Vito Volterra

Sulla meccanica ereditaria

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Sulla meccanica ereditaria
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia naziona-le dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche; 5: 1926-1940 / Vito Volterra ; cor-redato dall'Elenco cronologico generale delle pub-blicazioni - Roma : Accademia nazionale dei Lincei, 1962. - 538 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
  0: affidabilità bassa

1: affidabilità media
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

REVISIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

IX

SULLA MECCANICA EREDITARIA

«Rend. Acc. Lincei», ser. 6ª, vol. XI, 1930; pp. 619-625.

1. In una recente Memoria[1] ho studiato la energetica nel caso della meccanica ereditaria, limitandomi al caso delle azioni ereditarie lineari. Nella presente Nota considero il caso di azioni non lineari, ma per semplicità tratto la questione per un sistema avente un solo grado di libertà, rimandando il caso generale ad un prossimo lavoro più esteso[2].

2. Sia q il parametro lagrangiano del sistema, ossia la configurazione del sistema sia nota allorché si conosce nell'istante attuale t il valore $q(t)$; ma supporremo che *dal punto di vista ereditario* lo stato del sistema resti definito solo quando si conosce $q\,(t-\tau)$ per tutti i valori di τ compresi fra 0 e T_0. Si chiamerà T_0 la *durata dell'eredità*.

[1] *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires*, «Journ. de Math.», 1928 [in questo vol.: IV, pp. 130-169].

[2] Nella mia conferenza: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari*, tenuta nel 1928 al Congresso dei Matematici di Bologna, ho dato un breve cenno del contenuto della presente Nota.

Lo *stato naturale* del sistema corrisponda a $q = 0$ durante un intervallo di tempo eguale a T_0.

Portiamo ora il sistema dallo stato naturale nello stato individuato da

$$q(t-\tau) \qquad \text{per} \qquad 0 < \tau < T_0.$$

Ammettiamo che il lavoro necessario a questo scopo, detratto tutto quello che si è trasformato in calore o in altre forme di energia, sia dato da

$$P = F\big(q(t)\big) + \Phi \left\| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}) \right] \right\|,$$

ove il primo termine è una funzione di funzione ordinaria di $q(t)$ ed il secondo è un funzionale della differenza $q(t) - q\,(t-\tau)$.

Formiamo il differenziale di P, ammettendo che quello di Φ sia regolare. Sarà

$$(1) \quad \delta P = \frac{dF}{dq}\delta q(t) + \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| \big(\delta q(t) - dq(t-\xi)\big) d\xi =$$

$$= \left(\frac{dF}{dq} + \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| d\xi \right) \delta q(t) -$$

$$- \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| \delta q(t) - dq(t-\xi) d\xi.$$

Potremo assumere

(2) $$\mathrm{M} = -\frac{d\mathrm{F}}{dt} - \int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi' \left|\left[q(t) - q(t-\tau) \Big|_0^{\mathrm{T}_0}, \xi \right]\right| d\xi$$

come la *forza interna* che agisce sul sistema nell'istante *t*; il secondo termine di questa espressione sarà la *forza ereditaria.*

L'equazione del moto risulterà

(I) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} + \frac{d\mathrm{F}}{dq} + \int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi' \left|\left[q(t) - q(t-\tau) \Big|_0^{\mathrm{T}_0}, \xi \right]\right| d\xi = \mathrm{Q}$$

essendo T la forza viva del sistema e Q la forza esterna.

Alle espressioni precedentemente considerate potremo dare un significato; così potremo considerare

$$\Phi' \left|\left[q(t) - q(t-\tau) \Big|_0^{\mathrm{T}_0}, \xi \right]\right| d\xi$$

come il contributo della forza ereditaria al tempo *t* che proviene dall'intervallo di tempo ($t - \xi$, $t - \xi - d\xi$) e potremo considerare

$$\int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi' \left|\left[q(t) - q(t-\tau) \Big|_0^{\mathrm{T}_0}, \xi \right]\right| \delta\big(q(t) - q(t-\xi)\big) d\xi$$

come la variazione dell'energia potenziale dovuta alla variazione $\delta(q(t) - q(t-\tau))$ eseguita in ogni istante $t - \xi$ nell'intervallo $(t - \mathrm{T}_0, t)$.

3. Poniamo

$$q\,(t) - q\,(t-\tau) = f\,(\tau)$$

$$\Phi'\left|\left[q(t) - q(t-\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right]\right| = \Psi\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right|.$$

Consideriamo poi il funzionale $X\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right|$ che *dipenda in modo speciale da* $f(\xi)$[3] e soddisfi alla condizione

(3) $$dX\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right| = \Psi\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right|\delta f(\xi) + \int_0^{T_0} X'\left|\left[f(\tau), \xi, \eta \right]\right|\delta f(\eta)\,d\eta,$$

mentre sia $X = 0$ per $f\,(\xi) = 0$.

Supponendo noto Ψ, la ricerca di X corrisponde alla costruzione d'un funzionale di cui si conosce la *parte non regolare del differenziale*, onde questa ricerca si può paragonare ad una integrazione parziale.

Ammettiamo di variare $f(\tau)$ soltanto nelle vicinanze di $\tau = \xi$. Avremo in questa ipotesi

$$dX\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right| = \Psi\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right|\delta f(\xi),$$

onde potremo scrivere

$$\int_0^{T_0} \Psi\left|\left[f\left(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}\right), \xi \right]\right|\delta f(\xi)\,d\xi = \int_0^{T_0} \delta X\left|\left[f(\tau), \xi \right]\right|\delta\xi.$$

---

[3] Ved. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 5, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Nel funzionale X noi possiamo supporre di cambiare ξ e di calcolare $dX/d\xi$. Con tale cambiamento cambia evidentemente $f(\xi)$; noi possiamo supporre di cambiare ξ e di mantenere inalterato $f(\xi)$; la corrispondente derivata si indicherà con $\partial X/\partial\xi$ ed avremo, come relazione fra le due derivate,

(4) $$\frac{dX}{d\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + \Psi \left\| f(\tau), \xi \right\| \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

ossia

(5) $$\int_0^{T_0} \frac{dX}{d\xi} d\xi = \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + \int_0^{T_0} \Psi \left\| f(\tau), \xi \right\| \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi .$$

Il primo membro di questa equazione potrà scriversi

$$X_{\xi = T_0} - X_{\xi = 0} = X_{\xi = T_0} .$$

Infatti, per $\xi = 0$, noi abbiamo che

$$f(\xi) = q(t) - q(t - \xi)$$

si riduce a

$$q(t) - q(t) = 0.$$

e quindi, per quello che abbiamo supposto precedentemente,

$$X_{\xi = 0} = 0,$$

Dunque, se noi supponiamo $X_{\xi = 0} = 0,$ il primo membro della (5) sarà nullo, onde avremo

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = -\int_0^{T_0} \Psi \left\| f(\tau), \xi \right\| \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi$$

ovvero

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = -\int_0^{T_0} \Phi' \left\| q(t) - q(t-\tau), \xi \right\| \frac{\partial\, (q(t) - q(t-\xi))}{\partial \xi} d\xi. \tag{6}$$

4. Ciò premesso, riprendiamo l'equazione (1) e moltiplichiamo ambo i membri per $q'(t)$; si avrà

$$\frac{d}{dt}\left(T + F\right) = -\frac{dq(t)}{dt} \int_0^{T_0} \Phi' \left\| q(t) - q(t-\tau), \xi \right\| d\xi + Qq'(t) =$$

$$= -\int_0^{T_0} \Phi' \left\| q(t) - q(t-\tau), \xi \right\| \frac{\partial \left(q(t) - q(t-\xi)\right)}{\partial t} d\xi -$$

$$- \int_0^{T_0} \Phi' \left\| q(t) - q(t-\tau), \xi \right\| \frac{\partial\, q(t-\xi)}{\partial t} d\xi + Qq'(t) =$$

$$= -\frac{d\Phi}{dt} - \int_0^{T_0} \Phi' \left\| q(t) - q(t-\tau), \xi \right\| \frac{\partial \left(q(t) - q(t-\xi)\right)}{\partial \xi} d\xi + Qq'(t)$$

e per la (6)

$$\frac{d}{dt}\left(T + F\right) = -\frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + Qq'(t),$$

donde

$$\frac{d}{dt}\left(T + F + \Phi\right) - \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = Qq'(t),$$

cioè

$$\text{(II)} \qquad d(\mathrm{T}+\mathrm{F}+\Phi)-dt\int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi}d\xi = \mathrm{Q}dq.$$

Se ora noi supponiamo che X sia una funzione decrescente di ξ, sarà $(\partial \mathrm{X}/\partial \xi) < 0$ e quindi l'equazione precedente ci dirà che il lavoro della forza esterna si trasforma in parte in energia cinetica e potenziale, mentre una parte viene dissipata (cfr. Memoria citata, cap. II, § 1).

Il lavoro meccanico dissipato, ossia l'*energia di dissipazione*, sarà:

$$-\int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi}d\xi$$

perciò il solo *postulato energetico* da ammettere sarà che esista la funzione X, la quale verifichi la equazione (3), si annulli per $f(\xi) = 0$ e sia una funzione decrescente di ξ che diviene eguale a zero per $\xi = \mathrm{T}_0$.

5. Per fare un confronto col caso della eredità lineare svolto nella citata Memoria basta osservare che nel detto caso sarà

$\mathrm{F}(q) = \frac{1}{2} mq^2$, con m costante

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0}\mathrm{F}(\tau)\big(q(t)-q(t-\tau)\big)^2 d\tau, \text{ con } \begin{cases} \mathrm{F}(\tau)>0, \text{ per } 0\le \tau <\mathrm{T}_0 \\ \mathrm{F}(\mathrm{T}_0) = 0 \end{cases}$$

$$\delta\Phi = \int_0^{T_0} F(\xi)\big(q(t) - q(t-\xi)\big)\big(\delta q(t) - \delta q(t-\xi)\big)d\xi$$

$$M = -mq(t) - \int_0^{T_0} F(\xi)\big(q(t) - q(t-\xi)\big)d\xi$$

$$\Phi' = \Psi = F(\xi)\big(q(t) - q(t-\xi)\big) = F(\xi)f(\xi)$$

$$X = \frac{1}{2}F(\xi)f^2(\xi) = \frac{1}{2}F(\xi)\big(q(t) - q(t-\xi)\big)^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{dX}{d\xi} - \Psi f'(\xi) = \frac{1}{2}F'(\xi)f^2(\xi) < 0 \qquad , \qquad F'(\xi) < 0.$$

6. Un caso interessante (di cui quello lineare è un caso particolare) si ha nell'ipotesi che l'energia ereditaria Φ non dipenda che dai valori assoluti di $q(t) - q(t - \tau)$ e possa esprimersi mediante la serie convergente

$$\text{(A)} \qquad \Phi = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} a_1(\tau_1)\big(q(t) - q(t-\tau_1)\big)^2 d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 2}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} a_2(\tau_1,\tau_2)\big(q(t) - q(t-\tau_1)\big)^2\big(q(t) - q(t-\tau_2)\big)^2 d\tau_1 d\tau_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2n!}\int_0^{T_0}\ldots\int_0^{T_0} a_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\big(q(t) - q(t-\tau_1)\big)^2 \ldots (q(t) -$$

$$- q(t-\tau_n))^2 d\tau_1,\ldots,d\tau_n + \ldots$$

Le funzioni $a_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ si suppongono funzioni simmetriche delle variabili $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

Si avrà

$$\Phi'\left\|q(t)-q(t-\tau),\xi\right\|=$$

$$=\left(q(t)-q(t-\xi)\right)\left\{a_1(\xi)+\int_0^{T_0}a_2\left(\tau_1,\xi\right)\left(q(t)-q(t-\tau_1)\right)^2 d\tau_1+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0}\ldots\int_0^{T_0}a_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1},\xi)(q(t)-$$

$$\left.-q(t-\tau_1))^2\ldots\left(q(t)-q(t-\tau_{n-1})\right)^2 d\tau,\ldots,d\tau_{n-1}+\ldots\right\}.$$

Calcoliamo adesso il funzionale X. Avremo

$$X=\frac{1}{2}\left(q(t)-q(t-\xi)\right)^2\left\{a_1(\xi)+\int_0^{T_0}a_2(\tau_1.\xi)\left(q(t)-q(t-\tau_1)\right)^2 d\tau_1+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0}\ldots\int_0^{T_0}a_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1},\xi)(q(t)-$$

$$\left.-q(t-\tau_1))^2\ldots\left(q(t)-q(t-\tau_{n-1})\right)^2 d\tau_1,\ldots,d\tau_{n-1}+\ldots\right\}.$$

Evidentemente risulterà

$$X_{\xi=0}=0.$$

e se noi supponiamo che i coefficienti $a_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ si annullino quando una almeno delle variabili sia eguale a T_0, avremo

$$X_{\xi=0}=0.$$

Ponendo $a'_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, \xi) = \dfrac{\partial a_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1},\xi}{\partial\xi}$ e supponendo costante $f(\xi) = q(t) - q(t - \xi)$ (ved. form. (4)), otterremo

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(q(t) - q(t-\xi)\right)^2 \Big\{a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a'_2(\tau_1,\xi)\left(q(t) - q(t-\tau_1)\right)^2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0}\ldots\int_0^{T_0} a'_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1},\xi)(q(t) -$$

$$- q(t-\tau_1))^2 \ldots \left(q(t) - q(t-\tau_{n-1})\right)^2 d\tau_1,\ldots,d\tau_{n-1} + \ldots\Big\}$$

e questa quantità sarà negativa, se tutte le a'_n saranno negative.
L'energia di dissipazione sarà dunque

$$\text{(B)} \quad \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} b_1(\tau_1)\left(q(t) - q(t-\tau)\right)^2 d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 2}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} b_2(\tau_1,\tau_2)\left(q(t) - q(t-\tau_1)\right)^2\left(q(t) - q(t-\tau_2)\right)^2 d\tau_1 d\tau_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2n!}\int_0^{T_0}\ldots\int_0^{T_0} b_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\left(q(t) - q(t-\tau_1)\right)^2 \ldots (q(t) -$$

$$- q(t-\tau_n))^2 d\tau_1,\ldots d\tau_n + \ldots$$

avendo posto

$$\text{(7)} \quad b_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n) = \sum_1^n {}_i \frac{\partial a_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)}{\partial \tau_i}$$

Tutte le condizioni volute dal postulato energetico enunciato alla fine del § 4 saranno quindi soddisfatte.