelle che si incontrano nell'ordinaria teoria fondata sul principio del parallelogramma delle forze; ma i segmenti OX ed OY che le rappresentano su gli assi *non sono necessariamente*, come nel caso euclideo, le *proiezioni* di R. Infatti, è facile vedere che ove i detti segmenti fossero le proiezioni ortogonali di R su x ed y , varrebbe nel piano l'ipotesi euclidea.

§ 8. Il metodo funzionale usato al § 6, nella composizione delle forze concorrenti, risale in sostanza a D. DE FONCENEX [1734-1799]. Con un procedimento analogo a quello che ci condusse all'equazione cui soddisfa la $f(\alpha) [= y]$, FONCENEX pervenne all'equazione differenziale⁽¹⁶⁶⁾:

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} + k^2y = 0,$$

dalla quale, integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali del problema, ricavò la nota espressione di $f(\alpha)$.

L'applicazione dei principi del calcolo infinitesimale richiede però la continuità e derivabilità di $f(\alpha)$, condizioni, osserva FONCENEX, insite nella stessa natura [fisica] del problema: ma volendo prevenire « *jusqu'aux difficultés les moins fondées* » egli ricorre al calcolo delle *differenze finite* e ad un *equazioni alle differenze*, che gli permette di ottenere $f(\alpha)$ per tutti i valori di α commensurabili con π . Il caso degli α incommensurabili con π si tratta « *par une méthode familière au Géomètres et frequent surtout dans les écrits des Anciens* », vale a dire col metodo d'esauzione⁽¹⁶⁷⁾.

⁽¹⁶⁶⁾ L'equazione potrebbe ottenersi dalla (1) di § 6, nel modo seguente. Posto $\beta = d\alpha$ e supponendo $f(\alpha)$ sviluppabile in serie di TAYLOR per ogni valore di α , si ricava:

$$2f(\alpha) \cdot (f(o) + d\alpha \cdot f'(o) + \frac{d\alpha^2}{2} f''(o) + \dots) = 2f(\alpha) + 2 \frac{d\alpha^2}{2} f''(\alpha) + \dots$$

Uguagliando i coefficienti di $d\alpha^2$ e ponendo $y = f(\alpha)$ e $k^2 = -f''(o)$, si ottiene:

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} + k^2y = 0,$$

c.d.d.

⁽¹⁶⁷⁾ Cfr. FONCENEX: « *Sur les principes fondamentaux de la Méchanique* »; Miscellanea Taurinensia, t. II, p. 305-315, [1760-61]. I ragionamenti di FONCENEX sono riprodotti e illustrati da A. GENOCCHI, nello scritto: « *Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes* »; Torino, Memorie, (2), t. XXIX, p. 366-71, [1877].

Tutto il procedimento di FONCENEX, e così quello svolto al § 6, è indipendente dal postulato d'EUCLIDE: tuttavia va notato che FONCENEX non aveva lo scopo di liberare la legge di composizione delle forze concorrenti dalla teoria delle parallele, ma piuttosto, quello di *dimostrare* la legge in discorso, ritenendo forse, come altri geometri [D. BERNOULLI, D'ALEMBERT], ch'essa fosse una verità indipendente da qualsiasi esperienza.

LA STATICA NON EUCLIDEA.

§ 9. Dimostrato così che la legge analitica per la composizione delle forze concorrenti non dipende dal V postulato di EUCLIDE, passiamo a dedurre la legge secondo cui si compongono le forze perpendicolari ad una retta.

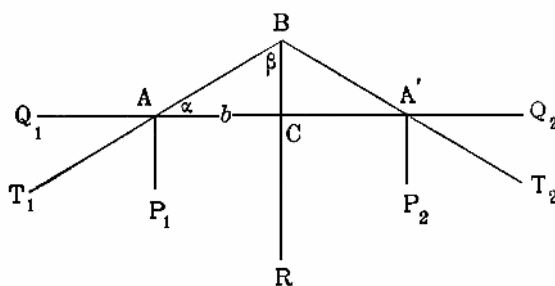


Fig. 62.

Siano A ed A' i punti di applicazione delle due forze P₁, P₂, d'intensità P; sia C il punto di mezzo del segmento AA' e B un punto della perpendicolare CB ad AA'. Congiunto A con B e posto:

$$\beta = \angle ABC, \quad \alpha = \angle BAC$$

è chiaro che la forza P₁ potrà riguardarsi come la componente d'una forza T₁, applicata in A e diretta secondo BA. L'intensità T di questa forza è data da:

$$T = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

L'altra componente Q₁ di T₁, diretta normalmente a P₁, ha per intensità:

$$Q = T \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ripetendo le stesse considerazioni sulla forza P₂ otterremo sul piano i seguenti sistemi di forze:

- 1°) sistema P₁, P₂;
- 2°) sistema P₁, P₂, Q₁, Q₂;
- 3°) sistema T₁, T₂.

Ammettendo di potere trasportare il punto di applicazione di una forza lungo la sua linea di azione è chiaro che i due primi sistemi risultano equivalenti, e poichè il 2° è equivalente al 3° potremo sostituire le due forze P₁, P₂ con le due altre T₁, T₂. Le quali ultime, potendo trasportarsi, lungo la loro linea d'azione, in B, si comporranno nell'unica forza:

$$R = 2T \cdot \cos \beta = 2P \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

trasportabile alla sua volta in C , mantenendone fissa la direzione perpendicolare ad AA' .

Il risultato sopra ottenuto, la cui *indipendenza* dal postulato di EUCLIDE è manifesta, può applicarsi ai tre tipi di geometria.

GEOMETRIA DI EUCLIDE. Nel triangolo ABC , si ha:

$$\cos \beta = \sin \alpha.$$

Segue:

$$R = 2P.$$

GEOMETRIA DI LOBACEFSKI-BOLYAI. Nel triangolo ABC , denotando con $2b$ il segmento AA' , si ha [§ 57]:

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

Segue:

$$R = 2P \cdot \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

GEOMETRIA DI RIEMANN. Sempre nello stesso triangolo si ha:

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cos \frac{b}{k},$$

per cui:

$$R = 2P \cdot \cos \frac{b}{k}.$$

CONCLUSIONE. Nel solo spazio euclideo l'intensità della risultante di due forze uguali e perpendicolari ad una retta è uguale alla somma delle intensità delle due forze date. Negli spazi non-euclidei la risultante dipende, nel modo sopra indicato, dalla distanza dei punti d'applicazione delle due componenti⁽¹⁶⁸⁾.

⁽¹⁶⁸⁾ Per ulteriori sviluppi di statica non euclidea rimandiamo il lettore agli autori seguenti. J. M. DE TILLY: «*Études de Mécanique abstraite*», Mém. Couronnés et autres mém., t. XXI [1870] — J. ANDRADE: «*La Statique et les Géométries de Lobatchewsky, d'Euclide et de Riemann.*», Nota II dell' Op. citata nella nota 160.

§ 10. Il caso di due forze disuguali P, Q, perpendicolari ad una stessa retta, si tratta in modo analogo al precedente. Nella geometria euclidea si perverrebbe alle note relazioni:

$$R = P + Q,$$

$$\frac{R}{p+q} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p};$$

nella geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI, il problema della risultante condurrebbe alle formule seguenti:

$$R = P \cdot \text{Ch} \frac{p}{k} + Q \cdot \text{Ch} \frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{\text{Sh} \frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\text{Sh} \frac{q}{k}} = \frac{Q}{\text{Sh} \frac{p}{k}};$$

dalle quali, con la solita sostituzione delle funzioni circolari alle iperboliche, si passa immediatamente alle corrispondenti della geometria riemanniana:

$$R = P \cdot \cos \frac{p}{k} + Q \cdot \cos \frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{\text{sen} \frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\text{sen} \frac{q}{k}} = \frac{Q}{\text{sen} \frac{p}{k}}.$$

In queste formule p, q indicano le distanze dei punti di applicazione di P e Q da quello di R. Questi risultati possono raccogliersi sotto un'unica forma, valida per la geometria assoluta.

$$R = P \cdot E_p + Q \cdot E_q,$$

$$\frac{R}{\bigcirc_{(p+q)}} = \frac{P}{\bigcirc_q} = \frac{Q}{\bigcirc_p}.$$

Per dedurli direttamente bastava far uso, nei ragionamenti sopra accennati, della trigonometria assoluta, in luogo di quella euclidea e non-euclidea.

DEDUZIONE STATICA DELLA TRIGONOMETRIA PIANA.

§ 11. Vediamo finalmente come sia possibile invertire la questione: *data cioè la legge di composizione delle forze dedurre le relazioni fondamentali della trigonometria.*

Perciò osserviamo che la intensità R della risultante di due forze $[P]$ uguali e perpendicolari ad un asse $AA' = 2b$, sarà in generale funzione di P e b : denotando con $\varphi(P, b)$ questa funzione, avremo:

$$R = \varphi(P, b),$$

o, più semplicemente⁽¹⁶⁹⁾:

$$R = P \cdot \varphi(b).$$

D'altra parte nel § 9 fummo condotti alla seguente espressione di R :

$$R = 2P \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Eliminando fra questa e la precedente R e P , si ricava:

$$\varphi(b) = 2 \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

Nota dunque l'espressione analitica di $\varphi(b)$, la formula ottenuta porgerà una relazione fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.

Per determinare $\varphi(b)$ è necessario stabilire la relativa equazione funzionale. Perciò si applichino perpendicolarmente alla retta AA' quattro forze uguali P_1, P_2, P_3, P_4 , in modo che i punti di applicazione di P_1, P_4 , distino fra loro di $2(a+b)$ e quelli di P_2 e P_3 di $2(b-a)$.

⁽¹⁶⁹⁾ La proporzionalità fra R e P discende dalla *legge associativa*, che sta a fondamento della composizione delle forze. Infatti, immaginiamo di decomporre ciascuna forza P , applicata in A ed A' , nella somma di n forze, d'intensità P/n : componendo, otterremo per R la seguente espressione:

$$R = n \cdot \varphi \left(\frac{P}{n}, b \right)$$

Paragonando questa con l'altra data nel testo, si ricava:

$$\varphi \left(\frac{P}{n}, b \right) = \frac{1}{n} \varphi(P, b)$$

In modo analogo si dimostra la formula:

$$\varphi(kP, b) = k \varphi(P, b)$$

per ogni k razionale, e la si estende poi ai k irrazionali. Sicchè, se poniamo $P = 1, k = P$, avremo:

$$\varphi(P, b) = P \cdot \varphi(b),$$

c. d. d.

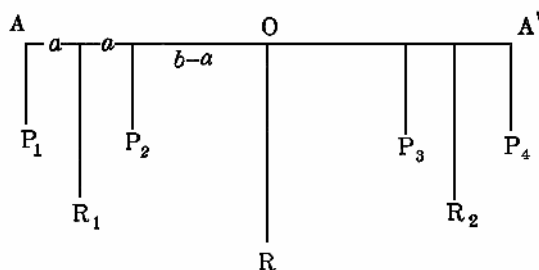


Fig. 63.

Potremo determinare la risultante R di queste quattro forze in due modi diversi.
 1°) Componendo P₁ con P₂ e P₃ con P₄, si ottengono due forze R₁, R₂, d'intensità:

$$P. \varphi(a);$$

componendo R₁ con R₂ otterremo:

$$R = P. \varphi(a) . \varphi(b).$$

2°) Componendo P₁ con P₄ si ottiene una forza d'intensità:

$$P. \varphi(b + a);$$

componendo P₂ con P₃ si ottiene un'altra forza d'intensità:

$$P. \varphi(b - a).$$

Componendo finalmente queste due risultanti parziali si ottiene:

$$R = P. \varphi(b + a) + P. \varphi(b - a).$$

Dalle due espressioni di R si ricava l'equazione funzionale a cui soddisfa $\varphi(b)$:

$$(2) \varphi(b) . \varphi(a) = \varphi(b + a) + \varphi(b - a).$$

Questa equazione, ponendo $\varphi(b) = 2f(b)$, s'identifica con quella incontrata al § 6 trattando la composizione delle forze concorrenti.

Il metodo seguito per ottenere la (2) è dovuto a D'ALEMBERT⁽¹⁷⁰⁾: se però si suppongono a e b uguali fra loro e si osserva che $\varphi(o) = 2$, si ricade in un'altra equazione:

$$(3) [\varphi(x)]^2 = \varphi(2x) + 2,$$

incontrata anteriormente da FONCENEX, trattando il problema dell'equilibrio della leva⁽¹⁷¹⁾.

§ 12. Il problema statico della composizione delle forze è ridotto all'integrazione di un'equazione funzionale.

⁽¹⁷⁰⁾ «Opuscles mathématiques.», t. VI, p. 371 [1779].

⁽¹⁷¹⁾ Cfr. la citata memoria di FONCENEX, p 319-22.

FONCENEX, che fu il primo a trattarlo così⁽¹⁷²⁾, ritenne essere $\varphi(x) = costante$ l'unica soluzione della (3), avendo la *costante*, come facilmente si verifica, il valore numerico 2. Successivamente LAPLACE e D'ALEMBERT integrarono la (3), ottenendo:

$$\varphi(x) = e^{x/c} + e^{-x/c},$$

dove c è una costante oppure una funzione qualsiasi, che assume lo stesso valore mutando x in $2x$ ⁽¹⁷³⁾.

La soluzione di LAPLACE e D'ALEMBERT, applicata al problema statico del precedente §, conduce poi ad escludere il caso in cui c sia funzione di x ; inoltre, essendo inammissibili per c i valori del tipo $a + ib$, con a e b diversi da zero, avremo tre casi possibili, a seconda che c è reale, immaginario puro, infinito⁽¹⁷⁴⁾. Corrispondentemente a questi tre casi abbiamo tre leggi possibili per la composizione delle forze e conseguentemente tre tipi distinti di relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo. Questi risultati possono raccogliersi nella seguente tabella, ove con k s'indica un numero essenzialmente reale e positivo.

valore di c	forma di $\varphi(x)$	Relazioni trigonometriche	Tipo di piano
$c = k$	$e^{x/k} + e^{-x/k} = 2 \operatorname{Ch} \frac{x}{k}$	$\operatorname{Ch} \frac{b}{k} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$	iperbolico
$c = ik$	$e^{ix/k} + e^{-ix/k} = 2 \cos \frac{x}{k}$	$\cos \frac{b}{k} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$	ellittico
$c = \infty$	$e^{x/\infty} + e^{-x/\infty} = 2$	$1 = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$	parabolico

CONCLUSIONE. La legge di composizione delle forze perpendicolari ad una retta caratterizza dunque, in un certo senso, le relazioni che intercedono fra i lati e gli angoli d'un triangolo e perciò le proprietà geometriche del piano e dello spazio.

Questo fatto fu segnalato e messo in evidenza da A. GENOCCHI [1817-1889] in alcuni scritti importantissimi⁽¹⁷⁵⁾, ai quali rimandiamo il lettore per tutte le notizie storiche e bibliografiche che interessano l'argomento.

⁽¹⁷²⁾Altrove [§ 24], parlando dello scritto sulla meccanica di FONCENEX, si disse che LAGRANGE ne fu l'ispiratore, se non l'autore. Questa opinione, accolta da GENOCCHI e da altri geometri, risale a DELAMBRE. Ecco come si esprime l'illustre biografo di LAGRANGE. «Il [LAGRANGE] fournissait à FONCENEX la partie analytique des ses mémoires en lui laissant le soin de développer les raisonnemens sur lesquels portaient ses formules. En effet, on remarque déjà dan ces mémoires [di FONCENEX] cette marche purement analytique, qui depuis a fait le caractère des grandes productions de LAGRANGE. Il avait trouvé une nouvelle théorie du levier.» — *Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte Lagrange*; Mém. Inst. de France, classe Math. et Phy., t. XIII, p. XXXVj [1812].

⁽¹⁷³⁾Cfr. D'ALEMBERT: «*Sur les principes de la Mécanique*»; Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris [1769]. — LAPLACE: «*Recherches sur l'intégration des équations différentielles, etc.*»; Mém. Ac. Sciences de Paris (Savants étrangers), t. VII [1773]. — *Oeuvres de Laplace*, t. VIII, p. 106-107.

⁽¹⁷⁴⁾A questo risultato si può giungere direttamente integrando la (2), o, ciò che fa lo stesso, la (1) del § 6. Si veggia, in proposito, il metodo elementare usato da CAUCHY per determinare la $f(a)$ soddisfacente alla (1): *Oeuvres de Cauchy*, II^e serie, t. III, p. 106-113.

⁽¹⁷⁵⁾Uno di essi è la memoria citata a nota 166, l'altro, che risale al 1869, ha per titolo: «*Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide*»; *Annali della Società italiana delle Scienze*, (3), t. II, p. 153-89.

NOTA II.

Le parallele e la superficie di Clifford. Cenni sul problema di Clifford-Klein.

LE PARALLELE DI CLIFFORD.

§ 1. Le parallele d'EUCLIDE sono rette che posseggono i seguenti requisiti:

- a) appartenere ad un piano,
- b) non avere punti in comune,
- c) essere equidistanti.

Lasciando cadere il requisito *c*) e seguendo le vedute di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI si ottiene una prima estensione del concetto di parallelismo, ma le parallele che ad essa rispondono hanno pochissime proprietà in comune con le parallele ordinarie. Ciò si deve al fatto che le più eleganti proprietà che s'incontrano studiando queste ultime dipendono sostanzialmente dal requisito *c*). Si può quindi cercare di estendere il concetto di parallelismo, in modo da conservare, ove sia possibile, alle *nuove parallele* i caratteri che dipendono dalla equidistanza euclidea. Perciò, seguendo W. K. CLIFFORD [1845-1879], lasciamo cadere, nella definizione di parallele, *il requisito della coplanarità*, fermi restando gli altri due. La nuova definizione di parallele sarà dunque la seguente: *due rette, coplanari o sghembe, si dicono parallele quando i punti dell'una sono equidistanti dall'altra.*

§ 2. Si presentano allora due casi, a seconda che sifatte parallele appartengano o no allo stesso piano.

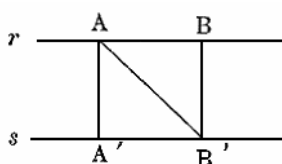


Fig. 64.

Il caso in cui le rette equidistanti siano coplanari è senz'altro esaurito, inquantochè i precedenti sviluppi [§ 8] ci permettono di asserire che lo spazio corrispondente è l'ordinario euclideo. Supporremo perciò che le due rette equidistanti *r, s* siano sghembe e che i segmenti di perpendicolare calati dai punti di *r* su *s* siano uguali: questi segmenti saranno evidentemente perpendicolari anche ad *r*. Siano *AA', BB'* due sifatti segmenti. Il quadrilatero sghembo *ABB'A'*, che così ne risulta, ha i quattro angoli retti e due lati opposti uguali. È facile vedere che anche gli altri due lati opposti *AB, A'B'* sono uguali e che ciascuna diagonale, ad es *AB'*, forma con le due parallele angoli alterni interni uguali. Ciò risulta dalla congruenza dei due triangoli rettangoli *AA'B', AB'B*.

Se ora si esamina il triedro *A (A'B'B)*, in forza d'un teorema sulle faccie, valido ad un tempo nei tre sistemi geometrici, potremo scrivere:

$$\hat{A'A'B'} + \hat{B'A'B} > \hat{A'AB} = 1 \text{ retto.}$$

Questa relazione, stante l'uguaglianza dei due angoli *AB'A', B'AB*, può scriversi così:

$$\hat{A'AB'} + \hat{A'B'A'} > 1 \text{ retto.}$$

Sotto la nuova forma essa ci dice che nel triangolo rettangolo *AA'B'* la somma degli angoli acuti è maggiore di un angolo retto. Ciò significa che nel triangolo in discorso è verificata l'*ip. ang. ottuso* e conseguentemente che le *parallele sghembe possono sussistere solo nello spazio di RIEMANN*.

§ 3. Per dimostrare poi che nello spazio *ellittico* di RIEMANN esistono effettivamente delle coppie di rette sghembe equidistanti, consideriamo una retta arbitraria r e gli infiniti piani ad essa perpendicolari: questi piani passano tutti per un'altra retta r' , la polare di r nella polarità assoluta dello spazio ellittico. Un qualsiasi segmento che congiunga un punto di r con un punto di r' è perpendicolare tanto ad r quanto ad r' ed ha una lunghezza costantemente uguale alla semiretta. Da ciò risulta che r ed r' sono rette sghembe equidistanti.

Ma due siffatte equidistanti offrono un caso particolarissimo, inquantochè tutti i punti di r hanno la stessa distanza non solo da r , ma *da tutti i punti di r'* .

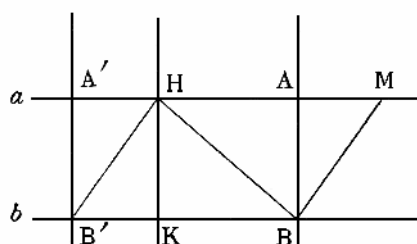


Fig. 65.

Per mettere in luce l'esistenza di rette equidistanti, in cui l'ultima particolarità non abbia luogo, consideriamo ancora due rette r ed r' , l'una polare dell'altra e su di esse i rispettivi segmenti AB , $A'B'$ uguali ad un segmento dato, minore della semiretta⁽¹⁷⁶⁾. Congiungendo A con A' e B con B' si ottengono due rette a , b , non polari l'una dell'altra e perpendicolari entrambe alle due rette r , r' . Si può facilmente dimostrare che a e b sono equidistanti. Perciò si fissi su AA' un segmento $A'H$, poi sul segmento supplementare⁽¹⁷⁷⁾ di $A'HA$ si fissi il segmento AM uguale ad $A'H$. Congiunti i punti H ed M rispettivamente con B' e B si ottengono due triangoli rettangoli $A'B'H$, ABM , che, in forza delle costruzioni fatte, risultano congruenti. Si avrà perciò la seguente uguaglianza:

$$HB' = BM$$

Se ora si congiunge H con B e si paragonano i due triangoli $HB'B$, HBM , si vede immediatamente ch'essi sono uguali, avendo il lato HB in comune, i lati HB' , MB uguali in forza della precedente relazione, i lati $B'B$ e HM pure uguali perchè ciascuno di essi è una semiretta. I due triangoli in discorso avranno perciò uguali anche le altezze HK , BA corrispondenti ai lati uguali BB' e HM . Ciò esprime, in altre parole, che i vari punti della retta a sono equidistanti dalla retta b . E poichè il ragionamento può ripetersi partendo dalla retta b , calando le perpendicolari sulla a , si conclude che il segmento HK , oltre essere perpendicolare a b è anche perpendicolare ad a .

Si osservi poi che dall'uguaglianza dei vari segmenti AB , HK , $A'B'$... si deduce l'uguaglianza dei rispettivi segmenti supplementari, per cui le due rette a , b possono riguardarsi equidistanti l'una dall'altra in due modi diversi. Quando poi avvenisse che il segmento AB fosse uguale al suo supplementare, allora si presenterebbe il caso eccezionale precedente notato, in cui a e b sono polari l'una dell'altra e conseguentemente tutti i punti di a avrebbero uguale distanza dai vari punti di b .

§ 4. Le parallele sghembe dello spazio ellittico furono scoperte da CLIFFORD nel 1873⁽¹⁷⁸⁾. Ecco, le loro proprietà più notevoli.

1). *Due parallele formano con ogni loro trasversale angoli corrispondenti uguali, angoli alterni interni uguali, etc.*

⁽¹⁷⁶⁾ Nella fig. 65, mancano le due lettere r , r' , corrispondenti alle due rette AB , $A'B'$

⁽¹⁷⁷⁾ I due segmenti che due punti determinano sopra una retta si dicono supplementari.

⁽¹⁷⁸⁾ «*Preliminary Shetch on Biquaternions.*»; Proceedings of the London Math. Society, t. IV p. 381-95 [1873]

— Math. Papers di CLIFFORD; p. 181-200.

2). Se in un quadrilatero sghembo i lati opposti sono uguali e gli angoli adiacenti supplementari, i lati opposti sono paralleli.

Un sifatto quadrilatero potrà quindi chiamarsi *parallelogramma sghembo*.

Delle due enunciate proprietà la prima si verifica immediatamente, la 2) potrebbe dimostrarsi con un ragionamento dello stesso tipo di quello del § 3.

3). Se due segmenti sono uguali e paralleli, congiungendo opportunamente i loro estremi si ottiene un *parallelogramma sghembo*.

Questa proprietà, che può considerarsi, in un certo senso, come inversa della 2), è pure essa di immediata verificaione.

4). Per un punto qualunque [M] dello spazio, che non appartenga alla polare di una retta [r], passano due parallele a quella retta.

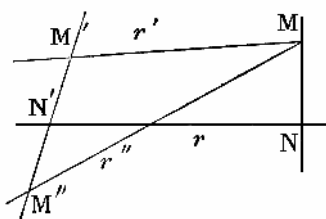


Fig. 66.

Infatti, dal punto M si cali la perpendicolare MN su r e sia N' il punto in cui la polare di MN interseca la r. Su questa polare si fissino poi i due segmenti N'M', N'M'' uguali ad NM e si congiungano i punti M', M'' con M. Le due rette r', r'', così ottenute, sono le parallele richieste.

Se poi M appartenesse alla polare di r, sarebbe MN uguale alla semiretta ed i due punti M'', M' coinciderebbero. Conseguentemente verrebbero a coincidere anche le due parallele r', r''.

L'angolo compreso fra le due parallele r' r'' può misurarsi col segmento M'M'' che i suoi lati intercettano sulla polare del vertice: allora potremo dire che la metà dell'angolo r' r'', cioè l'angolo di parallelismo, è uguale alla distanza di parallelismo.

Per distinguere le due parallele r', r'' consideriamo un movimento *elicoidale* dello spazio, di asse MN, nel quale evidentemente resta fisso il fascio dei piani perpendicolari ad MN e l'asse M'M'' di questo fascio. Un tale movimento si può considerare come risultante da una traslazione lungo MN, accompagnata da una rotazione intorno alla stessa retta; oppure da due traslazioni, l'una lungo MN, l'altra lungo M'M''. Se le due traslazioni hanno uguale *ampiezza* si ottiene uno *scorrimento* dello spazio.

Gli scorrimenti possono essere *destrorsi* o *sinistrorsi*. Allora, riferendoci alle due parallele r', r'', è chiaro che una di esse potrà sovrapporsi ad r con uno scorrimento destrorso di ampiezza MN, mentre l'altra si sovrapporrebbe ad r con uno scorrimento sinistrorso della stessa ampiezza. Perciò le due rette r', r'' si dovranno dire l'una *parallela destrorsa*, l'altra *parallela sinistrorsa* ad r.

5) Due parallele destrorse [sinistrorse] ad una stessa retta sono parallele destrorse [sinistrorse] fra loro.

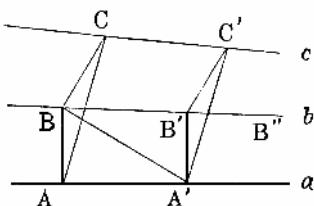


Fig. 67.

Siano b, c parallele destrorse ad a . Dai due punti A, A' di a , distanti fra loro della semiretta, caliamo le perpendicolari $AB, A'B'$ su b e le perpendicolari $AC, A'C'$ su c . Le rette $A'B', A'C'$ sono le polari di AB ed AC , perciò l'angolo BAC è uguale all'angolo $B'A'C'$. Inoltre, per le proprietà delle parallele, sussistono le seguenti uguaglianze segmentarie:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C',$$

per cui i due triangoli $ABC, A'B'C'$ sono uguali. Segue l'uguaglianza dei due segmenti $BC, B'C'$. Inoltre essendo:

$$BB' = AA' = CC',$$

il quadrilatero sghembo $BB'C'C$ ha i lati opposti uguali.

Ma per stabilire che b, c sono parallele occorre anche dimostrare che gli angoli adiacenti del quadrilatero in discorso sono supplementari [cfr. 2)]. Per ciò paragoniamo i due triedri $B (AB'C), B' (A'B''C')$. In essi sussistono intanto le seguenti uguaglianze tra faccie:

$$\begin{aligned} \widehat{AB'B'} &= \widehat{A'B''B''} = 1 \text{ retto.} \\ \widehat{ABC} &= \widehat{A'B'C'}. \end{aligned}$$

Inoltre i due diedri di spigolo BA e $B'A'$ sono entrambi uguali ad un diedro retto, diminuito [od aumentato] del diedro che ha per sezione normale l'angolo $A'BB'$: segue l'uguaglianza dei due triedri in discorso, quindi l'uguaglianza delle due faccie $B'B'C, B''B''C'$. Da ciò si deduce che gli angoli B e B' del quadrilatero $BB'C'C$ sono supplementari e successivamente [tracciando le diagonali del quadrilatero, etc.] che \widehat{B} è supplementare di \widehat{C} , che \widehat{C} è supplementare di $\widehat{C'}$, etc.

Potremo dunque asserire che b e c sono parallele. Che il parallelismo fra b e c sia destrorso, se tale è il parallelismo fra le due rette in discorso e la retta a , si verifica intuitivamente esaminando la figura.

LA QUADRICA DI CLIFFORD.

§ 5. Dalle precedenti considerazioni risulta che *tutte le rette che si appoggiano a tre parallele destrorse sono fra loro parallele sinistrorse*. Infatti, se ABC è una secante comune alle tre rette a, b, c e se si prendono su queste rette, in uno stesso verso⁽¹⁷⁹⁾, tre segmenti uguali AA', BB', CC' , i punti A', B', C' appartengono ad una retta parallela ad ABC . Il parallelismo fra ABC ed $A'B'C'$ è poi sinistrorso.

Da ciò si deduce che tre parallele a, b, c definiscono una superficie rigata del 2° ordine [*quadrica di Clifford*], di cui le rette incidenti ad a, b, c costituiscono un primo sistema di generatrici $[g_s]$: il 2° sistema di generatrici $[g_d]$ è costituito dalle infinite rette che, come a, b, c , si appoggiano alle g_s .

Alla quadrica di CLIFFORD competono le seguenti proprietà caratteristiche:

- a) due generatrici d'uno stesso sistema sono fra loro parallele;
- b) due generatrici di sistema diverso s'incontrano sotto un angolo costante.

§ 6. Passiamo a dimostrare che *la superficie di CLIFFORD ammette due assi distinti di rotazione*. Perciò da un punto qualunque M tracciamo le parallele d [destrorsa], s [sinistrorsa] ad una

⁽¹⁷⁹⁾ È chiaro che fissato *un verso* sopra una retta, resta pure fissato un verso sopra ogni altra retta ad essa parallela.

retta r , e indichiamo con δ la distanza MN di ciascuna parallela da r . Tenuta fissa la d facciamo ruotare s intorno ad r e siano s', s'', s''', \dots le successive posizioni che acquista s in questa rotazione. È chiaro che s, s', s'', \dots sono tutte parallele sinistrorse ad r e che si appoggiano tutte alla retta d : sicchè s , nella sua rotazione intorno ad r , genera una superficie di CLIFFORD.

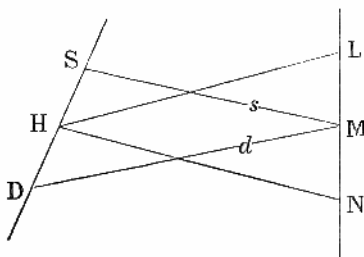


Fig. 63.

Viceversa se d ed s sono due generatrici d'una superficie di CLIFFORD, passanti per un punto M della superficie, e 2δ l'angolo fra esse compreso, possiamo elevare in M la perpendicolare al piano sd e su essa fissare i due, segmenti $MN = ML = \delta$. Denotando poi con D ed S i punti cui la polare di LN incontra rispettivamente le rette d, s e con H il punto di mezzo di $DS = 2\delta$, le rette HL, HN sono parallele tanto ad s quanto a d . Delle due rette HL, HN scegliamo quella che risulta parallela destrorsa a d e sinistrorsa ad s : sia, ad es., HN. Allora la data superficie di CLIFFORD si può generare con la rotazione di s o d intorno ad HN. Con ciò è provato che ogni superficie di CLIFFORD ammette un'asse di rotazione e che tutti i punti della superficie sono equidistanti da esso.

L'esistenza di un altro asse di rotazione risulta immediatamente dall'osservare che tutti i punti dello spazio equidistanti da HN sono pure equidistanti dalla retta polare di HN, la quale sarà perciò il 2° asse di rotazione della superficie di CLIFFORD.

§ 7. L'equidistanza dei punti della superficie di CLIFFORD da ciascun asse di rotazione conduce ad un'altra notevolissima proprietà della superficie. Infatti, ogni piano passante per un asse $[r]$ la interseca in una linea equidistante dall'asse: i punti di tal linea, avendo anche uguali distanze dal punto [O] in cui il piano secante incontra l'altro asse della superficie, appartengono ad un cerchio, il cui centro [O] è il polo di r rispetto alla linea in discorso. I meridiani ed i paralleli della superficie sono dunque cerchi.

La superficie allora potrà generarsi facendo ruotare un cerchio intorno alla polare del suo centro ovvero facendo scorrere un cerchio in modo che il suo centro descriva una retta ed il suo piano si mantenga costantemente ad essa perpendicolare [BIANCHI⁽¹⁸⁰⁾].

L'ultimo modo di generazione, appartenendo anche al cilindro euclideo, mette in evidenza l'analogia fra la superficie di CLIFFORD e l'ordinario cilindro circolare. Questa analogia potrebbe svilupparsi ulteriormente considerando le proprietà delle traiettorie [eliche] dei punti della superficie, generate con un movimento elicoidale dello spazio intorno ad uno qualunque degli assi della quadrica.

§ 8. Vediamo finalmente come la geometria sulla superficie di CLIFFORD, intesa nel senso da noi dichiarato nei §§ 67, 68, coincida con quella d'EUCLIDE. Perciò determiniamo la legge secondo cui si misurano, sulla superficie, le distanze elementari $[ds]$.

⁽¹⁸⁰⁾ «Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica»; Annali di Mat, (2), XXIV, pag. 107 [1896]. — «Lezioni di Geometria differenziale.», p. 454.

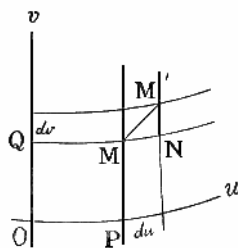


Fig. 69.

Siano u, v un parallelo ed un meridiano uscenti da un punto O sulla superficie ed M un punto arbitrario di essa: il meridiano ed il parallelo passanti per M intersecano rispettivamente su u e v due archi OP, OQ , le cui lunghezze u, v saranno le coordinate di M . È manifesta l'analogia fra l'adottato sistema di coordinate e il sistema cartesiano ortogonale.

Sia M' un punto infinitamente vicino ad M : se u, v sono le coordinate di M , quelle di M' potranno indicarsi con $u + du, v + dv$. Se ora si considera il triangolo infinitesimo $MM'N$, il cui terzo vertice N è il punto in cui s'incontrano il parallelo di M col meridiano di M' , è chiaro che l'angolo MNM' è retto e che le lunghezze MN, NM' dei cateti sono precisamente du, dv .

D'altra, parte, il triangolo in discorso può riguardarsi come rettilineo [giacente sul piano tangente in M], sicchè, per le proprietà infinitesimali dei triangoli piani, la sua ipotenusa ds è legata ai cateti du, dv dal teorema di PITAGORA:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Ma questa forma per ds^2 è caratteristica della geometria ordinaria, sicchè potremo senz'altro affermare che *in ogni regione normale della superficie di CLIFFORD sono verificate le proprietà del piano euclideo*.

Un'importante applicazione di questo fatto conduce al calcolo dell'area della quadrica in discorso. Infatti, decomponiamo quest'ultima in tanti parallelogrammi congruenti infinitesimi per mezzo delle sue generatrici: l'area di uno di siffatti parallelogrammi avrà l'ordinaria espressione:

$$dx \cdot dy \cdot \text{sen } \theta,$$

ove dx, dy rappresentano le lunghezze dei lati e θ l'angolo costante fra essi compreso [ang. di due generatrici].

L'area della quadrica sarà allora:

$$\Sigma dx \cdot dy \cdot \text{sen } \theta = \text{sen } \theta \cdot \Sigma dx \cdot \Sigma dy.$$

Ma entrambe le sommatorie: $\Sigma dx, \Sigma dy$ rappresentano la lunghezza l della retta, per cui l'area Δ della superficie di CLIFFORD acquista la semplicissima espressione:

$$\Delta = l^2 \cdot \text{sen } \theta,$$

identica a quella che esprime l'area d'un parallelogramma euclideo [CLIFFORD⁽¹⁸¹⁾].

CENNI SUL PROBLEMA DI CLIFFORD -KLEIN.

⁽¹⁸¹⁾ «Preliminary Sketch...», citato a nota 177. — Le proprietà della quadrica in discorso, rapidamente accennate da CLIFFORD nel 1873, trovarono un maggiore sviluppo nello scritto di KLEIN: «Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.» [Math. Ann. t. XXXVII, p. 544-72, 1890].

§ 9. Le idee di CLIFFORD, illustrate nei precedenti §§, condussero KLEIN a un nuovo modo di formulare il problema fondamentale della geometria. Volendo dare un rapido cenno delle vedute di KLEIN riferiamoci ai risultati del § 68, relativi alla possibilità di interpretare la geometria piana con quella delle superficie di curvatura costante. Il raffronto fra le proprietà dei piani euclideo e non-euclideo e quelle delle superficie in discorso fu allora ristretto a regioni convenientemente limitate: allargando il confronto alle *forme complete* si incontreranno in generale delle differenze, imputabili talvolta alla presenza di *punti singolari* delle superficie [es. vertice di un cono], tal'altra alla *connessione* di esse.

Prescindiamo dai punti singolari e come esempio di superficie a curvatura costante, *ovunque regolare*, dotata di una connessione diversa da quella del piano euclideo, consideriamo l'ordinario cilindro.

La differenza fra la geometria piana e quella cilindrica, intese l'una e l'altra in senso integrale, fu già rilevata [§ 70] osservando che il postulato della congruenza fra due rette arbitrarie cessa di essere vero sul cilindro. Non di meno esistono numerose proprietà comuni alle due geometrie, tracenti origine dal duplice carattere di avere tanto il piano quanto il cilindro la stessa curvatura e di essere entrambi regolari.

Queste proprietà possono riassumersi dicendo:

1) la geometria d'una regione normale di cilindro è identica alla geometria d'una regione normale di piano;

2) la geometria d'una *qualsiasi* regione normale di cilindro, fissata intorno ad un punto *arbitrario* di esso, è identica alla geometria d'una *qualsiasi* regione normale di piano.

L'importanza di un raffronto fra la geometria del piano e quella d'una superficie, fondato sulle proprietà 1) e 2), emerge dalle seguenti considerazioni.

Una geometria del piano, edificata con criteri sperimentali, dipende da due gruppi distinti di ipotesi. Il primo gruppo esprime la validità di certi fatti, direttamente osservati in un interno accessibile alle esperienze [*postulati della regione normale*]; il secondo gruppo estende a regioni inaccessibili alcune proprietà della regione iniziale [*postulati d'estensione*].

I postulati d'estensione potrebbero richiedere, ad es., che sull'intero piano fossero valide le proprietà della regione accessibile: saremmo allora condotti alle due forme di piano parabolica ed iperbolica; se invece i detti postulati richiedessero l'estensione delle proprietà in discorso, con eventuale riserva per quella che attribuisce alla retta i caratteri della linea aperta, insieme ai due piani indicati, dovremmo annoverare anche il piano ellittico.

Ma le precedenti considerazioni sulle superficie regolari di curvatura costante suggeriscono un modo più generale di enunciare i postulati d'estensione: potremmo infatti semplicemente richiedere che intorno a ciascun punto del piano fossero verificate le proprietà della regione iniziale. Allora la classe delle possibili forme di piano si allarga notevolmente: si potrebbe, ad es., concepire una forma a curvatura nulla, doppiamente connessa e rappresentabile completamente sul cilindro dello spazio euclideo.

La ricerca di tutte le varietà a due dimensioni, di curvatura costante, ovunque regolari, forma oggetto del problema di CLIFFORD-KLEIN.

§ 10. E possibile realizzare con opportune superficie regolari a curvatura costante dello spazio euclideo, tutte le *forme* di CLIFFORD-KLEIN?

La risposta è negativa, come risulta chiaramente dal seguente esempio. La sola superficie regolare *svilupabile* dello spazio euclideo, la cui geometria non sia identica a quella del piano è il cilindro a sezione chiusa: d'altra parte la quadrica di CLIFFORD dello spazio ellittico è una superficie regolare, di curvatura nulla, essenzialmente diversa dal piano e dal cilindro.

Però con opportune *convenzioni* si può *rappresentare* nello spazio ordinario anche la quadrica di CLIFFORD.

Riferiamoci in primo luogo al cilindro. Volendo *sviluppare* il cilindro è necessario renderlo *semplicemente connesso* con un taglio lungo una generatrice $[g]$: dopo, con flessione senza estensione, lo si adagia sul piano, ricoprendone una *striscia* compresa fra due parallele $[g_1, g_2]$.

Fra i punti del cilindro e quelli della striscia intercede una corrispondenza *biunivoca*: fanno solo eccezione i punti della generatrice g , a ciascuno dei quali corrispondono due punti, situati l'uno su g_1 l'altro su g_2 . Però se si *conviene* di riguardare questi due punti come *identici*, cioè come un unico punto, allora la corrispondenza diventa biunivoca senza eccezione, e *la geometria della striscia è integralmente la stessa di quella del cilindro*.

Una rappresentazione analoga alla descritta si può istituire anche per la quadrica di CLIFFORD. Prima si rende la superficie semplicemente connessa con due tagli lungo le generatrici $[g, g']$ uscenti da un suo punto, ottenendo, nello spazio ellittico, un parallelogramma sghembo, i cui lati hanno ciascuno la lunghezza della retta e i cui angoli θ e θ' [$\theta + \theta' = 2$ retti] sono gli angoli formati da g e g' .

Ciò posto fissiamo sul piano euclideo un rombo, i cui lati abbiano la lunghezza della retta ellittica ed i cui angoli siano θ e θ' . Su questo rombo può rappresentarsi *congruentemente* [svilupparsi] la quadrica di CLIFFORD. La corrispondenza fra i punti della superficie e quelli del rombo è biunivoca, con eccezione per i punti di g e g' , a ciascuno dei quali ne corrispondono due, situati su lati opposti del rombo. Però, se si conviene di riguardare come a due a due identici questi punti, allora la corrispondenza risulta biunivoca senza eccezione e *la geometria del rombo è integralmente identica a quella della quadrica di CLIFFORD*⁽¹⁸²⁾.

§ 11. Le indicate rappresentazioni del cilindro e della superficie di CLIFFORD ci mostrano come, per il caso della curvatura nulla, la ricerca delle forme di CLIFFORD-KLEIN possa ricondursi alla determinazione di convenienti poligoni euclidei, eventualmente degeneri in striscie, i cui lati sono a due a due trasformabili l'uno nell'altro con opportuni movimenti del piano, ed i cui angoli hanno per somma quattro angoli retti [KLEIN⁽¹⁸³⁾]. Dopo non rimarrà che a riguardare a due a due come identici i punti dei lati predetti, per avere sul piano ordinario le immagini delle forme richieste.

In modo analogo si presenta la ricerca delle forme di CLIFFORD-KLEIN, per il valore positivo e negativo della curvatura e la successiva estensione allo spazio di rifatto problema⁽¹⁸⁴⁾.

⁽¹⁸²⁾ Cfr.: «*Preliminary Sketch...*». — Vedi pure il citato [nota 180] scritto di KLEIN: «*Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*».

⁽¹⁸³⁾ Opera citata.

⁽¹⁸⁴⁾ Una trattazione sistematica del problema di CLIFFORD-KLEIN si trova nell'opera di W. KILLING: «*Einführung in die Grundlagen der Geometrie*», Bd. I, p. 271-349 [Paderborn, 1893].

ELENCO DEGLI AUTORI CITATI

Aganis [*VI secolo?*]
 Alembert (d') J. le Rond [*1717-1783*]
 Al-Nirizi [*IX secolo*]
 Andrade J.
 Archimede [*287-212*]
 Aristotile [*384-322*]
 Arnauld A. [*1612-1694*]

Baltzer R. [*1818-1887*]
 Barozzi F. [*XVI secolo*]
 Bartels J. M. C. [*1769-1836*]
 Battaglini G. [*1826-1894*]
 Beltrami E. [*1835-1900*]
 Bernoulli D. [*1700-1782*]
 Bernoulli J. [*1744-1807*]
 Bertrand E.
 Bessel F. W. [*1784-1846*]
 Besthorn R. O.
 Bianchi L.
 Biot J. B. [*1774-1862*]
 Boccardini G.
 Bolyai J. [*1802-1860*]
 Bolyai W. [*1775-1856*]
 Boncompagni B. [*1821-1894*]
 Bonola R.
 Borelli G. A. [*1608-1679*]

Campano G. [*XIII secolo*]
 Candalla F. [*1502-1594*]
 Cataldi P. A. [*1548 circa - 1626*]
 Carnot L. N. M. [*1753-1823*]
 Cassani P. [*1832-1905*]
 Castillon G. [*1708-1791*]
 Cauchy A. L. [*1789-1857*]
 Cayley A. [*1821-1895*]
 Chasles M. [*1796-1880*]
 Clavio C. [*1537-1612*]
 Clifford W. K. [*1845-1879*]
 Codazzi D. [*1824-1873*]
 Commandino F. [*1509-1575*]
 Couturat L.
 Cremona L. [*1830-1903*]
 Curtze M.

Dedekind J. W. R. [*1831-1899*]
 Dehn M.
 Delambre J. B. J. [*1749-1822*]
 Dickstein S.
 Duhem P.

Eckwehr J. W. von [1789-1857]
Engel F.
Enriques F.
Eötvös.
Euclide [330-275]

Fano G.
Flauti V. [1782-1863]
Foncenex (de) D. [1734-1799]
Forti A. [1818-?]
Fourier J. B. [1768-1830]
Frattini G.
Friedlein G.

Gauss C. F. [1777-1855]
Gemino [1° secolo a. C.]
Genocchi A. [1817-1889]
Gerling Ch. L. [1788-1864]
Gherardo da Cremona [XII secolo]
Giordano Vitale [1633-1711]
Gregory D. [1661-1710]
Günther S.

Halsted G. B.
Hauff J. K. F. [1766-1846]
Heilbronner J. C. [1706-1745]
Heiberg J. L.
Helmholtz H. [1821-1894]
Hilbert D.
Hindenburg C. F. [1741-1808]
Hoffmann J. [1777-1866]
Holmgren E. A.
Hoüel J. [1823-1886]

Kaestner A. G. [1719-1800]
Killing W.
Klein C. F.
Klügel G. S. [1739-1812]
Kürschák J.

Lagrange J. L. [1736-1813]
Laguerre E. N. [1834-1886]
Lambert J. H. [1728-1777]
Laplace P. S. [1749-1827]
Legendre A. M. [1752-1833]
Leibniz G. W. F. [1646-1716]
Lie S. [1842-1899]
Liebmann H.
Lobacefschi N. I. [1793-1856]
Lorenz J. F. [1738-1807]

Lütkemeyer G.

Mach E.

Minding F. [1806-1885]

Moebius A. F. [1790-1868]

Monge G. [1746-1818]

Montucla J. E., [1725-1799]

Morgan (de) A. [1806-1871]

Nasîr Eddîn [1201-1274]

Newton I. [1642-1726]

Olbers H. W. M. [1758-1840]

Oliviero di Bury [*I^a metà XII sec.*]

Ovidio (d') E.

Paciolo Luca [*circa 1445-1514*]

Pascal E.

Pasch M.

Picard C. É.

Poincaré J. H.

Poncelet J. V. [1788-1867]

Posidonio [*I secolo a. C.*]

Proclo [410-485]

Riccardi P. [1828-1898]

Ricordi E.

Riemann B. [1826-1866]

Saccheri G. [1667-1733]

Sartorius v. Waltershausen W. [1809-1876]

Savile H. [1549-1622]

Schmidt F. [1826-1901]

Schumacher H. C. [1780-1850]

Schur F. H.

Schweikart F. K. [1780-1859]

Segre C.

Seyffer K. F. [1762-1822]

Simplicius [*VI secolo*]

Sintsoff D.

Stäckel P.

Staudt C. G. [1798-1867]

Szász C. [1798-1853]

Tannery P. [1843-1904]

Taquet A. [1612-1660]

Tartaglia N. [1500-1557]

Taurinus Fr. A. [1794-1874]

Tilly (de) F. M.

Tolomeo [87-165]

Vailati G.
Valerio Luca [1552?-1618]
Vasiliev A.

Wachter F. L. [1792-1817]
Wallis J. [1616-1703]

Zamberti B. [*1^a metà XVI secolo*]
Zenone [495-435]
Zolt (de) A.