Arturo Reghini

La restituzione della geometria pitagorica

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: La restituzione della geometria pitagorica
AUTORE: Reghini, Arturo
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

CODICE ISBN E-BOOK: n. d.

COPERTINA: n. d.

TRATTO DA: Per la restituzione della geometria pitagorica / Arturo Reghini. - La luna nera 2012. - 143 p. ; 25 cm.

CODICE ISBN FONTE: 978-88-6401--215-5

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 29 marzo 2017

INDICE DI AFFIDABILITA': 1

0: affidabilità bassa
1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
MAT012000 MATEMATICA / Geometria / Generale

DIGITALIZZAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

REVISIONE:
Ruggero Volpes, r.volpes@alice.it

IMPAGINAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

Liber Liber

Indice generale

ARTURO REGHINI

La restituzione della Geometria Pitagorica

Il teorema dei due retti – Il teorema di Pitagora
Il Pentalfa – I Poliedri regolari
Il simbolo dell'universo
Dimostrazione del "postulato" di Euclide

PREMESSE

1. Proclo, capo della Scuola d'Atene (V secolo d.C.), ci ha lasciato un prezioso commento sul *Primo Libro* di Euclide, dal quale commento si traggono le più precise ed importanti notizie che i moderni posseggano sui risultati conseguiti e le scoperte fatte in geometria da Pitagora e dalla sua scuola.

Secondo Proclo «Pitagora trasformò questo studio e ne fece un insegnamento liberale; perché rimontò ai principi superiori e ricercò i teoremi astrattamente e con l'intelligenza pura; è a lui che si deve la scoperta degli irrazionali e la costruzione delle figure del cosmo (poliedri regolari)».[1]

---

1 PROCLO, *Com. in Euclidem*, ediz. Teubner, 65, 15-21: la traduzione su riportata è quella del Tannery (PAUL TANNERY, *La Géométrie grecque; comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pag. 57). Non è una traduzione alla lettera; e non per pedanteria, ma per fedeltà al pensiero pitagorico, notiamo che il testo greco non dice che Pitagora rimontò ai principi superiori della geometria, ma ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισλοπούμενος, che significa: considerando dall'alto i principi della geometria. Anche il Loria (GINO LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 1914, pag. 9), riporta il passo con una traduzione analoga a quella del Tannery.

Proclo ci attesta inoltre[2] che:

a) Eudèmo, il peripatetico[3], attribuisce ai pitagorici la scoperta del teorema dei due retti (in un triangolo qualunque la somma degli angoli è eguale a due retti), ed asserisce che ne davano la dimostrazione che consiste (fig. 1) nel condurre per uno dei vertici A la parallela al lato opposto e nell'osservare che, essendo eguali gli angoli alterni interni formati da una trasversale con due rette parallele, la somma dei tre angoli del triangolo è eguale a quella di tre angoli consecutivi formanti un angolo piatto. Questa, dice Proclo, è la dimostrazione dei pitagorici.

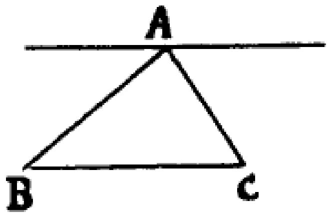


Fig. 1

b) «Sei triangoli equilateri riuniti per il vertice riempiono esattamente i quattro angoli retti, lo stesso tre esagoni e quattro quadrati. Ogni altro poligono qualunque di cui si moltiplichi l'angolo darà più o meno di quattro retti; questa somma non è data esattamente che dai soli

---

2 Cfr. P. TANNERY, *Le Géométrie Grecque*, pag. 102. PROCLO, ediz. Teubner, pag. 379. ALDO MIELI riporta il passo nel testo greco a pag. 273 della sua opera: *Le scuole ionica, pythagorica ed eleatica*, Firenze 1916.

3 Eudemo da Rodi, l'eminente discepolo di Aristotele. Aristotele è morto nel 322 a.C.; Euclide fiorì verso il 300 a.C.

poligoni precitati, riuniti secondo i numeri dati. È un teorema pitagorico».[4]

c) Pitagora scoprì il teorema sul quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo: «Se si ascoltano coloro che vogliono raccontare la storia dei vecchi tempi, se ne possono trovare che attribuiscono questo teorema a Pitagora, e gli fanno sacrificare un bue dopo la scoperta»[5].

d) «Secondo Eudemo (οἱ περὶ τὸν Εὔδημον) la *parabola* delle aree, la loro *iperbole* e la loro *ellisse*, sono scoperte dovute alla musa dei pitagorici».

Con questa nomenclatura, classica dopo Euclide, ed oggi non più usata, Proclo designa i problemi dell'applicazione semplice, dell'applicazione in eccesso e di quella in difetto, ossia attribuisce ai pitagorici la costruzione geometrica, dell'incognita delle tre equazioni[6]:

$$ax = b^2; \quad x(x+a) = b^2; \quad x(a-x) = b^2$$

e) L'impiego del pentagono stellato, o pentagramma, o pentalfa, come segno di riconoscimento.

f) La costruzione dei poliedri regolari, ed in particolare l'inscrizione del dodecaedro (regolare) nella sfera[7].

---

4 Proclo, ediz. Teubner, pag. 304.

5 Proclo, ediz. Teubner, pag. 426. Questo teorema è attribuito a Pitagora anche da Diogene Laerzio, VIII, 12, da Plutarco, da Vitruvio (*De Architectura*), IX, cap. II, e da Ateneo.

6 Proclo, ediz. Teubner, pag. 419.

7 Proclo, ediz. Teubner, pag. 65. Per quest'ultimo punto vedi anche Giamblico – *De Vita Pythagorae*, 18.

2. Queste, insieme a poche altre che avremo occasione di vedere in seguito, sono le scarse notizie che oggi si possiedono sulle scoperte geometriche dei pitagorici; le dobbiamo a Proclo che a sua volta le ha tratte dalla fonte attendibile di Eudemo. Bisogna però notare che il Tannery, nel magnifico studio sopra citato, non solo condivide il punto unanimemente concesso che Proclo non ha conosciuto personalmente nessuna opera geometrica anteriore ad Euclide, ma sostiene anche la tesi che Proclo non ha neppure utilizzato direttamente la storia geometrica composta anteriormente ad Euclide da Eudemo, quantunque lo citi assai spesso[8], e che conosce e cita Eudemo solo di seconda mano, e precisamente attraverso Gemino, autore del I secolo a.C., un greco, probabilmente, nonostante il nome latino.

Quanto ad Eudemo, per spiegare l'origine delle indicazioni passabilmente numerose e circostanziate pervenuteci per suo mezzo relative ai lavori della scuola pitagorica, il Tannery sostiene[9] che deve essere esistita un'opera di geometria, relativamente considerevole, che Eudemo deve avere avuto tra le mani, opera composta dopo la morte di Pitagora, approssimativamente verso la metà del V secolo. È forse l'opera che Giamblico designa come: *la tradizione circa Pitagora*. Osserva il Tannery[10] che, in base al riassunto storico di Proclo, nel trattato di geometria greca di cui si può sospettare l'esisten-

8 P. TANNERY, *La Géom. gr.*, pag. 14 e 15.

9 P. TANNERY, *La Géom. gr.,* pag. 82 ed 86.

10 P. TANNERY, *La Géom. gr.*, pag. 87.

za, il quadro era già quello che riempiono gli «Elementi» di Euclide, dal I libro (teorema dei due retti), al 10º (scoperta degli incommensurabili), al 13º (costruzione dei poliedri regolari). Questo è il coronamento dell'uno e dell'altro; cioè del riassunto di Proclo e degli Elementi di Euclide. «*Toute la Géométrie élémentaire nous apparait ici, comme sortie brusquement de la tête de Pythagore, de même que Minerve du cerveau de Jupiter*»[11].

Nulla però sappiamo circa le dimostrazioni dei teoremi, le risoluzioni dei problemi ed in generale la trattazione delle questioni riportate da Proclo – Gemino – Eudemo; nulla, all'infuori della dimostrazione del teorema dei due retti cui a prima vista non manca niente.

La dimostrazione su riportata, ed attribuita da Eudemo ai pitagorici, non coincide con quella che si trova nel testo di Euclide (prop. 32) ma ne differisce di poco. Euclide dimostra prima che un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due interni non adiacenti, basandosi sopra la proposizione 29, a sua volta basata sul V postulato, o postulato delle parallele o postulato di Euclide. Il passaggio al teorema sopra la somma dei tre angoli di un triangolo è immediato ed è effettuato da Euclide nella proposizione stessa.

Teorema e dimostrazione sono però, come osserva il Vacca[12], anteriori ad Euclide; perché, come è stato osser-

11 P. Tannery, *La Géom. gr.*, pag. 88.

12 Vacca Giovanni, *Euclide – Il primo libro degli elementi*, Testo greco, versione italiana e note, Firenze, 1916, pag. 78.

vato da Heiberg, Aristotele in un passo della Metafisica (*Metaph*., 1051 a 24) si riferisce non solo a questo teorema ma a questa stessa dimostrazione di Eudemo.

A questo punto dobbiamo sollevare una questione importante dal duplice punto di vista storico e teorico. La dimostrazione cui si riferisce Aristotele, e che è quella stessa che Eudemo attribuisce ai pitagorici, si basava anche essa come quella di Euclide, sopra un postulato equivalente a quello posteriormente ammesso e formulato da Euclide? Proclo si serve nel passo che riporta da Eudemo del termine di parallela, dice anzi: παράλληλος ἡ, la parallela; faceva lo stesso anche Eudemo, e facevano lo stesso anche i pitagorici di cui parla Eudemo? Ed in tal caso quale era l'accezione e la definizione, per loro, della parola: parallela? Ed in relazione a questa questione di ordine storico si presenta l'altra di ordine teorico: per dimostrare il teorema dei due retti, è necessario basarsi sopra il famoso postulato di Euclide, o sopra un postulato equivalente?

Possiamo rispondere che il postulato di Euclide non è necessario per poter dimostrare il teorema dei due retti; non solo, ma anche la dimostrazione cui si riferisce Aristotele, e che è secondo Eudemo quella stessa dei pitagorici, si può fare senza ammettere o premettere il V postulato, o, ciò che è equivalente, senza ammettere o premettere la unicità della non secante una retta data passante per un punto assegnato.

Se infatti si ammette, per esempio come fa il Severi[13], il postulato che: in un piano il luogo dei punti situati da una parte di una retta ed aventi da questa una data distanza, è ancora una retta, si può osservare: 1º – che tale retta è unica[14]; 2º – che per poter dimostrare come questa retta, cioè l'unica equidistante dalla retta data passante per il punto assegnato, è anche l'unica non secante della retta data, il Severi ricorre al postulato di Archimede[15], il che prova che il postulato ammesso dal Severi non è equivalente al postulato di Euclide; 3º – che la dimostrazione data dal Severi del teorema dell'angolo esterno, e del teorema sopra la somma degli angoli di un triangolo[16] (e che è quella di Euclide), si basa in realtà sopra le sole proprietà della equidistante (la parallela del Severi), e, sebbene nel testo ne sia preceduta, non si basa sulla proprietà formulata dal postulato di Euclide. Basta condurre per il vertice la equidistante dal lato opposto ed applicare la proprietà degli angoli alterni interni[17], ossia basta basarsi sul postulato del Severi e non su quello di Euclide.

---

13 Francesco Severi, *Elementi di Geometria*, Firenze, 1926: vol. I, pag. 113. È l'edizione non ridotta.

14 F. Severi, *Elem. di Geom.*, I, 114.

15 F. Severi, *Elem. di Geom.*, I, 119-20. Vedremo in seguito come se ne possa fare a meno, occorre però sempre ricorrere ad un postulato.

16 F. Severi, *Elem. di Geom.*, I, pag. 123.

17 F. Severi, *Elem. di Geom.*, I, pag. 117.

Ne segue che la dimostrazione cui si riferisce Aristotele può benissimo sussistere sulla base di un postulato come quello del Severi o di un postulato ad esso equivalente, e che è legittimo sollevare la questione di ordine storico sopra esposta. Ma noi la lasceremo per il momento da parte, perché per quanto riguarda gli antichi pitagorici essa appare in un certo senso oziosa. Infatti, anche questo unico dato che sembrava acquisito circa le dimostrazioni dei pitagorici viene a mancare, essendo certo che gli antichi pitagorici non dimostravano il teorema dei due retti per questa via, ma in altro modo affatto diverso e d'altronde anche affatto ignoto.

Avverte infatti giustamente il Loria[18]: «Una sola cosa bisogna notare a questo proposito, ed è che i pitagorici ai quali si deve la scoperta di questo teorema non sono per fermo gli stessi che inventarono questo ragionamento, ché altrimenti non si saprebbe comprendere come Eutocio, in un passo del commento al 1º libro delle *Coniche* di Apollonio (Apollonio – ed. Heiberg, II Vol., Lipsiae, 1893, p. 170) dica: «Similmente gli antichi dimostrarono il teorema dei due retti a parte per ogni specie di triangolo, prima per l'equilatero, poi per l'isoscele e finalmente per lo scaleno, mentre quelli che vennero dopo dimostrarono il teorema in generale: i tre angoli

18 Gino Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II edizione, Hoepli, 1914, pag. 47.

interni di un triangolo sono eguali a due retti». «E» continua Eutocio, «chi dice questo è Gemino»[19].

In conclusione anche questo dato viene a mancare, e sappiamo solo che la proprietà sopra la somma degli angoli interni di un triangolo non era ammessa, ma bensì dimostrata dagli antichi; e che inoltre tale dimostrazione era suddivisa in tre parti; particolare importante perché induce a ritenere quasi per certo che la dimostrazione non dipendeva dalla teoria delle parallele o da quella affine delle rette equidistanti.

«Ai pitagorici» scrive ancora il Loria[20], «era noto il valore della somma degli angoli di qualunque triangolo rettilineo e sapevano dimostrare [come?] il relativo teorema; ad essi per universale consenso viene attribuita la scoperta e la dimostrazione [quale?] della proprietà caratteristica del triangolo rettangolo».

Siamo dunque costretti, tanto per l'uno quanto per l'altro teorema a fare delle congetture; tenendo presente che per il primo bisogna escludere la teoria delle parallele, e per il secondo bisogna escludere la dimostrazione contenuta nel testo di Euclide (dipendente anche essa dal postulato di Euclide), perché Proclo attesta formalmente che tale dimostrazione del teorema di Pitagora non è di Pitagora ma di Euclide, dicendo: «per conto

---

19 Cfr. Aldo Mieli, *Le scuole jonica, pythagorica ed eleatica*, Firenze, 1916, pag. 273; ivi è riportato il testo greco di Eutocio. Il Loria riporta tutto il passo a pagina 154 delle «*Scienze esatte...*».

20 Gino Loria, *Storia delle matematiche*, Torino, 1929-33, vol. 1, pag. 67.

mio ammiro coloro che per primi investigarono la verità di questo teorema; ma ammiro ancor più l'autore degli *Elementi*, perché non solo lo ha assicurato con una dimostrazione evidente, ma perché lo ha ridotto ad un teorema molto più generale nel suo sesto libro con stretto ragionamento»[21].

3. Non è noto quale fosse la dimostrazione data da Pitagora al suo teorema; però possiamo affermare, ci sembra, che Pitagora non si serva a tale scopo della proprietà enunciata dal postulato delle rette parallele. Altrimenti gli antichi pitagorici, che per quanto antichi erano posteriori a Pitagora, ne avrebbero fatto uso già ed anche per il teorema dei due retti, mentre sappiamo da Eutocio-Gemino, che solo quelli che vennero dopo dettero tale sbrigativa dimostrazione.

L'Allman ha indicato come gli antichi possano essere giunti al teorema dei due retti, che egli propende ad attribuire a Talete. Osserva l'Allman[22] che nel caso dei sei triangoli equilateri congruenti attorno ad un vertice comune, essendo la somma dei sei angoli eguale a quattro retti, ciascuno risulta eguale ad un terzo di due retti, e quindi i tre angoli di un triangolo hanno per somma due retti. Questa spiegazione, per quanto ingegnosa, non può essere la buona, perché presuppone il riconoscimento

21 Il Mieli a pag. 266 dell'opera citata riporta il testo greco di Proclo.

22 ALLMAN GEORGE JOHNSTON, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889, pag. 12.

necessariamente empirico che sei triangoli equilateri (di cui si ammette l'esistenza implicitamente e così pure che siano anche equiangoli) si possano effettivamente disporre nella maniera indicata; mentre Proclo afferma nettamente che questo terzo punto costituiva un teorema pitagorico, il che, a meno di sofisticare sul senso preciso attribuito alla parola teorema da Proclo, indica che questo era il punto di arrivo e non quello di partenza.

Dal caso del triangolo equilatero l'Allman passa agevolmente al caso del triangolo rettangolo particolare che se ne ottiene abbassando l'altezza. Nel caso poi del triangolo rettangolo qualunque (fig. 2), egli completa il rettangolo (di cui si presuppone così l'esistenza) e dice che: «*he* (Talete) *could easily* (empiricamente?) *see that the diagonals are equal and bisect each other*». Il trian-

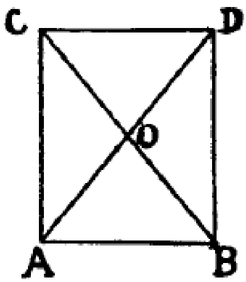


Fig. 2

golo rettangolo è così decomposto in due triangoli isosceli cogli angoli alla base eguali, e siccome si sa che i due consecutivi di vertice A hanno per somma un retto, lo stesso accade per la coppia degli altri due angoli ad essi rispettivamente eguali, e quindi ne deriva che la somma dei tre angoli di un triangolo rettangolo qualunque è eguale a due retti. Di qui il teorema si estende agevolmente, sebbene l'Allman si dimentichi di dirlo, al triangolo isoscele, e da questo ad un triangolo qualunque.

Il Tannery riconosce esplicitamente che dal teorema dei due retti *deriva* logicamente la proprietà relativa alla possibilità di disporre attorno ad un vertice comune i sei triangoli equilateri, i quattro quadrati ed i tre esagoni; ciò nonostante anche egli inverte l'ordine[23] dicendo: «È anche molto possibile che sia stato il riconoscimento empirico della proprietà dei triangoli equilateri riuniti attorno ad un vertice comune, che abbia condotto alla scoperta della eguaglianza a due retti della somma degli angoli di ciascuno di questi triangoli; si sarà passati in seguito, secondo la testimonianza di Gemino, prima al triangolo isoscele ed infine allo scaleno». Abbiamo veduto che, seguendo la via tracciata dall'Allman, si passa solo invece ad un caso particolare del triangolo rettangolo, e che poi occorre fare un nuovo appello all'empirismo per passare al caso del triangolo rettangolo qualunque, soltanto dopo si passa finalmente al triangolo isoscele ed a quello scaleno.

Non pare dunque che il punto di partenza indicato dal Tannery e dall'Allman sia quello adoperato dagli antichi. Occorre trovarne un altro, che conduca ai risultati nel-

---

23 P. Tannery, *La Géom. gr.*, pag. 104.

l'ordine indicato da Gemino, e che faccia appello all'intuizione in modo più semplice.

4. Quanto al teorema sul quadrato dell'ipotenusa «tutto sembra indicare», scrive il Tannery[24], «che se non l'ha presa in prestito dagli egiziani, questa proposizione fu una delle prime che egli incontrò, ed affatto il coronamento delle ricerche», come invece è nel testo del primo libro di Euclide.

Perfettamente d'accordo; ed appunto per questa ragione la dimostrazione pitagorica del teorema di Pitagora non solo non può essere la coda e la conseguenza di altri teoremi sull'equivalenza, ma deve essere indipendente dalla teoria della similitudine, da quella delle proporzioni, nonché dai postulati di Euclide e di Archimede. D'altra parte, se è noto e certo che gli egiziani conoscevano particolari triangoli rettangoli aventi per misura dei lati numeri interi, tra questi il triangolo detto appunto *triangolo egizio*, non risulta però affatto che conoscessero il teorema generale sul quadrato dell'ipotenusa, e se la scoperta di Pitagora si fosse ridotta ad un semplice prelevamento si spiegherebbero male gli osanna, i peana ed i sacrifici agli Dei.

Ricercando quale possa essere stata la dimostrazione, il Tannery, dopo avere detto[25] che «i greci introducevano il più tardi possibile la nozione di similitudine (VI di Euclide)», afferma poco dopo che Pitagora deve essersi

24 P. TANNERY, *La Géom. gr.*, pag. 105.

25 P. TANNERY, *La Géom. gr.*, pag. 97.

servito della similitudine, il cui impiego si dovette in seguito restringere a causa della scoperta della incommensurabilità. Il principio di similitudine si dimostra impiegando il postulato delle parallele; «inversamente[26] ammettendolo a priori se ne potrebbe ricavare il postulato delle parallele». Ora, a parte il fatto che si tratta di una semplice ipotesi non suffragata da alcun elemento, bisogna notare come sia ben vero che ammettendo questo postulato della similitudine se ne potrebbero ricavare il postulato delle parallele, il teorema dei due retti, la nozione e le proprietà dei rettangoli e dei quadrati, la teoria delle proporzioni e la dimostrazione del teorema di Pitagora mediante i triangoli simili, ma non si spiegherebbe allora la preesistenza dell'antica dimostrazione del teorema dei due retti menzionata da Eutocio-Gemino.

Anche secondo il Loria[27] «la dimostrazione che presenta il massimo di verisimiglianza è quella basata sulla similitudine di un triangolo rettangolo coi due che nascono abbassando la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa. Con una agevole metamorfosi essa diviene quella stessa che leggesi negli *elementi* di Euclide». Questa possibilità di ridurre questa dimostrazione a quella di Euclide sembra a noi che provi proprio l'opposto, e cioè che la dimostrazione accennata dal Loria e dal Tannery, la quale conduce infatti al così detto primo teorema di Euclide, da cui si trae poi il teorema di

26 P. TANNERY, *La Géom. gr.*, pag. 105.

27 GINO LORIA, *Storia delle Matematiche*, vol. I, pag. 67 in nota.

Pitagora, non sia affatto quella originale; senza contare che, se così fosse, sotto la denominazione di teorema di Pitagora dovrebbe trovarsi designato un altro teorema, e precisamente il teorema sopra il quadrato di un cateto (il primo così detto di Euclide). Molto più felicemente osserva l'Allman[28] che sebbene Pitagora «possa averlo scoperto come una conseguenza del teorema sulla proporzionalità dei lati dei triangoli equiangoli, manca qualsiasi indizio che egli vi sia giunto in tale maniera deduttiva», e dopo avere ricordato che sappiamo, grazie a Prodo, che Pitagora tenne una via che non è quella tenuta da Euclide, riconosce che «la maniera più semplice e naturale di arrivare al teorema è la seguente come è suggerito da Bretschneider» (fig. 3)[29].

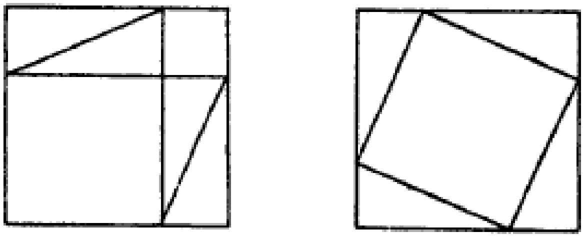


Fig. 3

Questa è una dimostrazione di cui gli storici moderni ignorano l'autore; ma si sa però che essa è antica. Per essa occorrono solo le nozioni di triangolo rettangolo e di quadrato, le proprietà delle rette perpendicolari e, come vedremo, occorre conoscere il teorema dei due

28 ALLMAN, *Greek Geometry*, pag. 35.

29 BRETSCHNEIDER C. C., *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipsig, 1870.

retti; ed è invece, come vedremo, indipendente dalla teoria delle parallele.

Se non che, continua l'Allman[30], l'Hankel[31] nel citare questa dimostrazione da Bretschneider dice che «si può obiettare che essa non presenta affatto un colorito specificamente greco, ma ricorda i metodi indiani. Questa ipotesi circa l'origine orientale del teorema mi sembra ben fondata; io attribuirei pertanto la scoperta agli egiziani...», da cui poi Pitagora lo avrebbe tratto.

Indiani od egiziani pare che sia la stessa cosa, pur di togliere ogni merito a Pitagora! Ad ogni modo, sia pure derivandolo dall'India, dall'Egitto o dalla civiltà minoica, questa sarebbe, secondo l'Allman ed il Bretschneider, la dimostrazione data da Pitagora; si vorrà almeno ammettere che, pure inspirandosi alla via suggerita dalla figura, la dimostrazione logica gli appartenga; altrimenti dove sarebbe il merito che Proclo e tutta l'antichità hanno riconosciuto in proposito a Pitagora? Del resto l'apprezzamento sul carattere più o meno indiano od egiziano della dimostrazione non ci sembra abbastanza sicuro ed impersonale, ed applicando codesto criterio è probabile che si dovrebbe assegnare una provenienza orientale anche ad altri teoremi che invece sono sicuramente greci.

Noi mostreremo come una dimostrazione del teorema basata sopra questa figura si ottenga molto semplice-

---

30 Allman, *Greek Geometry*, pag. 37.

31 Hankel H., *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und mittel-Alter*, Leipsig, 1874.

mente usufruendo del teorema dei due retti e delle sue immediate conseguenze. Ed, anticipando, notiamo subito che in tale dimostrazione ci serviremo degli stessi criteri di composizione e decomposizione delle figure di cui Platone fa uso nel *Timeo* e nel *Menone*[32], e che in conseguenza tale dimostrazione non soltanto ha colorito greco, ma ha il colorito *pitagorico* della dimostrazione del *Menone*.

32 Platone, *Timeo*, XX; *Menone*, XIX.

CAPITOLO I
IL TEOREMA DEI DUE RETTI

1. Da quanto precede risulta che occorre risolvere questa questione essenziale e preliminare: Trovare in qual modo gli antichi pitagorici dimostravano il teorema dei due retti.

Noi sappiamo soltanto che essi ne davano una dimostrazione che non era quella basata sopra il postulato delle parallele; e questo porta con una certa sicurezza a concludere che non ammettevano tale postulato.

Questa prova indiretta, per altro, trova conferma nel fatto che non soltanto il postulato, ma il concetto stesso di rette parallele, definite almeno con Euclide come rette che prolungate all'infinito non si incontrano mai, doveva apparire particolarmente ripugnante alla mentalità pitagorica per la quale il finito, il limitato era il compiuto e perfetto mentre l'infinito, l'illimitato era l'imperfetto.

D'altra parte, escludendo il V postulato, e facendo uso solamente di quanto precede la 29ª proposizione del libro primo di Euclide, non è possibile, crediamo, di pervenire allo scopo; e bisogna supporre quindi che gli antichi pitagorici dovevano ammettere qualche altra semplice proprietà che permetteva di dimostrare il teorema.

Nulla di strano che ciò avvenisse; dice infatti il Tannery che al tempo di Pitagora «il numero delle verità ammesse come primordiali era, senza dubbio, molto più considerevole; ed il progresso... deve essere consistito più che altro nella riduzione degli assiomi». Abbiamo veduto che tra queste verità primordiali ammesse dagli antichi pitagorici il Tannery propende a ritenere figurasse un postulato della similitudine; ma se questo può servire per giungere alla dimostrazione del teorema di Pitagora non serve per quello dei due retti, perché conduce alla dimostrazione ordinaria di questo teorema e non a quella arcaica, ignota, ma di cui conosciamo la esistenza e la indipendenza dal postulato di Euclide. Per la stessa ragione ed anche per la sua relativa complessità bisogna escludere che i pitagorici ricorressero ad un postulato come quello enunciato dal Severi e che abbiamo riportato in principio.

Queste considerazioni di carattere razionale permettono di escludere che si debba ricorrere a simili postulati; ma con sole considerazioni razionali non è sperabile di afferrare quale possa essere il postulato cui ricorrere; possiamo soltanto aggiungere che deve trattarsi di qualche proprietà che seguitò naturalmente a sussistere dopo l'adozione del postulato delle parallele e dopo l'assetto dato da Euclide alla geometria, ma che disparve in seguito dal numero delle proprietà primordiali, divenendo probabilmente una ovvia conseguenza del nuovo postulato. Determinare quale fosse è questione di inspirazione piuttosto che di ragionamento; diciamo inspirazione e non capriccio o fantasia, ed aggiungiamo che dovremo sottoporla ad ogni possibile controllo, esaminare se armonizza con la mentalità pitagorica e se consente uno sviluppo pari allo sviluppo effettivamente raggiunto dai pitagorici e capace di condurre ai risultati conseguiti da essi, quali Proclo ci ha tramandati.

Ben inteso poi, e lo diciamo esplicitamente a scanso di equivoci e per precisione, che per necessità e per brevità noi presupponiamo ed ammettiamo accettato o dimostrato dai pitagorici il contenuto delle prime 28 proposizioni di Euclide; ossia quanto precede il postulato delle parallele e la teoria delle parallele; in quanto che a noi interessa ed occorre indagare come si possano dimostrare le proposizioni nelle quali la geometria pitagorica sappiamo che differiva da quella euclidea. Sostanzialmente ammettiamo e supponiamo che i pitagorici (esplicitamente o no) ammettessero: 1° – i postulati di determinazione e appartenenza; 2° – i postulati relativi alla divisione in parti della retta e del piano (riferiti se si vuole a rette finite e piani finiti); 3° – i postulati della congruenza o del movimento.

E riteniamo dimostrate e note ai pitagorici le proprietà che cogli ordinarii procedimenti se ne ricavano, e cioè:

1) i criteri ordinari di eguaglianza dei triangoli;

2) le relazioni tra gli elementi di uno stesso triangolo; i teoremi sopra i triangoli isosceli, equilateri ed a lati disuguali; il teorema dell'angolo esterno (maggiore di cia-

scuno degli interni non adiacenti), il teorema sopra un lato e la somma degli altri due...

3) l'unicità della perpendicolare per un punto ad una retta, la proprietà delle perpendicolari ad una stessa retta, le proprietà delle perpendicolari e delle oblique, dell'asse di un segmento... ossia quanto si ottiene in sostanza con gli ordinari postulati e procedimenti e senza il postulato di Euclide.

2. Adoperando il linguaggio moderno, abbiamo detto che occorre introdurre un nuovo postulato, ossia ritrovare l'antico postulato, per poter dimostrare il teorema dei due retti. Ma non sappiamo con quale termine gli antichi designassero le verità primordiali da cui traevano logicamente le altre proposizioni della geometria. La parola *postulatum*, in cui è trasparente il carattere di esigenza logica attribuito al concetto così designato, corrisponde al greco αἴτημα ed al medio latino *petitio*, ed appare come termine matematico nell'edizione latina di Euclide del Commandino del 1619, e come termine filosofico nella versione latina della *Reth. ad Alexan*. del Philelphus (morto nel 1489). La distinzione in ipotesi, assiomi e postulati è di Aristotele; ed Euclide, naturalmente, fa uso del termine αἴτημα.

Nell'edificio geometrico logico degli antichi figuravano necessariamente delle verità primordiali ammesse senza dimostrazione, ma non è detto che questo avvenisse per pura necessità logica, per dare al ragionamento il necessario punto di partenza; né è detto che venissero scelte e stabilite avendo riguardo unicamente all'intuizione ed all'esperienza sensibili ordinarie. Occorre tenere presente che la mentalità geometrica dei pitagorici era ben diversa dalla mentalità moderna che ha per ideale una geometria pura, astratta, esistente unicamente nel mondo della logica. Al contrario, osserva il Rostagni[33], «Religione, morale, politica, scienze matematiche non rappresentavano per i pitagorici materie separate; o veramente si individuarono in progresso di tempo ma non cessarono mai di essere emanazioni e dipendenze della cosmologia... Lo spirito cosmologico, ch'è insito nella filosofia pitagorica, sta al di sopra di quelle specificazioni, e le domina tutte, indifferentemente». Archita, il pitagorico amico di Platone, in un frammento riportato da Nicomaco ed in un altro riportato da Porfirio,[34] dice che la geometria, l'aritmetica, la sferica (l'astronomia sferica), e la musica sono delle scienze che sembrano sorelle.

La geometria non era per essi una disciplina esclusivamente logica, fatta dall'uomo e per l'uomo, indipendente della realtà cosmica, come potrebbe essere il gioco degli scacchi; era la scienza che ha oggetto di studio il *cosmo* sotto l'aspetto della posizione e dell'estensione. L'aritmetica era la scienza del ritmo, ῥυθμός, ἀριθμός, del numero, del tempo, dell'intervallo; ed Archita distin-

33 A. Rostagni, *Il verbo di Pitagora*, ed. Bocca, Torino 1924, pag. 71

34 Cfr. A. Ed. Chaignet, *Pythagore et la philosophie pythagoricienne*; Paris, 1874, vol. I pag. 279.

gueva inoltre un tempo fisico ed un tempo psichico. Ed è evidente il nesso che con queste due scienze ancor oggi sorelle avevano le altre due, la astronomia sferica e la musica. Inoltre occorre ricordare che questa visione sintetica che legava tra di loro le varie scienze non era presumibilmente basata sopra la sola intuizione ed esperienza sensibile umana ordinaria e non aveva per oggetto soltanto la φύσις, la natura, il mondo dell'ἄλλο, dell'alterazione, del divenire; ma anche l'eterna ed olimpicamente inalterabile ἐστὼ τῶν πραγμάτον, l'essenza delle cose, l'al di là del περιέχον, della *fascia* cosmica, che avvolge il mondo dei quattro elementi e dei dieci corpi celesti. Dieci secoli dopo Pitagora, Proclo assegna ancora all'intelligibile e non al sensibile gli oggetti della geometria.

Tenuto conto di tutto questo, la verità primordiale che introduciamo, e che riteniamo ammessa dai pitagorici è la seguente, che chiameremo:

Postulato pitagorico della rotazione: se un piano ruota rigidamente sopra se stesso in un verso assegnato attorno ad un suo punto fisso (centro di rotazione) di un angolo (convesso) assegnato, ogni retta situata nel piano si muove anche essa, e le posizioni iniziale e finale della retta (orientata), se si incontrano, formano un angolo eguale a quello di cui ha ruotato il piano.

Questa verità primordiale dal punto di vista moderno è innegabilmente un semplice dato dell'intuizione, dell'osservazione e dell'esperienza. Quando una ruota gira, un segmento qualunque, giacente e rigidamente connesso con il piano della ruota, si muove anche esso, e gira sempre in un verso se la ruota fa altrettanto, e gira più o meno a seconda che più o meno gira la ruota; e l'intuizione e l'osservazione dicono che la rotazione del segmento è eguale alla rotazione del raggio vettore. D'altra parte la capacità di confrontare fra loro gli angoli non poteva fare difetto ai pitagorici; giacché, secondo Eudemo, il problema, un poco più arduo, di costruire un angolo eguale ad un angolo assegnato, dato il vertice ed un lato dell'angolo da costruire, è una invenzione piuttosto di Oinopide da Chio che di Euclide; ed Oinopide (500 a.C. circa) è forse un pitagorico.

All'adozione di questo postulato parte dei moderni obbietterà che esso non prescinde dal movimento; ma occorre osservare che non si tratta qui di discutere le questioni teoriche del movimento e della congruenza, si tratta di giudicare se questo postulato possa essere stato una delle verità primordiali ammesse dai pitagorici, ed il fatto che esso si basa sul movimento, anzi sulla rotazione, non porta in proposito nessun pregiudizio. Il movimento, ed in particolare il movimento di rotazione, si presentava come aspetto saliente e caratteristico della vita cosmica, e perciò non solo poteva ma doveva pitagoricamente avere la sua funzione anche nella geometria. La tendenza a fare a meno per quanto è possibile del movimento è una tendenza di Euclide, e questa sua antipatia ha forse contribuito alla sua grande innovazione, alla teoria delle rette che prolungate all'infinito non si incontrano mai. Sono rette di cui nessuno ha mai potuto procurarsi l'esperienza sensibile e nemmeno quella intelligibile, ma Euclide non era un pitagorico e gli bastava che la definizione delle parallele ed il relativo postulato gli dessero il mezzo necessario per procedere nella sua via.

3. Il postulato pitagorico della rotazione non coincide, naturalmente, con l'ordinario postulato della rotazione.

Il postulato ordinario della rotazione ci dice che quando un piano ruota intorno ad un suo punto fisso O (fig. 4) di un certo angolo α, tutti i punti di una retta qualunque AB del piano ruotano intorno ad O, in modo che due raggi vettori qualunque OA, OB vanno rispettivamente in OA', OB' tali che $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \alpha$, e la retta AB va in A'B' ed ogni altro punto C della AB va in un punto C' di A'B' disposto rispetto ai punti A' e B' come C è disposto rispetto ad A e B, ed è $\widehat{COC'} = \alpha$. Ogni punto della AB ruota dunque di α. Il postulato pitagorico della rotazione afferma che inoltre tutta la retta AB, con tale rotazione, se incontra la A'B', forma con essa l'angolo α. Nel caso di un raggio vettore OA la sovrapposizione ad OA' si ottiene con la semplice rotazione intorno ad un suo punto O, nel caso di una retta qualunque AB la sovrapposizione si ottiene con una rotazione eguale intorno ad un punto esterno O, *oppure* con una rotazione *eguale* attorno al punto di intersezione (se esiste) delle AB ed A'B' seguita da una opportuna traslazione. Il postulato afferma l'eguaglianza di queste due rotazioni; e, se ogni punto della AB ruota di α, non era naturale affermare che l'insieme di tali punti, ossia la AB, ruotava anche esso di α?

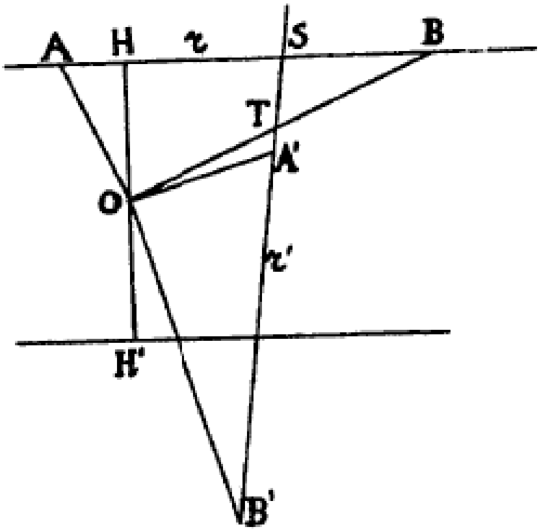


Fig. 4

Dal postulato segue poi immediatamente che se la retta r con due rotazioni consecutive nello stesso senso si porta prima in r_1 e poi da r_1 in r_2, l'angolo rr_2 è eguale alla somma $\widehat{rr_1} + r_1 r_2$. Perciò la proprietà si estende subito al caso dell'angolo concavo e dell'angolo giro. Nel caso della rotazione di mezzo giro, condotta dal centro di rotazione la perpendicolare OH alla AB, il raggio vettore OH si porta sul prolungamento OH', la AB si porta sulla perpendicolare ad OH' per H', ed il postulato pitagorico ci dice che se essa incontrasse la AB formerebbe con essa un angolo piatto. Ma siccome è noto che due rette perpendicolari in punti diversi H, H' ad una stessa retta non si incontrano, ci si limita a riconoscere che in questo caso le posizioni iniziale e finale della retta non si incontrano. Naturalmente non ne segue affatto che per ogni altra rotazione esse debbano incontrarsi.

Notiamo infine come il postulato si potrebbe anche enunciare sotto forma diversa. Per esempio: Se il piano ruota sopra se stesso in un certo senso intorno ad un punto fisso l'angolo formato da una retta qualunque del piano con la sua posizione finale è costante; oppure: se il piano compie due rotazioni consecutive nello stesso senso con le quali la r va prima in r_1 e poi in r_2 allora $\widehat{rr_2} = \widehat{rr_1} + \widehat{r_1 r_2}$. Ma ci sembra che la forma che abbiamo prescelto aderisca in modo più immediato alla osservazione ed abbia quindi maggiore probabilità di coincidere con la verità primordiale ammessa dai pitagorici.

4. Con l'aiuto di questo postulato il teorema dei due retti nel caso del triangolo equilatero si dimostra immediatamente.

Naturalmente ciò presuppone che esistano dei triangoli equilateri e che si sappia costruire un triangolo equilatero di lato assegnato. La considerazione del triangolo equilatero doveva comparire molto presto nella geometria pitagorica, per la corrispondenza che essi scorgevano tra i primi quattro numeri, ed il punto, la retta (individuata e limitata da due punti), il piano ed il triangolo individuato da tre, e lo spazio o il volume individuato da quattro punti. Non è forse un caso se anche in Euclide la prima proposizione del primo libro ha appunto per oggetto il triangolo equilatero. E giacché se ne presenta l'occasione notiamo che in essa Euclide ammette tacitamente ed implicitamente il postulato che se una circonferenza ha il centro su di un'altra circonferenza ed un punto interno ad essa, la taglia. Così pure del resto è ammesso tacitamente in Euclide l'altro caso particolare del postulato di continuità, e cioè che il segmento congiungente due punti situati da parte opposta di una retta è tagliato da essa.

Posto ciò, per dimostrare il nostro teorema basta conoscere il 1º e 2º criterio di eguaglianza dei triangoli con i loro corollari sul triangolo isoscele e sul triangolo equilatero, ed applicare il postulato pitagorico della rotazione.

Dimostriamo dunque il

TEOREMA: *La somma degli angoli di un triangolo equilatero è eguale a due retti.*

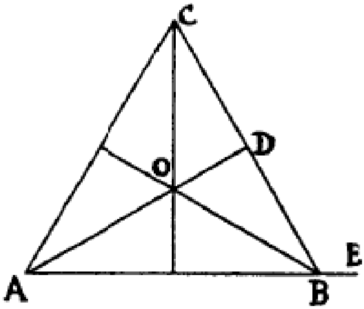


Fig. 5

Sia ABC il triangolo equilatero (fig. 5), e quindi equiangolo.

La bisettrice dell'angolo CAB incontra il lato opposto in un punto D interno ad esso, e poiché i due punti A e D si trovano da parte opposta della bisettrice di $\widehat{ACB}$, le due bisettrici si tagliano in un punto O interno al triangolo dato. Gli angoli $\widehat{OAC}, OCA$ sono eguali perché metà di angoli eguali, e quindi OAC è isoscele ed OA = OC.

I triangoli ACO, BCO sono eguali per il 1º criterio, e perciò OB = OA = OC e $\widehat{OBC} = \widehat{OAC}$; e perciò OB è bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$. I tre triangoli isosceli OAB, OBC, OAC sono quindi eguali (2º o 3º criterio) e gli angoli al vertice $\widehat{AOC}, \widehat{COB}, BOA$ sono eguali.

Facendo ruotare la figura attorno ad O dell'angolo $\widehat{COB}$, il vertice C va in B, B in A, ed A in C, la CB si porta sulla BA e l'angolo da esse formato, cioè l'angolo esterno CBE è eguale per postulato all'angolo COB. Proseguendo nella rotazione, con due altre rotazioni eguali, la figura si sovrappone a se stessa; e la somma dei tre angoli di rotazione, ossia dei tre angoli esterni del triangolo dato, è eguale ad un angolo giro, ossia a quattro retti.

D'altra parte ogni angolo interno di ABC è supplementare dell'angolo esterno; perciò la loro somma sarà eguale a sei retti meno la somma degli angoli esterni, ossia a sei retti meno quattro retti: ossia a due retti. c. d. d.

5. La verità del teorema nel primo caso, secondo Eutocio e Gemino, dimostrato dai pitagorici è dunque una conseguenza immediata del postulato pitagorico della rotazione. Dimostrato il teorema agevolmente in questo caso particolare, era naturale che gli antichi si chiedessero cosa avveniva in generale, ed era naturale che prima del caso generale essi studiassero l'altro caso particolare del triangolo isoscele.

In questo secondo caso la dimostrazione non è così immediata; occorre premettere parecchie altre proposizioni tutte dimostrabili con una certa facilità e senza bisogno del postulato di Euclide, come del resto si trovano in Euclide stesso e nei testi moderni. Ad essi rimandiamo per le dimostrazioni e ci limitiamo a ricordare queste proprietà, che sono del resto comprese tra quelle indicate innanzi:

a) La bisettrice dell'angolo al vertice di tal triangolo isoscele è anche mediana ed altezza.

b) Esistenza, unicità e determinazione del punto medio di un segmento.

c) Teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

d) La somma di due angoli interni di un triangolo è sempre minore di due retti.

e) Se un angolo di un triangolo è maggiore od eguale ad un retto gli altri due sono acuti.

f) Se in un triangolo un lato a è corrispondentemente maggiore eguale o minore di un secondo lato b, l'angolo $\hat{A}$ opposto ad a è corrispondentemente maggiore, eguale o minore dell'angolo $\hat{B}$ opposto a *b*; e viceversa.

g) Se un triangolo ha un angolo ottuso o retto, il lato opposto ad esso è il maggiore.

h) In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.

i) Definizione, esistenza, unicità della perpendicolare ad una retta per un punto.

k) Teoremi inversi sopra la mediana e l'altezza del triangolo isoscele.

l) Teoremi sull'asse di un segmento e sulle bisettrici degli angoli formati da due rette concorrenti.

Premesso questo dimostriamo il

TEOREMA: *La somma degli angoli interni di un triangolo isoscele è eguale a due retti.*

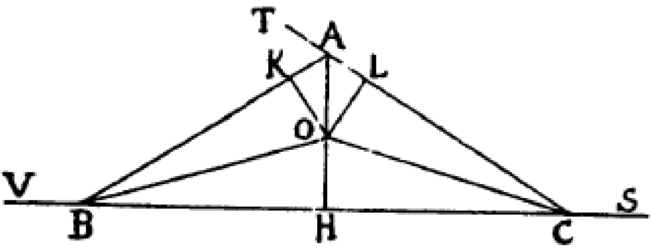


Fig. 6

Sia ABC il triangolo isoscele (fig. 6) e sia AB = AC e quindi $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$; sia AH la bisettrice, mediana ed altezza del triangolo isoscele. Si dimostra come nel caso precedente che la bisettrice dell'angolo alla base ABC incontra la AH in un punto O interno, e congiunto O con C dall'eguaglianza (1° criterio) dei triangoli BAO, CAO segue che OB = OC e perciò $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, e perciò CO è la bisettrice di $\widehat{ACB}$.

D'altra parte, essendo BC < AB + AC sarà la metà BH < AB = AC; e presi allora sui lati BK = CL = BH i punti K ed L risultano interni rispettivamente ad AB ed AC. Congiunto O con K e con L, i triangoli OKB, OHB, OHC, OLC risultano eguali per il 1° criterio, e perciò OH = OK = OL, e le AB, AC rispettivamente perpendicolari ad OK ed OL. Facciamo adesso ruotare la figura intorno ad O, in modo che OH ruota in OK, la BC perpendicolare ad OH si porta sulla retta BA perpendicolare alla OK in K, e per il postulato della rotazione l'angolo esterno VBA del triangolo dato risulta eguale all'angolo di rotazione $\widehat{HOK}$. Continuando la rotazione nello stesso verso OK va su OL, la AB perpendicolare ad OK va su CA perpendicolare ad OL e l'angolo esterno $\widehat{BAT}$ è eguale a $\widehat{KOL}$. Proseguendo la rotazione e portando OL sopra OH la figura ritorna, dopo un giro completo, sopra se stessa, ed $\widehat{ACS} = \widehat{LOH}$.

La somma dei tre angoli esterni è eguale all'intera rotazione di quattro retti; ed anche questa volta, essendo i tre angoli del triangolo dato rispettivamente supplementari degli angoli esterni adiacenti, la loro somma sarà eguale a sei retti meno la somma degli angoli esterni, ossia a sei retti meno quattro retti, ossia a due retti c. d. d.

6. Passiamo al caso generale.

Occorre solo premettere i seguenti teoremi, che si dimostrano agevolmente per assurdo, e che per brevità ci limitiamo ad enunciare:

a) In un triangolo acutangolo i piedi delle tre altezze sono interni ai lati.

b) In un triangolo ottusangolo o rettangolo il piede dell'altezza relativa al lato maggiore è interno al lato.

Basta questo per dimostrare che:

TEOREMA: *In un triangolo qualunque la somma dei tre angoli è eguale a due retti.*

Sia A (fig. 7) il vertice dell'eventuale angolo retto od ottuso del triangolo qualunque ABC. Abbassata l'altezza AH, il piede H è interno a BC e l'angolo $\widehat{BAC}$ è divi-

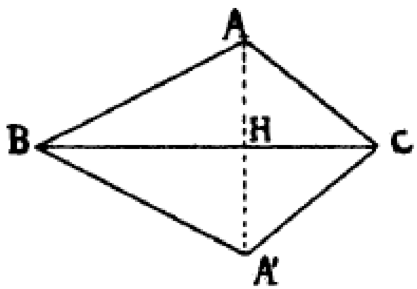


Fig. 7

so in due parti dalla AH. Sul prolungamento di AH prendiamo HA' = AH e congiungiamo A con B e con C. I triangoli rettangoli AHB, A'HB sono eguali per il 1º criterio, quindi BA = BA' e $\widehat{BAH} = \widehat{BA'H}$; analogamente $\widehat{CAH} = \widehat{CA'H}$.

Per il teorema precedente applicato ai due triangoli isosceli BAA', CAA' si ha:

$$A\widehat{BA'} + B\widehat{AA'} + BA'A = \text{due retti}$$

ed, essendo BH bisettrice del triangolo isoscele BAA', si ha:

$$\widehat{ABH} + \widehat{BAA'} = \text{un retto}\,.$$

Analogamente

$$\widehat{ACH} + \widehat{CAA'} = \text{un retto}\,,$$

e sommando

$$\widehat{ABH} + \widehat{ACH} + \widehat{BA'A} + \widehat{CAA'} = \text{due retti}\,,$$

ossia

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = \text{due retti}\,.$$

Il teorema è così dimostrato in generale.

7. La dimostrazione si è presentata immediata nel primo caso menzionato da Eutocio-Gemino, e poi ordinatamente per gli altri due casi da essi menzionati.

Occorre però osservare: 1° che la dimostrazione del primo caso è, da un punto di vista moderno, superflua, perché il secondo caso include il primo; 2° che il caso generale si può anche dimostrare direttamente in modo da includere gli altri due.

Per ottenere questa dimostrazione generale occorre solo premettere due teoremi, che sono i seguenti:

TEOREMA: *Due triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa eguale ed un angolo acuto eguale sono eguali.*

Sia (fig. 8) $\hat{A} = \hat{A'} = 90°$; $a=a'$; $\hat{B} = \hat{B'}$.

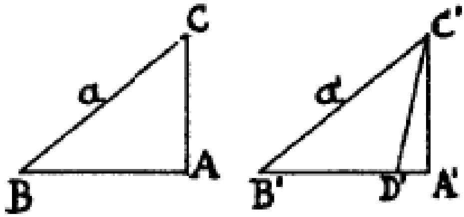


Fig. 8

Se BA = B'A' il teorema è dimostrato; se fosse invece ad esempio B'A'>BA, preso B'D'=BA, il triangolo B'D'C' risulta per il 1° criterio eguale al triangolo BAC; quindi C'D' perpendicolare a B'A', e questo non può accadere perché da C non si può condurre che una sola perpendicolare alla B'A'.

L'altro teorema che occorre premettere è il seguente.

TEOREMA: *Due triangoli rettangoli aventi le ipotenuse eguali ed un cateto eguali sono eguali.*

Siano (fig. 9) BAC, B'A'C' i due triangoli, $\hat{A}=\hat{A'}=90°$, BC=B'C', CA= CA'.

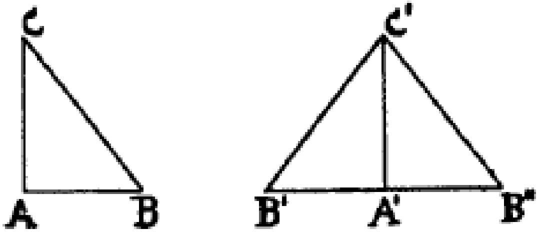


Fig. 9

Preso A'B''=AB il triangolo rettangolo C'A'B'' è eguale a CAB, C'B''=CB=CB', e nel triangolo isoscele

B'C'B" l'altezza è anche mediana, quindi B'A'=A'B"=AB.

Premesso questo si ottiene la seguente dimostrazione generale del teorema fondamentale:

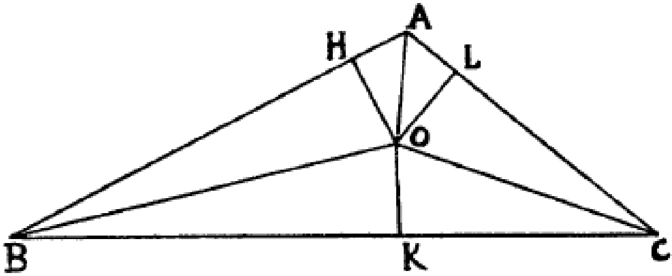


Fig. 10

Sia A (fig. 10) il vertice dell'eventuale angolo retto od ottuso del triangolo ABC; e conduciamo le bisettrici degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$. Si dimostra al solito che esse si incontrano in un punto O interno al triangolo ABC. Gli angoli $\widehat{ABO}$, $\widehat{BAO}$ metà di angoli convessi sono acuti, dimodoché nel triangolo OAB l'eventuale angolo non acuto è quello di vertice O, e perciò in tutti i casi, abbassando da O la perpendicolare OH ad AB il piede H è interno ad AB. Congiunto O con C l'angolo acuto ACB è diviso in due angoli acuti, dimodoché anche nei triangoli AOC, BOC l'eventuale angolo non acuto è quello di vertice O, ed anche in essi i piedi L e K delle perpendicolari abbassate da O sopra AC e BC sono in tutti i casi rispettivamente interni ad AC e BC.

I triangoli rettangoli OBK, OBH hanno l'ipotenusa eguale ed un angolo acuto eguale; perciò sono eguali, ed

OK=OH. Analogamente sono eguali i triangoli OAH, OAL e quindi OH=OL. Ma allora i triangoli rettangoli OLC, OKC hanno l'ipotenusa in comune, il cateto OL=OK, sono quindi eguali e perciò OC è bisettrice di $\widehat{ACB}$. Si ha dunque che le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo qualunque si incontrano in un punto interno al triangolo, tale che, abbassando da esso le perpendicolari ai lati i tre piedi H, L, K sono interni ai tre lati, e si ha: OH=OK=OL.

Non resta adesso che fare ruotare la figura attorno ad O, portando successivamente OK su OH, OL, OK e la retta BC andrà successivamente sulla AB, CA, BC; gli angoli esterni del triangolo ABC per il postulato pitagorico della rotazione risulteranno rispettivamente eguali ai tre angoli $\widehat{KOH}$, $\widehat{HOL}$, $\widehat{LOK}$; la loro somma sarà quattro retti, e quella degli angoli interni sarà due retti.

8. Questa dimostrazione rende dunque superflue le due precedenti; ed in ogni caso la dimostrazione nel caso del triangolo isoscele include quella del triangolo equilatero. Se ne deve concludere che non è questa la dimostrazione in tre tappe degli antichi pitagorici, menzionata da Eutocio e Gemino?

Concludere in questo senso equivarrebbe ad attribuire agli antichi la tendenza e l'abitudine moderna alla generalizzazione, ossia significherebbe giudicare alla stregua della nostra mentalità. Per obbedire alle nostre norme avrebbero dovuto rinunziare a dimostrare subito il teorema nel primo e semplice caso ed attendere (e perché mai?) di avere trovato il modo di dimostrarlo nel secondo e nel terzo caso. Non va dimenticato inoltre che essi *scoprirono* il teorema; ed è probabile che la scoperta sia avvenuta per il caso del triangolo equilatero; soltanto dopo ed in conseguenza sarà sorto il dubbio se il teorema valesse in generale, e solo dopo e con ben altra fatica saranno giunti a dimostrarlo negli altri due casi; quindi il passo di Eutocio si può riferire non soltanto all'ordine dell'esposizione pitagorica del teorema ma all'ordine cronologico, storico delle loro scoperte.

Perciò, a meno che si riesca a dedurre ed in modo abbastanza semplice il secondo caso dal primo, siamo convinti che le nostre dimostrazioni sono proprio quelle degli antichi, e quasi quasi riteniamo che anche nel terzo caso essi non dedussero la dimostrazione dal secondo caso, ma preferirono per analogia di dimostrazione ricorrere ancora al postulato della rotazione. Si tenga presente ad ogni modo quanto scriveva il Tannery[35]: «credo inutile insistere sulla difficoltà che sembrano avere trovato i primi geometri ad elevarsi alle generalizzazioni più semplici», citando ad esempio proprio il caso del teorema dei due retti.

Comunque siamo giunti a questo risultato: Abbiamo dimostrato il teorema fondamentale sopra la somma degli angoli di un triangolo senza fare uso del postulato e del concetto delle rette parallele. È un risultato di una

35 P. Tannery, *La Géom. gr.*, pag. 101, nota 2.

certa importanza se il postulato pitagorico della rotazione non equivale al postulato di Euclide.

9. Effettivamente il postulato pitagorico della rotazione non è equivalente al postulato dì Euclide. Ed ecco perché.

Abbiamo veduto che dal postulato pitagorico della rotazione se ne deduce il teorema dei due retti. Viceversa, ammettendo che la somma degli angoli di un triangolo sia una costante, se ne deduce il nostro postulato.

Sia, infatti (fig. 4), O il centro di rotazione ed S il punto d'incontro della posizione iniziale e finale della retta *r*. Prendiamo sulla *r* un punto A situato rispetto alla *r′* dalla parte di O, ed uno B da parte opposta; la *r′* taglia in un punto T il segmento OB. La rotazione che porta *r* in *r′* porta il punto A in un punto A' e B in un punto B' ed è $\widehat{AOA'}=\widehat{BOB'}$ l'angolo di rotazione. I triangoli AOB, A'OB' sono eguali, quindi $\hat{B}=\hat{B'}$. I triangoli OTB', STB hanno dunque gli angoli $\hat{B}=\hat{B'}$, $\widehat{OTB'}=\widehat{STB}$; e, se ammettiamo che la somma degli angoli di un triangolo qualunque sia costante, il terzo angolo TSB risulterà eguale al terzo angolo $\widehat{B'OB}$; ossia l'angolo rr' eguale all'angolo di rotazione, come dovevasi dimostrare. Dunque il postulato pitagorico della rotazione e la proposizione sopra la costanza della somma degli angoli di un triangolo si equivalgono come postulati.

Ammettendo quindi la costanza della somma degli angoli di un triangolo si potrebbe dedurne il nostro postulato della rotazione, ed applicandolo al caso del triangolo equilatero, si troverebbe subito che la quantità di cui si è ammessa la costanza è eguale a due retti.

Girolamo Saccheri propose, come è noto, la nozione che la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti in sostituzione del postulato di Euclide, ed il Legendre ha dimostrato che, se si ammette anche il postulato di Archimede, la proposizione Saccheri equivale effettivamente al postulato di Euclide. Ne segue immediatamente che se oltre al postulato pitagorico della rotazione ammettessimo anche quello di Archimede esso equivarrebbe a quello di Euclide.

Se non si ammette altro, esso non equivale al postulato di Euclide. Infatti il Dehn (1900) ha dimostrato[36] che l'ipotesi del Saccheri è compatibile non solo con l'ordinaria geometria elementare, ma anche con una nuova geometria, necessariamente non archimedea, dove non vale il V postulato, ed in cui per un punto passano infinite non secanti rispetto ad una retta data[37].

---

36 *Math. Ann.*, B. 53, pag. 405-439, *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme in Dreieck*; cfr. Roberto Bonola, *Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non euclidee*, in Enriquez, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, 3 ediz., vol. II, pag. 333.

37 Il Dehn chiama questa geometria: *geometria semieuclidea*.

Lo stesso vale senz'altro per il nostro postulato. Una volta ammessa la proposizione Saccheri o l'equivalente postulato pitagorico della rotazione, si può:

1º – ammettere il postulato di Archimede, ed allora ne risulta dimostrato quello di Euclide; e si ottiene l'ordinaria geometria euclidea ed archimedea.

2º – negare quello di Euclide, e quindi necessariamente anche quello di Archimede; e si ottiene la geometria semieuclidea del Dehn.

3º – ignorare completamente i due postulati di Euclide e di Archimede e le questioni relative, e sviluppare una geometria più generale, indipendente dalla loro accettazione o negazione (e valevole quindi nei due casi), come conseguenza del teorema dei due retti oramai ottenuto.

Gli antichi pitagorici ignoravano quasi certamente il postulato di Archimede[38], ed avevano ottenuto la dimostrazione del teorema dei due retti con un procedimento indipendente dalla teoria delle parallele.

Non introducendo il postulato di Archimede noi veniamo a trovarci esattamente nella stessa posizione. Se i pitagorici antichi non hanno fatto uso del concetto di pa-

---

38 La proposizione 1ª del libro X di Euclide equivale all'assioma di Archimede. Da alcuni passi di Archimede, risulta che, prima ancora, Eudosso aveva fatto uso di questo «lemma»; ed il Loria ritiene che l'origine di questo lemma debba farsi risalire ad Ippocrate da Chio (cfr. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, pag. 143-145 e 224). Comunque gli antichi pitagorici dovevano ignorare il postulato di Archimede.

rallela, deve essere possibile adesso, dal teorema dei due retti, sempre senza ricorrere al postulato di Euclide ed a quello di Archimede, dedurre una dopo l'altra tutte le scoperte attribuite da Proclo ai pitagorici. Se questo accade questa geometria più generale concorderà o coinciderà con la geometria della Scuola Italica.

10. Prima di proseguire vogliamo però esporre una via più rapida per dedurre dal postulato pitagorico della rotazione il teorema dei due retti.

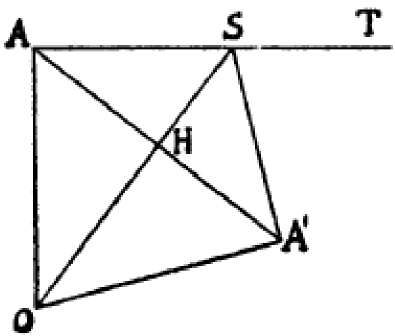


Fig. 11

Dal vertice A dell'angolo retto (fig. 11) di un triangolo rettangolo qualunque OAS conduciamo la perpendicolare AH all'ipotenusa, e sul prolungamento prendiamo HA'=AH. Sappiamo che H è interno ad OS; congiunto A' con O e con S, i triangoli rettangoli OHA', SHA' risultano rispettivamente eguali ai due OAH, SHA; e quindi OA=OA', SA=SA', $\widehat{OAH}=\widehat{OA'H}$, $\widehat{SAH}=SA'H$ ed $SA\widehat{'O}=SA\widehat{'H}+OA'H$ =

$\widehat{SAH}+\widehat{OAH}=$ un retto. Perciò, facendo ruotare intorno ad O dell'angolo $\widehat{AOA'}$, la AS va sopra la perpendicolare in A' ad OA', ossia sulla A'S, e perciò per il postulato della rotazione $\widehat{AOA'}=\widehat{A'ST}$. Ne segue che $\widehat{AOA'}$ ed $\widehat{ASA'}$ sono supplementari, e quindi nel quadrilatero AOA'S si ha:

$$\widehat{SAO}+\widehat{AOA'}+\widehat{OA'S}+\widehat{A'SA}=4 \text{ retti}.$$

E siccome le altezze SH, OH dei triangoli isosceli SAA', OAA' bisecano gli angoli al vertice la somma $\widehat{HSA}+\widehat{SAO}+\widehat{AOH}$ è la metà della precedente, ossia abbiamo il teorema: In un triangolo rettangolo qualunque la somma degli angoli è eguale a due retti.

Dal triangolo rettangolo qualunque si passa a quello isoscele (ed in particolare a quello equilatero), conducendo la bisettrice dell'angolo al vertice che è anche l'altezza; ed essendo oramai complementari gli angoli acuti di un triangolo rettangolo qualunque, la somma degli angoli acuti dei due triangoli rettangoli in cui è decomposto il triangolo isoscele risulta eguale a due retti. Dal caso del triangolo isoscele si passa a quello generale nel modo già visto.

La via tenuta, passando per le tre tappe menzionate da Gemino, è quella probabilmente tenuta dagli scopritori della proprietà; oggi, a scoperta fatta, è più speditivo procedere nel modo ora indicato.

CAPITOLO II
IL TEOREMA DI PITAGORA

1. Abbiamo avuto bisogno del postulato pitagorico della rotazione per dimostrare il teorema dei due retti. Da ora in poi, in tutto quanto segue, non ne avremo più bisogno, perché ci basta il teorema dei due retti ad esso, come sappiamo, equivalente. E, siccome sappiamo[39] che i pitagorici conoscevano il teorema dei due retti perché lo dimostravano, la restituzione della geometria pitagorica procede da ora in poi partendo da questa loro sicura conoscenza, comunque ottenuta, ma senza il postulato delle parallele. Anche se la via tenuta per ottenere il teorema dei due retti fosse stata un'altra, sempre però indipendentemente dal postulato di Euclide, ci troveremmo sempre nella medesima situazione di fronte al problema della restituzione della geometria pitagorica, come sviluppo e conseguenza del teorema dei due retti.

Limiteremo la nostra indagine a quanto occorre per ottenere i risultati attribuiti da Proclo ai pitagorici,

39 La testimonianza di Eutocio, pur essendo Eutocio posteriore anche a Proclo, è attendibile. Dice il Loria (*Le scienze esatte*, pag. 721) che Eutocio, di mediocrissimo ingegno, era però assai diligente, accurato e coscienzioso; è difficile d'altra parte inventare una notizia così precisa e circostanziata.

omettendo spesso le dimostrazioni quando coincidono con quelle a tutti note.

E per prima cosa vediamo come il teorema dei due retti consenta immediatamente la costruzione e la considerazione del quadrato e del rettangolo e la dimostrazione del teorema di Pitagora. E notiamo come dal teorema dei due retti discendano subito, tra le altre, le seguenti conseguenze:

a) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari; ed in quello rettangolo isoscele sono eguali a mezzo retto.

b) L'angolo del triangolo equilatero è eguale ad un terzo di due retti.

c) L'angolo esterno di un triangolo qualunque è eguale alla somma dei due interni non adiacenti.

2. Passando ai quadrilateri, osserviamo subito che Euclide ne distingue, nelle sue definizioni, cinque: il quadrato, il rettangolo, il rombo, il romboide, e tutti gli altri.

Essi sono definiti e distinti da Euclide in base alla eguaglianza dei lati e degli angoli, e la definizione di rette parallele viene *subito dopo*; mentre invece nel testo la costruzione del quadrato si basa sulle parallele e compare alla fine del primo libro.

Definito il quadrato come un quadrilatero con tutti i lati eguali e tutti gli angoli retti, la costruzione di un quadrato di lato assegnato AB, e quindi la sua esistenza, discendono invece dal teorema dei due retti e da esso soltanto.

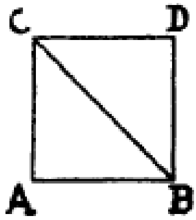


Fig. 12

Condotto (fig. 12) AC eguale e perpendicolare ad AB, i due angoli alla base del triangolo rettangolo isoscele ABC sono eguali a mezzo retto. Conduciamo per B la semiretta[40] perpendicolare ad AB dalla parte di C, e prendiamo su essa BD = AB = AC; la BC divide l'angolo retto ABC in due parti eguali; A e D stanno da parti opposte rispetto a CB, e quindi la CB divide l'an-

40 Adoperiamo il termine: *semiretta* per brevità di elocuzione; ma il concetto di rette e semirette prolungate all'infinito non poteva, ci sembra, essere condiviso dai pitagorici. Effettivamente del resto la 2ª, 3ª e 4ª definizione di Euclide si riferiscono alla linea ed alla retta limitata, cioè al nostro segmento; ed il postulato secondo di Euclide ammette solo che la retta, cioè il segmento, si può prolungare κατὰ τὸ συνεχές. Bisognerebbe dunque dire: da B si conduca dalla parte di C rispetto a D un segmento perpendicolare ad AB, e su esso convenientemente prolungato se occorre, si prenda il segmento BD = AC... La definizione 23ª di Euclide ed il postulato V *introducono* il concetto di rette infinite. Si tratta dunque di un'aggiunta non conforme allo spirito dell'antica geometria e che male si adatta alle altre definizioni dell'elenco stesso che precede il testo di Euclide.

golo $\widehat{ACD}$. I triangoli ABC, DBC risultano eguali per il 1° criterio, quindi CD = AC, e $D\widehat{C}B = ACB$, $C\widehat{D}B = CAB$. Il quadrilatero ABCD ha dunque tutti i lati eguali e tutti gli angoli retti; è dunque, per definizione, un quadrato. La diagonale BC lo divide in due triangoli rettangoli isosceli eguali. Si dimostra facilmente che AD = BC e che le due diagonali si tagliano nel punto medio e sono perpendicolari tra loro.

3. *Definizione, esistenza, costruzione e proprietà del rettangolo.*

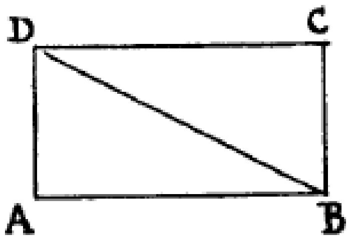


Fig. 13

Prendiamo la seguente definizione: Rettangolo è un quadrilatero con tutti gli angoli retti. Sia ABD (fig. 13) un triangolo rettangolo qualunque ed A il vertice dell'angolo retto. Condotta per B la semiretta perpendicolare ad AB dalla parte di D rispetto ad AB, e preso su di essa BC = AD, C ed A rimangono da parti opposte rispetto a BD perché, essendo ABD acuto ed ABC retto la BD divide l'angolo retto $\widehat{ABC}$. Congiunto C con D, i triangoli ABD, CBD sono eguali per il 1° criterio, e quindi DC=AB, $\widehat{DCB} = \widehat{DAB} =$ un retto,

$\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$; e siccome sappiamo che ABD è complemento di ADB anche CDB sarà complemento di $\widehat{ADB}$, ossia anche il quarto angolo ADC del quadrilatero ABCD è retto; esso è dunque un rettangolo.

I lati opposti sono eguali ed i loro prolungamenti non si possono incontrare perché sono perpendicolari ad una stessa retta; si dimostra facilmente che la diagonale AC è eguale a BD e che esse si tagliano per metà.

Viceversa se ABCD è un rettangolo, si osserva per principiare che i vertici C e D debbono stare da una stessa parte rispetto ad AB, perché altrimenti la CD sarebbe tagliata in un punto M dalla AB, e dai triangoli rettangoli ADM, CBM risulterebbe che gli angoli $\widehat{ADC}$, DCB non potrebbero essere retti. Sia dunque ABCD un rettangolo; la BD determina i due triangoli rettangoli ABD, CBD, ed essendo in entrambi acuti gli angoli adiacenti all'ipotenusa, la BD divide i due angoli retti di vertici B e D del rettangolo, e lascia A e C da parti opposte; inoltre CBD è complemento di $\widehat{ABD}$, e quindi $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$; similmente $\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$, ed i due triangoli rettangoli ABD, CBD sono eguali, e CD = AB, BC = AD ecc.

Per costruire il rettangolo di lati eguali ad AB ed AD, si prendono a partire dal vertice A di un angolo retto sopra i due lati i segmenti AB, AD; si conduce per B la perpendicolare ad AB, e su di essa dalla parte di D si prende BC = AD, si unisce C con D ed ABCD è il rettangolo richiesto.

Il teorema dei due retti con le conseguenti proprietà del triangolo rettangolo assicurava dunque immediatamente ai pitagorici l'effettiva esistenza dei quadrati e dei rettangoli, ne permetteva la costruzione, e ne dava le proprietà fondamentali.

Per dimostrare adesso la proprietà relativa ai poligoni regolari congruenti attorno ad un vertice comune, bisognerebbe passare alla considerazione dei poligoni qualunque; ma, siccome per dimostrare il teorema di Pitagora non abbiamo bisogno di altro, passiamo senz'altro alla dimostrazione di questo teorema fondamentale.

4. TEOREMA DI PITAGORA: *In un triangolo rettangolo qualunque il quadrato costruito sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti.*

Adoperiamo l'antica espressione: *eguale*, invece della moderna *equivalente*, anche perché nella dimostrazione ci serviremo (come fa Euclide nella sua) della «nozione comune» di *eguaglianza per differenza*, e non della nozione di eguaglianza *additiva* che sola conduce al concetto di equivalenza (Duhamel) o di equicomposizione (Severi).

Nel caso particolare del triangolo rettangolo isoscele, Platone dà nel *Menone* la seguente dimostrazione[41]: pre-

---

41 PLATONE, *Menone*, XIX – Una traduzione corretta e completa del passo di Platone trovasi nelle «*Scienze esatte nell'antica Grecia*» del LORIA a pag. 115-20. Platone conosceva la validità

so un quadrato ABCD (fig. 14) e riunitine altri tre eguali congruenti in un vertice come è indicato in figura si ottiene un quadrato quadruplo del dato. Dividendo poi ciascuno di quei quattro quadrati con la diagonale si ottiene un quadrato che è doppio del quadrato dato, perché composto di quattro triangoli eguali ad ABC, mentre il quadrato dato lo è di due.

Passando al caso generale, tra le settanta ed oltre dimostrazioni conosciute, le più semplici sono:

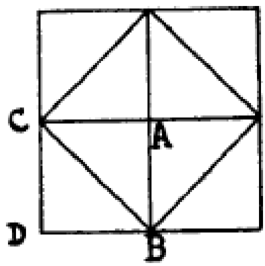


Fig. 14

1º – quella suggerita dal Bretschneider, il cui autore è ignoto ai moderni, ma di cui si sa che è antica; 2º – quella ideata da Abu'l Hasan Tabit (morto nel 901 d.C.) e di cui ci ha serbato memoria Anarizio[42]; 3º – quella di Baskara posteriore a Tabit di circa tre secoli[43]. La prima, sia perché non si sa a chi vada attribuita, sia per la sua

---

del teorema nel caso del triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa doppia del cateto minore; risulta dal *Timeo*, XX.

42 Cfr. G. Loria, *Storia delle Matematiche*, vol. I, pag. 341.

43 Cfr. G. Loria, *Storia delle Matematiche*, vol. 1, pag. 315.

grande semplicità, può darsi benissimo, e noi ne siamo convinti, che sia quella di Pitagora.

Vediamo come questa dimostrazione si possa fare senza il postulato delle parallele.

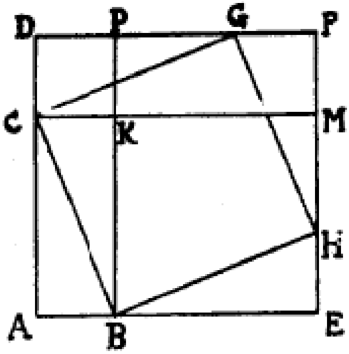


Fig. 15

Supponiamo che nel triangolo rettangolo ABC (fig. 15) sia $\hat{A}$ l'angolo retto ed AC il cateto maggiore. Sul prolungamento del cateto AC prendiamo CD = AB e sul prolungamento di AB prendiamo BE = AC. Ne segue AE = AD. Per C e per D conduciamo dalla parte di B rispetto ad AD le semirette perpendicolari alla AD e prendiamo su esse DP = CK = AB; e congiungiamo K con P e con B. I due quadrilateri ABKC, CKPD risultano per costruzione rispettivamente un rettangolo ed un quadrato; e precisamente il rettangolo è eguale al doppio del triangolo rettangolo dato, ed il quadrato ha per lato un segmento eguale al cateto AB del triangolo dato. Essi sono separati e situati da parti opposte del lato comune CK, perché le tre semirette AB, CK, DP perpendicolari ad una stessa retta AD non si incontrano due a due, e siccome C è compreso tra A e D, la DP e la AB stanno da parti opposte della CK. Essendo poi retti gli angoli di vertice K del rettangolo e del quadrato la loro somma è un angolo piatto, e quindi i punti P, K, B risultano allineati sopra una perpendicolare comune alle rette DP, CK, AB.

Sui prolungamenti delle DP e CK dalla parte opposta alla AD prendiamo i segmenti PF = KM = BE = AC, e congiungiamo M con F e con E. Il quadrilatero PKMF risulta un rettangolo per costruzione ed anche esso è il doppio del triangolo dato ABC; KMBE risulta un quadrato che ha per lato un segmento eguale al cateto AC del triangolo dato; ed anche i tre punti F, M, E risultano allineati sopra una perpendicolare comune alle tre rette AB, CK, DP. Si riconosce subito che il quadrilatero AEFD ha tutti gli angoli retti e tutti i lati eguali e quindi è un quadrato.

La terna delle tre rette AB, CK, DP e la terna delle tre rette AD, BP, EF sono tra loro perpendicolari, e poiché K è compreso tra C ed M, e tra B e P, CM e BP dividono il quadrato AEFD in quattro parti. Esso è quindi eguale alla loro somma. Il quadrato AEFD è dunque eguale alla somma del quadrato costruito sul cateto AB, del quadrato costruito sul cateto AC, e di quattro triangoli rettangoli eguali al dato.

Prendiamo ora sopra DF ed FE i segmenti DG = FH = AC e congiungiamo C con G, G con H ed H con B. I triangoli rettangoli ABC, DCG, FGH, EHB risultano eguali per il 1° criterio e perciò il quadrilatero CGHB ha tutti i lati eguali. Inoltre siccome le semirette GC e GH stanno da una stessa parte rispetto alla DF e gli angoli DGC, FGH sono acuti e complementari (perché $\widehat{FGH}=\widehat{DCG}$) l'angolo CGH che si ottiene togliendo dall'angolo piatto i due angoli $\widehat{DGC}$, FGH risulta retto; in modo analogo si dimostrano retti gli altri angoli del quadrilatero CGHB, il quale dunque è il quadrato costruito sull'ipotenusa BC del triangolo dato.

Siccome poi DCG è acuto e DCM retto, il triangolo CGD ed il quadrilatero CGFM stanno da parti opposte rispetto a CG. CG divide dunque l'intero quadrato in due parti e cioè il triangolo CDG ed il poligono CGFEA. E poiché CGF è ottuso e CGH retto, il poligono precedente è diviso da GH in due parti e cioè il triangolo GFH ed il poligono CGHEA; questo a sua volta è diviso dalla HB in due parti e cioè il triangolo HBE ed il poligono CGHBA, il quale finalmente è diviso dalla BC nel triangolo ABC e nel quadrato CGHB.

Il quadrato CGHB si ottiene dunque dal quadrato ADFE togliendone quattro triangoli rettangoli eguali ad ABC. Ma togliendo dal quadrato ADFE i due rettangoli ABKC, KMFB, ossia quattro triangoli eguali al dato, si ottiene la somma dei quadrati costruiti sui cateti AB ed AC, e siccome la seconda nozione euclidea (che si trova però già in Aristotele) dice che «togliendo da cose eguali cose eguali si ottengono cose eguali»; così il quadrato costruito sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

5. Ammettendo il postulato pitagorico della rotazione ed ignorando i due postulati di Euclide e di Archimede, abbiamo così ottenuto subito i due teoremi fondamentali della geometria: il teorema dei due retti, e da questo il teorema di Pitagora. Essi sono validi entrambi tanto nella ordinaria geometria euclidea ed archimedea quanto nella geometria più generale che ammette il postulato pitagorico della rotazione e prescinde dai postulati di Euclide e di Archimede.

Il teorema di Pitagora si presenta così come primo teorema nella teoria dell'equivalenza; precisamente come, secondo il Tannery, avveniva coi pitagorici. Esso sta alla base di questa teoria e non alla fine. La dimostrazione che ne abbiamo dato dipende unicamente dal teorema dei due retti, noto agli antichi pitagorici, e dalle sue conseguenze immediate. Si sa che una dimostrazione basata sulla figura che abbiamo adoperato esisteva, è antica, ed il suo autore non è noto agli storici moderni della matematica. Noi non abbiamo fatto altro che renderla indipendente dal postulato di Euclide, di cui i pitagorici non si servivano per dimostrare il teorema dei due retti e che diventa perciò superfluo anche per il teorema di Pitagora.

Tutto sommato, non ci sembra affatto improbabile che questa sia proprio la dimostrazione che il fondatore della «Scuola Italica» scoprì e dette venticinque secoli fa. Con essa il teorema è valido nel senso di eguaglianza per differenza in una geometria che ignora od anche che nega i postulati di Euclide e di Archimede. La dimostrazione del testo di Euclide prova la validità del teorema di Pitagora sempre nel senso di eguaglianza per differenza se ed anche se si ammette il postulato delle parallele e nulla si dice di quello di Archimede; le dimostrazioni moderne ne provano la validità nel senso di eguaglianza addittiva (Duhamel), equivalenza od equicomposizione (Severi), se ed anche se si ammette insieme al postulato di Euclide anche quello di Archimede.

6. Dalla dimostrazione che abbiamo dato del teorema di Pitagora si traggono subito, e con la massima semplicità, i tre importanti teoremi espressi con le notazioni moderne dalle formule:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Quanto al primo basta semplicemente osservare la figura 15 per riconoscere che:

TEOREMA: *Il quadrato che ha per lato la somma di due segmenti* (AB e BE) *è eguale alla somma del quadrato* (CKPD) *costruito sul primo segmento, del quadrato* (BEMK) *costruito sul secondo segmento e di due rettangoli aventi i lati eguali ai segmenti dati.*

Nel caso che i due segmenti siano eguali il teorema diventa: *il quadrato che ha il lato doppio del lato di un quadrato dato è quadruplo di questo*[44].

Premessi i seguenti teoremi:

44 Platone, *Menone*, XVII.

$$am+bm=(a+b)m$$
$$am-bm=(a-b)m$$

di immediata dimostrazione, dalla fig. 15, ponendo AE=a, AB=b si ha BE=a – b, e $(\mathrm{BE})^2$ =quad. ED + quad. DK – 2 rett. ABDP ossia $(a-b)^2=a^2+b^2-2\,ab$ cioè il

TEOREMA: *Se un segmento è eguale alla differenza di due segmenti il quadrato costruito su di esso è eguale alla somma dei quadrati costruiti sui due segmenti diminuita di due volte il rettangolo che ha per lati i due segmenti.*

Ponendo poi AE=a, BE=b e AB=d dalla fig. 15 si ha: la differenza dei quadrati costruiti su AE e BE è data dallo *gnomone* ADFMKB; ossia:

$$a^2-b^2-ad+bd=(a+b)d$$

e quindi:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

ossia il

TEOREMA: *La differenza di due quadrati è eguale al rettangolo che ha per lati la somma e la differenza dei due segmenti.*

Questo gnomone non è altro che la *squadra* dei muratori; e nel caso in cui a sia l'ipotenusa e b un cateto di un triangolo rettangolo, lo gnomone è eguale al quadrato costruito sull'altro cateto.

I tre teoremi inversi si possono dimostrare facilmente; così pure il

TEOREMA INVERSO DI PITAGORA: *Se il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo è eguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, il triangolo è rettangolo ed il primo lato è l'ipotenusa.*

Usando per brevità le notazioni moderne supponiamo che tra i lati *a, b, c* di un triangolo sussista la relazione: $a^2 = b^2 + c^2$. Costruito il triangolo rettangolo di cateti *b* e *c*, e chiamandone a_1 l'ipotenusa, si ha per il teorema di Pitagora: $a_1^2 = b^2 + c^2$, e supponendo ad esempio $a > a_1$, si ha sottraendo:

$$a^2 - a_1^2 = (b^2 + c^2) - (b^2 + c^2)$$

e quindi:

$$(a + a_1)(a - a_1) = 0$$

Questo può accadere solo se $a = a_1$; ma allora i due triangoli sono eguali, e quindi il triangolo dato è rettangolo, come volevasi dimostrare.

7. Altri due importanti teoremi che si deducono immediatamente sono i due così detti teoremi di Euclide.

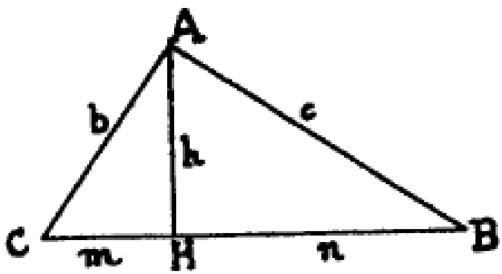


Fig. 16

TEOREMA: *Il quadrato costruito sopra l'altezza di un triangolo rettangolo è eguale al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa.*

Sia AH (fig. 16) l'altezza del triangolo rettangolo ABC. E siano *m, n* le proiezioni CH, HB dei due cateti. Indicando per comodità, rettangoli e quadrati con le notazioni moderne (ma senza introdurre con questo i concetti di proporzione e di misura), dal triangolo rettangolo ABC si ha:

$$m^2+h^2=b^2$$

e perciò:

$$m^2+h^2+c^2=b^2+c^2$$

D'altra parte

$$a=m+n$$

quindi:

$$m^2+n^2+2mn=a^2$$

ma

$$b^2+c^2=a^2$$

quindi anche:

$$m^2+h^2+c^2=m^2+n^2+2mn$$

e per la seconda nozione comune:

[α] $$h^2+c^2=n^2+2mn$$

ma

$$c^2=h^2+n^2$$

e quindi:

$$h^2+c^2=2h^2+n^2$$

$$2h^2+n^2=n^2+2mn; \quad 2h^2=2mn$$

e

[β] $$h^2 = mn$$

Dimostrato questo teorema, osserviamo che il secondo membro della [α] è la somma di due rettangoli aventi la medesima altezza n e le basi n e $2m$; esso è quindi eguale al rettangolo di base $n + 2m$, ed altezza n, ossia:

$$n^2 + 2mn = n(n + 2m) = h^2 + c^2$$

od anche:

$$n(n + m) + nm = h^2 + c^2$$

e per la [β]

$$n(n + m) = c^2$$

ossia

$$na = c^2$$

Si ha dunque il teorema:

TEOREMA: *Il quadrato costruito sopra un cateto di un triangolo rettangolo è uguale al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sopra l'ipotenusa.*

Questo è il così detto primo teorema di Euclide. Ricordiamo che Proclo ci attesta che il teorema non è dovuto ad Euclide e che ad Euclide appartiene solo la dimostrazione che si trova nel testo degli *Elementi* (Libro I, 47). In Euclide la dimostrazione si basa sopra il postulato delle parallele; da essa poi si ottiene il teorema di Pitagora, e dai due l'altro teorema così detto di Euclide.

Da questo teorema segue immediatamente il seguente corollario.

COROLLARIO: *Se due triangoli rettangoli sono tra loro equiangoli ed un cateto di uno di essi è eguale all'i-*

potenusa dell'altro, il quadrato costruito sul cateto del primo è eguale al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa del primo ed il cateto omologo del secondo.

Siano (fig. 17) i triangoli rettangoli ABC, A'B'C e sia $\hat{C} = \hat{C}$ ed AC = B'C' = *b*.

Si ha allora, abbassando l'altezza AH del primo triangolo,

$$b^2 = (\mathrm{AC})^2 - \mathrm{BC} \cdot \mathrm{HC} = ab'$$

c. d. d.

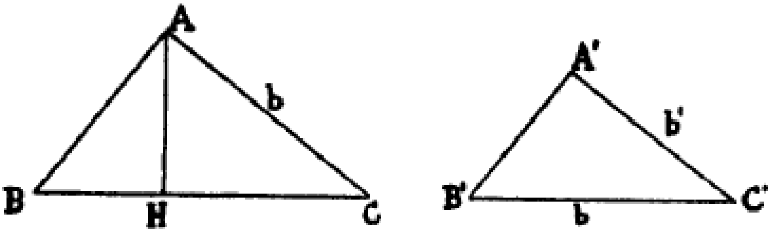


Fig. 17

Di questo corollario ci serviremo in seguito.

Tra le conseguenze del teorema di Pitagora ha massima importanza la scoperta delle grandezze incommensurabili, che sorge dall'applicazione del teorema ad un triangolo rettangolo isoscele. Ma ciò non rientra nel nostro tema; così pure non ci occuperemo dei metodi attribuiti a Pitagora per la formazione dei triangoli rettangoli aventi per misura dei lati dei numeri interi[45].

8. Dallo studio dei rettangoli dobbiamo ora passare a quello dei quadrilateri e dei poligoni in generale. Dal

45 P. Tannery, *La Géom. gr.*, pag. 48.

triangolo rettangolo isoscele e dal triangolo rettangolo qualunque abbiamo ottenuto quadrato e rettangolo e le loro proprietà. In modo simile, partendo dal triangolo isoscele e dallo scaleno, si ottiene il rombo ed il romboide.

Rombo, secondo la definizione che si trova in Euclide, è il quadrilatero equilatero ma non rettangolo (perché in tal caso si chiama quadrato).

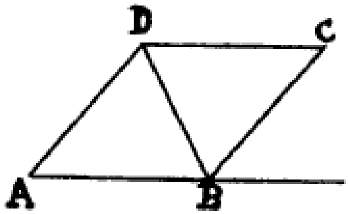


Fig. 18

Sia ABD (fig. 18) un triangolo isoscele non rettangolo, e dal vertice B della base BD conduciamo la semiretta BC da parte opposta di A rispetto alla BD, formante con la BD un angolo $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$, e prendiamo BC = BA. Siccome ABD è acuto, sarà ABC convesso; e quindi C e D stanno dalla stessa parte rispetto ad AB, mentre C ed A sono da parti opposte rispetto a BD. Uniamo C con D: i due triangoli ABD, CBD risulteranno eguali per il 1º criterio e quindi i quattro lati del quadrilatero ABCD sono eguali. Esso è dunque un rombo.

Gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}$ sono eguali, e si riconosce subito che anche $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$; la diagonale BD biseca gli angoli del rombo; l'asse di BD passa per A e per C;

quindi anche l'altra diagonale biseca gli angoli, è perpendicolare alla prima ed il loro punto d'intersezione è il loro punto medio.

Viceversa se il quadrilatero ABCD è un rombo, se cioè AB = BC = CD = DA (supponendo i vertici ordinati), osserviamo prima di tutto che i vertici B e C non possono trovarsi da parti opposte rispetto ad AD. Supposto infatti che ciò accada, il vertice C non può trovarsi rispetto alla BD dalla stessa parte di A, perché i due triangoli isosceli ABD, CBD con la base in comune ed eguali per il 3º criterio coinciderebbero e C coinciderebbe con A. Ma neppure può accadere che il vertice C stia da parte opposta di A rispetto a BD e di B rispetto ad AD, perché l'asse della base comune BD dei due triangoli isosceli deve passare per A, per C e per il punto medio di BD, e quindi la semiretta AC sta tutta rispetto ad AD dalla parte di B. Dunque se un quadrilatero ha i quattro lati eguali due vertici consecutivi sono situati dalla stessa parte della congiungente gli altri due vertici. Essendo poi A e C da parti opposte di BD questa diagonale divide il rombo in due triangoli isosceli eguali e divide per metà i due angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ del rombo; l'altra diagonale AC non è che l'asse di BD; le due diagonali si tagliano dunque internamente, nel loro punto medio, sono perpendicolari tra loro, e bisecano gli angoli del rombo.

9. La definizione di romboide data dagli *Elementi* di Euclide è la seguente: Romboide è il quadrilatero che ha

i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatero (ossia rombo), né eteromeco (ossia un rettangolo). Euclide chiama poi trapezii tutti gli altri quadrilateri.

Subito dopo compare, in Euclide, la definizione di rette parallele, e manca invece completamente, sia tra le definizioni, sia nel testo, la definizione di parallelogrammo; mancanza sensibile anche per il fatto che sappiamo da Proclo che la locuzione parallelogrammo è una invenzione di Euclide[46]. Abbiamo già osservato che la definizione euclidea di rette parallele, che è la 23ª ed ultima, come il postulato delle parallele è l'ultimo nell'elenco dei postulati, non va troppo d'accordo con le definizioni 2ª, 3ª e 4ª per le quali la retta è sempre finita; ora troviamo che la definizione dei quadrilateri precede e fa astrazione dal concetto di parallele e che manca in conseguenza la definizione di parallelogrammo. Si ha l'impressione che l'elenco delle definizioni a noi giunte insieme al testo di Euclide sia l'antico o più antico, e che la classificazione dei quadrilateri ivi contenuta sia la classificazione antica, con appiccicata a guisa di coda la 23ª ed ultima definizione, come il postulato delle parallele è appiccicato in fondo all'elenco degli altri postulati.

Questa classificazione dei quadrilateri è più conforme ad una geometria come quella che stiamo ricostruendo che non alla geometria euclidea, basata sul V postulato;

46 PROCLO, ed. Teubner, 354. II-15. Cfr. ALLMAN G. J., *Greek Geometry*, pag. 114.

e si spiega con il fatto che i quattro quadrilateri: quadrato, rettangolo, rombo e romboide si ottengono operando in modo assolutamente identico sopra il triangolo rettangolo isoscele, il triangolo rettangolo qualunque, il triangolo isoscele e, come vedremo, il triangolo scaleno (non rettangolo).

Anche il romboide, infatti, si ottiene con questo procedimento. Sia, infatti (fig. 19), ABD un triangolo qualunque. Condotta da B la semiretta BC dalla parte opposta ad A rispetto a BD e formante l'angolo $\widehat{DBC}=\widehat{ADB}$, e preso su essa BC = AD, si unisca C con D. Sarà $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}+ADB$ e quindi minore di due retti; la BC sta dunque insieme a D dalla stessa parte rispetto ad AB. I triangoli DBC ed ABD sono eguali per il 1° criterio; quindi CD = AB, $\widehat{CDB}=\widehat{ABD}$; e, poiché la BD divide l'angolo ABC e quindi anche $\widehat{ADC}$, si ha anche $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$.

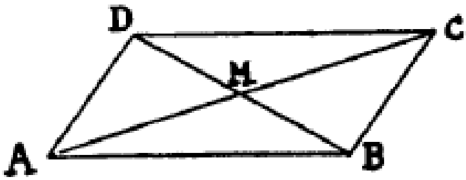


Fig. 19

Abbiamo dunque costruito un quadrilatero ABCD coi lati opposti eguali e gli angoli opposti eguali, ossia un romboide.

Unito ora il punto medio M di BD con A e con C, i triangoli ADM, CBM risultano eguali per il 1° criterio;

quindi $D\widehat{MA} = CMB$ e perciò i tre punti A, M, C sono allineati; MA = MC. Le diagonali del romboide si tagliano dunque per metà. Ognuna delle due diagonali divide il romboide in due triangoli eguali, la somma degli angoli del romboide è conseguentemente eguale a quattro retti (il che vale anche per il rombo), e poiché gli angoli opposti sono eguali quelli consecutivi sono supplementari.

Viceversa, se si escludono dalle nostre considerazioni i poligoni intrecciati e quelli non convessi, si dimostra che se un quadrilatero ABCD ha i lati opposti eguali esso è un romboide. Con tale ipotesi gli angoli del quadrilatero debbono essere tutti convessi; se fosse infatti DAB un angolo concavo il vertice C dovrebbe stare rispetto a BD dalla stessa parte di A ed essere esterno al triangolo BDA e così pure dovrebbe essere A esterno al triangolo BCD, perché, se fosse p.e. A interno al triangolo DCB, sarebbe, come si può dimostrare, la somma di AD ed AB minore della somma di CD e CB, mentre con l'ipotesi fatta le due somme devono essere eguali. Ma se A è esterno a BCD, e C è esterno a ABD, ed A e C stanno da una stessa parte di BD il quadrilatero ABCD viene intrecciato. Ne segue che il quadrilatero ABCD ha gli angoli convessi.

Essendo DAB convesso il vertice C sta rispetto a BD da parte opposta di A, perché se stesse dalla stessa parte il quadrilatero sarebbe intrecciato oppure avrebbe concavo l'angolo $\hat{C}$. Il quadrilatero ABCD, allora, è diviso dalla diagonale BD in due triangoli eguali per il 3° criterio, e gli angoli opposti risultano eguali; avendo quindi lati opposti ed angoli opposti eguali esso è un romboide.

Così pure si dimostra che se un quadrilatero convesso ha gli angoli opposti eguali, esso è un romboide. Anche in questo caso A e C non possono stare dalla stessa parte rispetto a BD, perché essendo eguali gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}$ il vertice C non può stare dentro il triangolo DAB, né il vertice A dentro il triangolo DCB, e perché se A è esterno a DCB e C a DBA, ed A e C stanno dalla stessa parte di BD, il quadrilatero ABCD risulta intrecciato contro la ipotesi. Stando dunque A e C da parte opposta di BD la BD divide il quadrilatero in due triangoli, e perciò la somma dei quattro angoli del quadrilatero viene eguale a quattro retti.

Essendo eguali le coppie di angoli opposti si avrà allora $\widehat{CDA}+\widehat{DAB}=\text{due retti}$; e quindi CDB = due retti meno la somma di BDA e $\widehat{DAB}$. Ma per il teorema dei due retti questa somma ha per supplemento l'angolo $\widehat{ABD}$, e perciò $\widehat{CDB}=\widehat{ADB}$. Analogamente $\widehat{DBC}=\widehat{ADB}$, e quindi i due triangoli ABD, DBC sono eguali per il secondo criterio, ed è AB = DC e AD = BC, ed il quadrilatero ABCD è un romboide.

Si vede poi facilmente, riconducendosi al primo caso che se un quadrilatero ha le diagonali che si tagliano per metà, esso è un romboide[47].

10. Abbiamo veduto così, senza neppure parlare di rette parallele, come si possono definire quadrato, rettangolo, rombo e romboide, e riconoscere le loro proprietà caratteristiche.

Si può dimostrare facilmente che il punto d'incontro delle diagonali nel romboide (e quindi anche negli altri tre quadrilateri) è un centro di figura, e che le perpendicolari condotte da esso ai lati opposti sono per diritto. Facendo ruotare allora la figura intorno a questo punto, nel caso del quadrato, un lato si porta successivamente sopra gli altri ed ogni vertice sul consecutivo, e la figura si sovrappone a se stessa con ogni rotazione di un angolo retto; nel caso del rombo la retta di un lato si sovrap-

---

47 Non ignoriamo che per soddisfare l'esigenza moderna della generalizzazione avremmo dovuto trattare subito il caso generale dei romboidi e dedurne poi le proprietà nei casi particolari del rombo, del rettangolo e del quadrato. Ma il nostro scopo non è quello di fare una nuova geometria, al contrario è quello di restituire l'antica geometria pitagorica, quale verisimilmente e probabilmente era; e riteniamo che per riuscirvi convenga, se non necessita, rifarsi una mentalitità pitagorica, pre-euclidea, senza eccessivi ossequii per le abitudini e le esigenze moderne. L'ordine cui ci siamo attenuti è quello della classificazione dei quadrilateri nelle «definizioni di Euclide», e siamo persuasi che questo ordine risponde all'ordine cronologico di scoperta ed a quello espositivo della trattazione dei quadrilateri da parte dei pitagorici.

pone successivamente alla retta degli altri lati, e nel caso del rettangolo e del romboide ciò accade solo per la rotazione di mezzo giro.

Il rombo gode dunque della stessa proprietà di cui gode un triangolo qualunque quando ruota intorno al punto d'incontro delle tre bisettrici, ed il quadrato si comporta come il triangolo equilatero sovrapponendosi a se stesso quattro volte in un giro completo come quello tre volte.

Se facciamo queste considerazioni è perché il nome stesso del rombo e quindi anche quello del romboide ci pare legato ad esse. In greco, infatti, dicono i dizionari, ῥόμβος (da ῥέμβω) designa ogni corpo di figura circolare o mosso in giro. Anticamente era il nome del fuso, e nel funzionamento del fuso le fila tessute prendevano la forma del rombo. Rimase poi il nome di rombo al rombo di bronzo di cui è menzione nei misteri di Rea, la madre frigia presso i greci, ed uno scoliaste alle Argonautiche di Apollonio dice che il rombo è un rocchetto che vien fatto girare battendolo con delle striscie di latta.[48] Archita pitagorico parla in un suo frammento di questi «rombi magici che si fanno girare nei misteri».[49]

48 Apollonio, *Argonautiche*, L. I, v. 1139. In Omero (*Iliade*, XIV, 413) sono chiamati anche στρόμβοι. Anche Proclo (ed. Teubner, 171. 25) dice che «sembra che anche il nome sia venuto al rombo dal movimento».

49 Il Il Mieli che riporta il testo greco di Archita traduce ῥόμβοι in *tamburi* (Mieli – *Le scuole jonica, pythagorica...* pag. 349) e lo Chaignet (vol. I, pag. 281) traduce: *les toupies magi-*

Cosicché la classificazione dei quadrilateri che si trova negli *Elementi* di Euclide, non solamente è indipendente dal concetto di parallele, ed ha tutta l'aria di essere pre-euclidea, ma nella terminologia sembra riconnettersi al postulato della rotazione pitagorica, ed alle proprietà dei triangoli che vi si riferiscono.

11. La proprietà riscontrata per il triangolo equilatero e per il quadrato sussiste per ogni poligono convesso equilatero ed equiangolo, inscritto in una circonferenza. Supposto diviso l'angolo giro, od una circonferenza, in n parti eguali, e presi a partire dal centro sopra i raggi n segmenti eguali, riunendone consecutivamente gli estremi si ottiene un poligono regolare, decomposto in n triangoli isosceli eguali tra loro e di eguale altezza (apotema del poligono). Facendo ruotare la figura intorno al centro di un $\frac{1}{n}$ di angolo giro il poligono si sovrappone a se stesso; e quindi in un giro completo si sovrappone n volte su se stesso. Per il postulato della rotazione l'angolo esterno risulta $\frac{1}{n}$ di quattro retti, e quello interno il suo supplemento. Aumentando n, l'angolo interno va crescendo e si può calcolarne il valore per $n = 5$, 6, ...

---

ques.

Siamo ora in grado di occuparci della scoperta pitagorica dei poligoni regolari congruenti attorno ad un vertice che riempiono il piano.

I poligoni debbono essere almeno tre, ed occorre che l'angolo del poligono sia contenuto esattamente nell'angolo giro. Questo accade con il triangolo equilatero il cui angolo è la sesta parte di quattro retti; con il quadrato il cui angolo è la quarta parte di quattro retti, non si verifica con il pentagono regolare, si verifica con l'esagono il cui angolo è un terzo di giro; e non può verificarsi con altri poligoni regolari perché se il numero dei lati supera il sei l'angolo interno supera il terzo di giro.

Questa scoperta è dunque una conseguenza del teorema dei due retti; risulta cioè da una dimostrazione, come Proclo ci ha riferito, e non è affatto un dato empirico che ha servito a dedurre il teoremi dei due retti come il Tannery e l'Allman vorrebbero, malgrado l'esplicita asserzione di Proclo che della proprietà dei poligoni regolari congruenti attorno ad un vertice fa un teorema pitagorico.

CAPITOLO III
IL PENTALFA

1. La divisione della circonferenza in 2, 3, 4, 6, 8, ... parti eguali ed il problema relativo della inscrizione in essa dei poligoni regolari di 3, 4, 6, 8, ... lati non presentava difficoltà per i pitagorici; occorre appena osservare che dalla riunione di sei triangoli congruenti attorno ad un vertice comune si ottiene appunto l'esagono regolare il cui lato risulta eguale al raggio della circonferenza circoscritta.

Più difficile invece si presenta il problema della divisione della circonferenza in 5, 10 parti eguali e della inscrizione in essa del pentagono e del decagono regolari; problema che doveva destare nei pitagorici speciale interesse perché l'arco sotteso dal lato del decagono stava nell'intera circonferenza come l'unità nella decade. Essi hanno certamente risolto questo problema, perché altrimenti non avrebbero potuto costruire l'icosaedro ed il dodecaedro regolare come invece sappiamo hanno fatto.

Vediamo come possono aver fatto, sempre prescindendo dalla teoria delle parallele, della similitudine, delle proporzioni e dai due postulati di Euclide ed Archimede.

2. Il problema dell'applicazione semplice, che Euclide risolve dopo avere dimostrato il teorema sopra i parallelogrammi complementari (*parapleromi*) si può risolvere, in un caso particolare, anche senza ammettere il postulato delle parallele. Il problema si può enunciare così: Costruire un rettangolo di base data ed eguale ad un rettangolo od un quadrato assegnato; problema che corrisponde alla determinazione della soluzione dell'equazione di primo grado:

$$ax = bc$$

oppure:

$$ax = b^2$$

Se $a > b$ oppure $a > c$, il problema è risolubile anche nella nostra geometria. Sia (fig. 20), per esempio, $a > b$ e sia HBCK il rettangolo dato con HB = b e BC = c. Preso sopra la BH a partire da B e dalla parte di H il segmento BA = a, completiamo il rettangolo ABCD. Poiché H è compreso tra A e B, questi punti restano da parti opposte di HK, e così pure i punti C e D; perciò la HK taglia in un punto P interno la diagonale AC. Conduciamo infine per P la MN perpendicolare alle AD, HK, BC. Per l'eguaglianza delle coppie di triangoli ABC, ADC; PNC, PKC; AHP e AMP, risulta sottraendo che il rettangolo HBNP è eguale (in estensione) al rettangolo MPKD, ed aggiungendo ad entrambi il rettangolo PNCK si ha che il rettangolo MNCD è eguale al rettangolo dato HBCK. Il segmento CN è dunque l'incognito x dell'equazione.

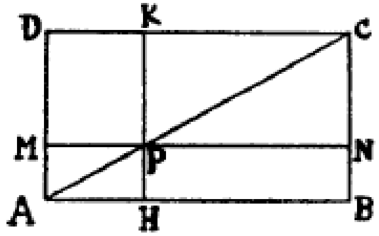


Fig. 20

Se invece *a* è minore tanto di *b* che di *c*, ossia se H è esterno al segmento BA, non si ha più la certezza che la AC prolungata incontri in un punto P il prolungamento del lato HK. Tale certezza si ottiene solo con la proposizione che costituisce il postulato di Euclide.

Ora vale la pena di notare in proposito che Proclo nel commento ad Euclide I, 43 (teorema dello *gnomone*) dice che i tre problemi dell'applicazione sono scoperte dovute alla musa dei pitagorici secondo οἶ περὶ τὸν Εὔδημον, e non dice come in tutti gli altri casi che quanto afferma è basato sopra l'autorità di Eudemo. La testimonianza non è questa volta quella personale di Eudemo, ed a questa indeterminazione nella testimonianza corrisponde il fatto che gli antichi pitagorici, senza la teoria delle parallele, potevano risolvere il problema solo nel caso ora veduto.

Esso è del resto quello che ci interessa, perché permette di risolvere le questioni che ci si presenteranno in seguito.

Per risolvere, dopo quello dell'applicazione semplice (parabola), gli altri due problemi dell'applicazione, dobbiamo premettere il seguente teorema ed il suo inverso:

TEOREMA: *Il punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equidistante dai tre vertici, ed inversamente se in un triangolo il punto medio di un lato è equidistante dai tre vertici esso è rettangolo.*

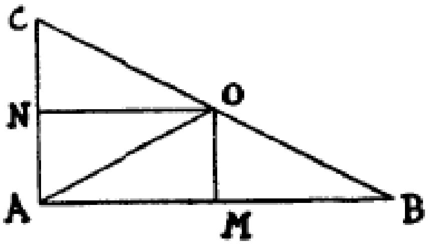


Fig. 21

Sia ABC il triangolo rettangolo (fig. 21), ed A il vertice dell'angolo retto. Conduciamo per A dalla parte di C rispetto ad AB la semiretta che forma con AB un angolo eguale all'angolo (acuto) $\widehat{ABC}$. Essa è interna all'angolo retto $\widehat{CAB}$, sega quindi l'ipotenusa BC in un punto O interno, formando due triangoli isosceli OAB, OAC (il secondo ha gli angoli alla base complementari di angoli eguali); quindi O, punto medio dell'ipotenusa, è equidistante dai tre vertici.

Viceversa, se nel triangolo ABC è O il punto medio di BC ed è OA = OB = OC, risulta $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$; $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}$, , siccome per il teorema dei due retti la somma di questi quattro angoli è eguale a due retti si avrà: $\widehat{OAC}+\widehat{OAB}=\text{un retto}$.

Notiamo che le due altezze dei triangoli isosceli li suddividono in triangoli rettangoli eguali e si ha:

$$OM=\frac{1}{2}AC\,;\quad ON=\frac{1}{2}AB$$

3. Passiamo agli altri due problemi dell'applicazione.

Il problema dell'applicazione in difetto (*ellissi*) si può enunciare così: Costruire un rettangolo di area data b^2 e tale che la differenza tra il rettangolo di eguale altezza e base assegnata ed esso sia un quadrato. Più modernamente e più chiaramente: costruire un rettangolo di data area b^2, conoscendo la somma dei lati a.

Si tratta cioè di risolvere l'equazione di secondo grado:

$$x(a-x)=b^2$$

Sia ABCD (fig. 22) il quadrato di lato AB = b. Preso sulla AB dalla parte di A il punto O tale che DO sia eguale alla metà di a, si determinano sulla AB i punti E ed F tali che OE = OD = OF; per il teorema precedente il triangolo EDF è rettangolo; e quindi il quadrato costruito sull'altezza AD è eguale al rettangolo di lati AF, AE. Costruito il rettangolo EKGF, con EK = AE, se da esso si toglie il rettangolo AHGF ossia il quadrato ABCD, la differenza AEKH è appunto un quadrato. Il rettangolo AHGF risolve dunque il problema, ed è EA la

x dell'equazione data. Affinché il problema ammetta soluzione reale occorre che sia $a>2b$.

Il problema dell'applicazione in eccesso (*iperbole*) si può enunciare così: costruire un rettangolo di area data b^2 e tale che la differenza tra di esso ed il rettangolo di eguale altezza e base assegnata a sia un quadrato. Il problema equivale a costruire un rettangolo conoscendone l'area e la differenza dei lati, ossia corrisponde alla risoluzione dell'equazione:

$$x(a+x)=b^2$$

ed ammette sempre soluzione.

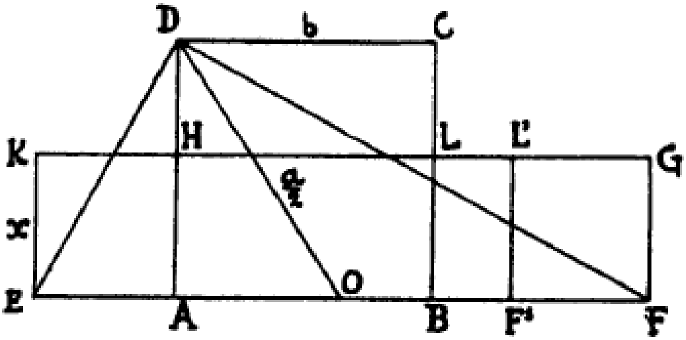


Fig. 22

Sia ABCD (fig. 22) il quadrato di lato b, e prendiamo dalla parte di B sulla AB il segmento AF'=a. Sia O il punto medio di AF'; e prendiamo sulla AB i segmenti OE = OD = OF. Il triangolo EDF è rettangolo, ed il quadrato dell'altezza ABCD è eguale al rettangolo che ha per lati le proiezioni EA = EK, ed AF = EF' dei cateti.

Se da questo rettangolo si toglie il rettangolo AHL'F' di eguale altezza e base assegnata AF'= a, si ottiene appunto un quadrato EKHA. Il rettangolo EKL'F' risolve dunque il problema, ed EA è la x dell'equazione.

4. PROBLEMA: *Determinare la parte aurea di un segmento*; ossia dividere un segmento in modo che il quadrato avente per lato la parte maggiore (parte aurea) sia eguale al rettangolo avente per lati l'intero segmento e la parte rimanente.

Questo problema è un caso particolare del problema dell'applicazione in eccesso; e precisamente il caso in cui $a = b$.

Costruiamo (fig. 23) il quadrato ABCD sul segmento assegnato AD.

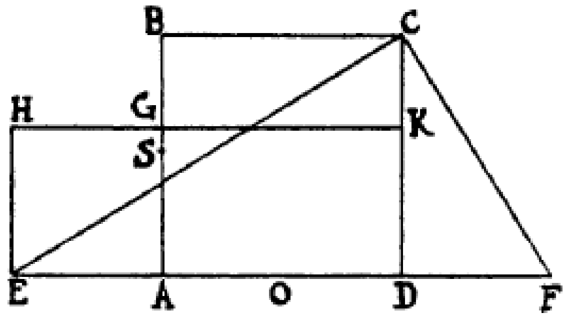


Fig. 23

Sia O il punto medio di AD, e prendiamo su AD i segmenti OE = OF = OC. Il triangolo ECF è rettangolo, quindi il quadrato che ha per lato CD è eguale al rettangolo EHKD che ha per lati DK = DF ed ED.

Siccome OC e quindi OF è minore di OD + DC, risulta DF e quindi DK minore di DC; l'altezza del rettangolo EHDK è dunque minore del lato AB del quadrato dato mentre la base ED ne è evidentemente maggiore; perciò la HK divide il quadrato in due parti, e togliendo dal rettangolo EHKD e dal quadrato ABCD la parte comune AGDK si ha che il quadrato EHGA è eguale al rettangolo BGKC, che ha per lati il segmento assegnato BC ed il segmento BG, che è quanto resta del lato AB = BC quando se ne toglie AG, ossia il lato del quadrato EHGA. Il punto G divide dunque il segmento AB nel modo richiesto, ossia è AG = EA la parte aurea di AB.

Dalla figura risulta che AD è la parte aurea di ED, mentre la parte rimanente EA è la parte aurea della parte aurea AD; similmente BG è la parte aurea di AG ecc.

L'unicità della parte aurea di un segmento si dimostra per assurdo. Sia per esempio AS < AG un'altra soluzione; ossia, con le notazioni moderne: sia:

$$(AS)^2 = AB \cdot BS$$

Per l'ipotesi fatta si ha:

$$AG = AS + SG \qquad \text{e} \qquad BG = BS - SG$$

e quindi

$$(AS)^2 + (SG)^2 + 2AS \cdot SG = (AG)^2$$

ma

$$(AG)^2 = AB \cdot BG = AB \cdot BS - AB \cdot SG$$

e quindi

$$(AS)^2 + (SG)^2 + 2AS \cdot SG = AB \cdot BS - AB \cdot SG$$

e

$$(AS)^2 + (SG)^2 + 2AS \cdot SG + AB \cdot SG = AB \cdot BS$$

dalla quale, togliendone la prima

$$(SG)^2 + 2AS \cdot SG + AB \cdot SG = 0$$

ossia

$$SG\,(SG + 2AS + AB) = 0$$

Questo rettangolo dovrebbe essere nullo; e ciò può accadere solo se SG = 0, ossia se S coincide con G.

5 TEOREMA: *La base di un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice eguale alla quinta parte di due retti è la parte aurea del lato.*

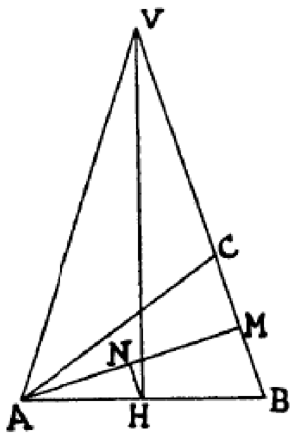


Fig. 24

Un triangolo isoscele VAB (fig. 24) che abbia l'angolo al vertice di 36° e quindi quelli alla base di 72°, è diviso dalla bisettrice di uno degli angoli alla base in due triangoli isosceli CAV, ACB ed i tre segmenti VC, AC, AB risultano eguali. Il triangolo VAB e il triangolo ACB risultano inoltre equiangoli tra loro.

Abbassando le altezze VH ed AM, e conducendo da H l'altezza HN del triangolo isoscele AHM, si ha

$$NH = \frac{1}{2} BM - \frac{1}{4} BC$$

I triangoli rettangoli VAH, AHN hanno gli angoli eguali, ed il cateto AH del primo è l'ipotenusa del secondo; perciò per un corollario del capitolo precedente si ha:

rett. (VA, NH) = quad. (AH)

e quindi:

4 rett. (VA, NH) = 4 quad. (AH)
rett. (VA, 4 NH) = quad. (AB)
rett. (VA, BC) = quad. (VC)

Dunque VC, ossia AB è la parte aurea di VB; c.d.d.

Si dimostra, per assurdo, il teorema inverso: *Se un triangolo isoscele ha la base che è parte aurea del lato, esso ha l'angolo al vertice eguale alla quinta parte di due retti.*

Sia V'A'B' il triangolo dato e la base A'B' parte aurea del lato V'A'. Costruito il triangolo isoscele VAB con VA = VB = V'A' e l'angolo al vertice un quinto di due retti, sarà per il teorema precedente AB parte aurea di VA ossia di V'A'; e per l'unicità della parte aurea sarà AB = A'B' e quindi i due triangoli eguali c.d.d.[50]

---

50 Il Loria (*Scienze esatte*, pag. 41) attribuisce a Pitagora la costruzione del triangolo isoscele con l'angolo al vertice metà di quello della base, riportandola alla costruzione della parte aurea; ma per dimostrare che la base è la parte aurea del lato ricorre alla similitudine dei triangoli VAB, ABC (fig. 24), e sembra che in-

6. Per costruire un triangolo isoscele con l'angolo al vertice metà di quello alla base, ossia per costruire un angolo eguale ad un quinto di due retti od a un decimo dell'angolo giro, basta prendere per lato un segmento qualunque, e per base la sua parte aurea. Facendo compiere a tale triangolo 10 rotazioni attorno al vertice eguali all'angolo al vertice, si viene a riempire il piano attorno al vertice e si ottiene un decagono regolare.

Viceversa se una circonferenza è divisa in 10 parti eguali, il lato del decagono regolare inscritto è la parte aurea del raggio. Siamo dunque in grado di risolvere il

PROBLEMA: *Dividere una circonferenza in dieci parti eguali.*

Uniamo (fig. 25) il punto medio C del raggio OA con l'estremo B del raggio perpendicolare ad OA, e prendiamo dalla parte di A il segmento CD sulla OA eguale a CB; AD è la parte aurea del raggio. Essendo AD minore di OA la circonferenza di centro A e raggio AD taglia in due punti E, P la circonferenza di centro O e raggio OA. Questo accade, naturalmente, ammettendo tacitamente (come Euclide ha fatto ancora, due secoli dopo Pitagora) il postulato della continuità in un caso particolare, ammettendo cioè che se un circolo ha il centro A sopra una circonferenza di centro O e passa per un punto D

---

tenda significare che tale via fu tenuta anche da Pitagora. Lo sviluppo che abbiamo mostrato parte, invece, dal teorema di Pitagora, ed utilizza soltanto conseguenze di questo teorema, in particolare il corollario di pag. 53, ed i problemi dell'applicazione che sappiamo erano stati risolti dai pitagorici.

esterno ed uno interno a tale circonferenza le due circonferenze si tagliano. Questa proprietà talmente assiomatica che Euclide non ha sentito il bisogno di postularla, per i pitagorici doveva costituire un dato di fatto, una verità primordiale.

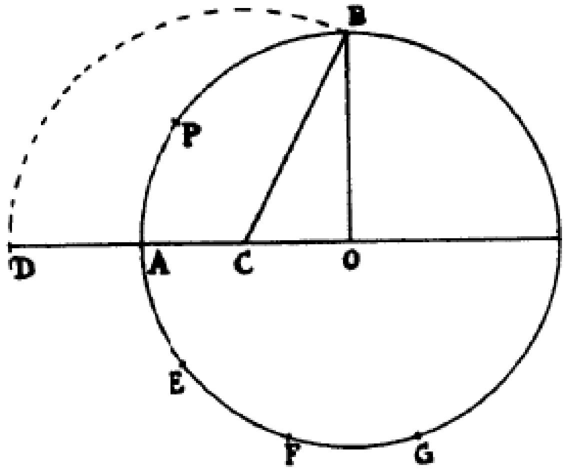


Fig. 25

Gli archi AE, AP sono dunque un decimo della intera circonferenza. Facendo centro successivamente in E ed in P ecc. con il medesimo raggio si determinano gli altri punti di divisione, due a due diametralmente opposti essendo 10 un numero pari. Riunendoli successivamente si ottiene il decagono regolare inscritto; riunendo il primo con il terzo, il terzo con il quinto ecc. si ottiene il pentagono regolare inscritto. Si vede dunque come partendo dal teorema di Pitagora, e con i semplici procedimenti esposti, i pitagorici erano in grado di dividere la circonferenza in 5 e 10 parti eguali, e di inscrivere in essa il decagono ed il pentagono regolari. Il pentagono stellato o pentalfa (o pentagramma) si ottiene pure immediatamente conducendo le cinque diagonali del pentagono; e poiché il pentalfa era il simbolo del sodalizio pitagorico, la scoperta della divisione della circonferenza in 10 e 5 parti eguali e la costruzione del decagono regolare, del pentagono regolare e del pentalfa, vanno attribuite senz'altro a Pitagora.

7. Le ragioni per le quali il pentalfa fu prescelto come simbolo dalla nostra Scuola non sono tutte di natura geometrica. Cosa naturale, data la connessione tra la geometria, le altre scienze e la cosmologia pitagorica. Ma le proprietà geometriche che legano tra loro il raggio della circonferenza, i lati del pentagono e del decagono regolari inscritti, e quelli del pentalfa e del decagono stellato o decalfa, sono tante e così semplici e belle da avere indubbiamente suscitato l'ammirazione dei pitagorici e da avere contribuito a determinare od a giustificare la scelta del pentalfa a simbolo della Scuola ed a segno di riconoscimento tra gli appartenenti all'Ordine.

Vediamone ordinatamente una parte.

Congiungendo (fig. 26) successivamente i punti di divisione A, B, C,... della circonferenza in 10 parti eguali si ha il decagono regolare ABCDEFGHIL, di cui indicheremo il lato con l_{10}. Esso è la parte aurea del raggio.

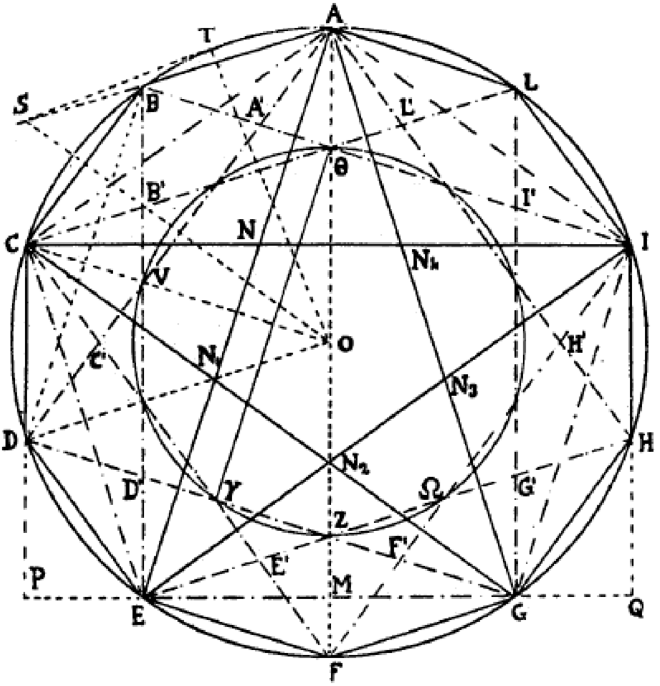


Fig. 26

Congiungendo A con C, C con E ecc., si ha il pentagono regolare ACEGI di cui indicheremo il lato AC con l_5; congiungendo A con D, D con G ecc., si ha il decagono stellato ADGLCFIBEH oppure AA'BB'CC'... LL' o decalfa di cui indicheremo il lato con s_{10}; congiungendo A con E, E con I ecc. si ha il pentalfa AEICG oppure $ANCN_1EN_2GN_3IN_4$ di cui indicheremo il lato con s_5.

Congiungendo A con F si ottiene il diametro, e tirando da A le corde AG, AH... degli archi sestuplo ecc. dell'arco AB si riottengono in ordine inverso i poligoni regolari già ottenuti. I poligoni regolari e stellati inscritti nella circonferenza, e che si ottengono mediante la sua suddivisione in 10 parti eguali, sono quattro e solo quattro.

Il pentalfa deve evidentemente il suo nome ai cinque α (A dell'alfabeto greco) come quello formato dai tratti AE, AG, NN_4 della figura. Il nome è adoperato dal P. Kircher nella sua *Aritmetica* (1665)[51]; siamo però convinti che questa è la denominazione originale pitagorica, e che analogamente decalfa è la denominazione originale del decagono stellato.

Abbiamo già veduto che riportando 10 volte successivamente l'arco AB sulla circonferenza si esaurisce la circonferenza, come la somma di dieci unità esaurisce l'intera decade. E come gli elementi della geometria: il punto, la linea (retta o segmento determinato da due punti), la superficie (piano, triangolo determinato da tre punti), il volume (tetraedro, determinato da quattro punti) riempiono ed esauriscono lo spazio (tridimensionale), corrispondentemente la somma dei primi quattro numeri interi dà la decade, relazione pitagorica fondamentale che dall'unità attraverso la sacra *tetractis* conduce alla decade. Altrettanto, naturalmente, succede nella nostra figura dove l'arco AB sommato con il suo doppio BD, con il triplo DG e con il quadruplo GA dà per somma la intera circonferenza.

---

51 Cfr. G. Loria, *Storia delle Matematiche*, vol. I, pag. 66.

Il quadrilatero ABDG che ha per lati l_{10}, l_5, s_{10}, s_5 e per diagonali AD = s_{10} e BG = $2r$, è diviso dalla diagonale BG in due triangoli rettangoli, e quindi si ha:

[1] $l_{10}^2 + s_5^2 = 4r^2$

[2] $l_5^2 + s_{10}^2 = 4r^2$

dalle quali

[3] $l_5^2 + l_{10}^2 + s_5^2 + s_{10}^2 = 8r^2$

relazione che lega il raggio della circonferenza ed i lati dei quattro poligoni, che si enuncia con il

TEOREMA: *La somma dei quadrati costruiti sopra il lato del decagono regolare, del pentagono regolare, del pentalfa e decalfa inscritti in una circonferenza è eguale ad otto volte il quadrato costruito sul raggio.*

Si riconosce facilmente che il diametro AOF è perpendicolare al lato EG del pentagono ed al lato CI del pentalfa, ed essendo l'angolo EOF di 36° ed il triangolo EOA isoscele l'angolo EAF risulta di 18° e quindi EAG di 36°. Ne segue il

TEOREMA: *La somma dei cinque angoli del pentalfa è eguale a due retti*, che si dimostra facilmente vero per qualunque pentagono intrecciato.

I triangoli isosceli AEG, ANN_4 avendo l'angolo al vertice di 36° hanno la base parte aurea del lato. Dunque il *lato del pentagono regolare inscritto è la parte aurea del lato del pentalfa*; ed NN_1 è parte aurea di AN.

Essendo DOF di 72° DAO viene di 36°; similmente si riconosce che CAO è di 54° e BAO di 72°; ossia che la perpendicolare per A al diametro AF e le congiungenti A cogli altri punti di divisione in 10 parti eguali della circonferenza dividono l'angolo piatto attorno ad A in 10 parti eguali; ed analogamente per gli altri vertici. Se ne trae che AN = NC = CN_1 = N_1E ecc.

Il triangolo ECN avendo i due angoli alla base CN eguali e di 72° è isoscele; perciò EN è eguale al lato l_5 del pentagono, il quadrilatero NEGI è un rombo, le diagonali del pentagono regolare ossia i lati del pentalfa si dividono in parti corrispondenti eguali, di cui la maggiore è eguale al lato del pentagono. Nel lato AE del pentalfa, NE = EG = l_5 è la parte aurea di AE, quindi N_1E = AN è la parte aurea di EN; ed NN_1 la parte aurea di AN. Naturalmente $NN_1N_2N_3N_4$ è un pentagono regolare.

Notiamo infine che l'apotema del pentagono regolare è la metà del lato del decalfa, come si ottiene dal triangolo rettangolo ACF. Altre proprietà avremo occasione di riconoscerle in seguito.

8. Dobbiamo ora stabilire un'altra importante relazione che si presenta nella costruzione dell'icosaedro, e che i pitagorici debbono quindi aver conosciuto.

Ammettendo che ogni retta passante per un punto interno ad una circonferenza è una secante, si dimostra che la perpendicolare al raggio nel suo estremo è la tangente in quel punto alla circonferenza. E siccome sappiamo che il luogo geometrico dei vertici dei triangoli rettangoli di data ipotenusa è la circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa, si è anche in grado di condurre le tangenti ad una circonferenza da un punto assegnato. Conduciamo allora (fig. 27) da un punto P esterno ad una circonferenza la tangente PN, il diametro PO ed una secante qualunque PCD.

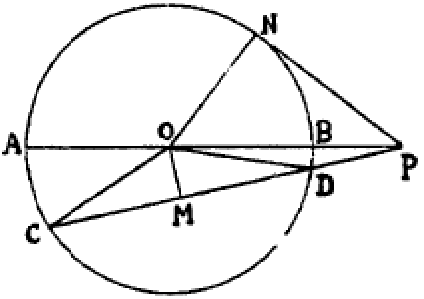


Fig. 27

La mediana del triangolo isoscele OCD è perpendicolare alla base CD, ed il rettangolo che ha per lati PD e PC ossia PM + CM e PM – CM è eguale come sappiamo alla differenza dei quadrati costruiti su PM e su MC. Si ha:

$$
\begin{aligned}
PC \cdot PD &= (PM + MC)\,(PM - MC) = \\
&= (PM)^2 - (MC)^2 = \\
&= (PM)^2 + (OM)^2 - [(OM)^2 + (MC)^2] = \\
&= (PO)^2 - (OC)^2 = (PO)^2 - (ON)^2 = \\
&= (PN)^2.
\end{aligned}
$$

Prendiamo allora nella figura 26 sulla AB a partire da A il segmento AS = OA: i triangoli isosceli OAC, ASO, avendo il lato eguale e l'angolo al vertice eguale sono eguali, e quindi OS = AC = l_3; e siccome in questi triangoli l'angolo al vertice supera quello alla base, la base

OS è maggiore del lato OA ed il punto S è esterno alla circonferenza.

Condotta da S la tangente ST, sarà per il teorema ora dimostrato:

$$(ST)^2 = SA \cdot SB$$

e, siccome AB è il lato del decagono regolare, esso è la parte aurea di AS, ossia:

$$(AB)^2 = SA \cdot SB$$

quindi

$$ST = AB = l_{10}$$

Dal triangolo rettangolo OST si ha allora:

$$(ST)2 + (OT)^2 = (OS)^2$$

ossia la relazione:

[4] $$l_{10}^2 + r^2 = l_5^2$$

che si enuncia così:

TEOREMA: *Il lato del pentagono inscritto è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio ed il lato del decagono regolare inscritto.*

9. Nella figura 26 i segmenti OC ed AD si tagliano in un punto V e risulta $\widehat{AVO} = \widehat{DCV} = 72°$.

Dai triangoli isosceli AVO, DCV con l'angolo al vertice di 36° si ha VO = VD = DC = l_{10}, ed AV = OA = r; quindi VD è la parte aurea di AV ossia di r ed AV è la parte aurea di AD. *Il raggio è dunque la parte aurea del lato del decalfa*, e si ha la semplice relazione:

[5] $$r + l_{10} = s_{10}$$

Da questa relazione e dalle altre ottenute si deducono geometricamente le seguenti, che scriviamo per brevità con le solite notazioni:

$$s_{10}^2+r^2=s_{10}^2+l_5^2-l_{10}^2=4r^2-l_{10}^2=s_5^2$$

[6] $$s_{10}^2+r^2=s_5^2$$

e sostituendo nella [1]

[7] $$s_{10}^2+r^2+l_{10}^2=4r^2 \quad \text{e} \quad s_{10}^2+l_{10}^2=3r^2$$

e perciò dalla [3][52]

[8] $$s_5^2+l_5^2=5r^2$$

Si ha inoltre:

$$r^2=(s_{10}-l_{10})^2=s_{10}^2+l_{10}^2-2s_{10}l_{10}$$

quindi

[9] $$r^2=3r^2-2s_{10}l_{10} \quad \text{e} \quad s_{10}l_{10}=r^2$$

$$(s_{10}l_{10})^2=s_{10}^2+l_{10}^2+2s_{10}l_{10}=3r^2+2r^2=5r^2$$

e quindi

[10] $$(s_{10}l_{10})^2=s_5^2+l_5^2$$

Prendiamo adesso il triangolo rettangolo ABC (fig. 28) coi cateti AB = l_{10} ed AC = r; l'ipotenusa è BC = l_5, e prendendo sui prolungamenti dei cateti BD = r e CF = l_{10} si ha AD = AF = s_{10}; CD = s_5. Preso AM = s_{10} + l_{10}, e

---

52 La relazione $s_5^2+l_5^2=r^2$ si trova (cfr. Loria, Scienze esatte, pag. 271) nel XIV libro di Euclide (che è di Ipsicle, II secolo a.C.), e così pure l'altra: $a_5=\frac{r+l_{10}}{2}$.

Ma ciò non prova che fossero sconosciute prima di lui. Ipsicle, infatti, dimostra anche che l'apotema del triangolo equilatero è la metà del raggio, proprietà nota certamente molto prima.

sulla perpendicolare alla AM il segmento ML = r anche BL = s_5; ed il triangolo CBL risulta rettangolo, perché CL = AM = $s_{10} + l_{10}$.

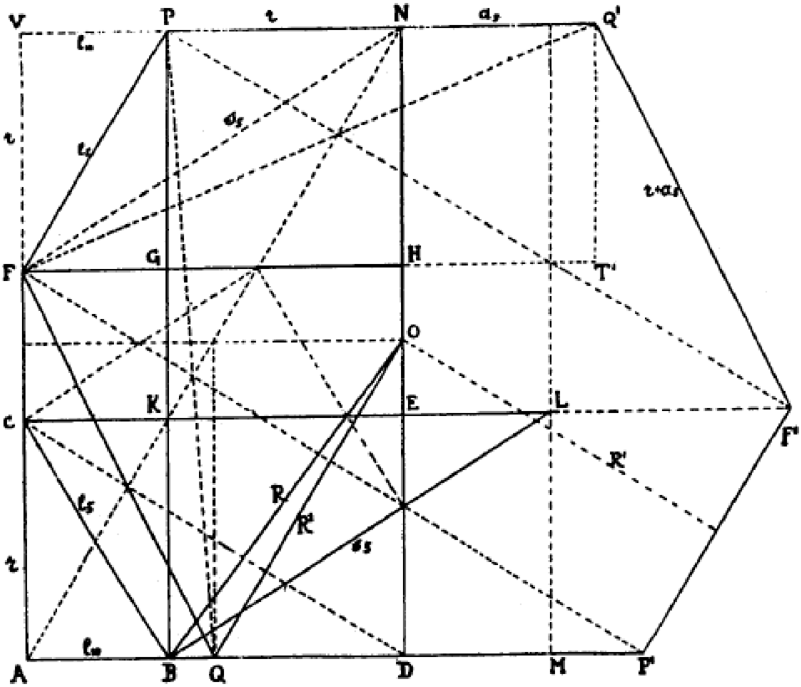


Fig. 58

In questo triangolo rettangolo compaiono gli stessi cinque elementi che comparivano nella formula [3]. Esso ha per cateti il lato del pentagono regolare inscritto e quello del pentalfa, ha per altezza il raggio del cerchio circoscritto, e le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono eguali rispettivamente al lato del decagono regolare inscritto ed a quello del decalfa; la proiezione del cateto minore è parte aurea dell'altezza e l'altezza è parte aurea della proiezione del cateto maggiore. Il cateto minore è parte aurea di quello maggiore, e la somma dei quadrati costruiti sopra i tre lati è eguale a *dieci* volte il quadrato costruito sopra l'altezza, ossia sul raggio della circonferenza circoscritta a quei poligoni regolari.

Inoltre, poiché i rettangoli ABKC, BMLK sono divisi per metà dalle diagonali BC, BL, il triangolo rettangolo CBL è la metà tanto del rettangolo di lati CB e BL quanto del rettangolo di lati CA ed AM; si ha quindi una terza relazione tra quei cinque elementi:

[11] $$l_5 \cdot s_5 = r\left(s_{10} + l_{10}\right)$$

indicando con a_5 l'apotema del pentagono e con a_{10} l'apotema del decagono, aggiungiamo alle precedenti anche le relazioni:

[12] $$2\,a_5 = s_{10} = r + l_{10}$$

[13] $$2\,a_{10} = s_5$$

Vedremo in seguito le relazioni che legano questi elementi ai vari elementi del dodecaedro regolare.

10. Il pentalfa era il simbolo del sodalizio pitagorico. Si disegnava, (fig. 29) con la punta in alto scrivendo in corrispondenza dei vertici le lettere componenti la parola ὑγίεια, latino *salus*, da intendere nel duplice senso che ha la parola «salute» in Dante e nei «Fedeli d'Amore», ossia nel senso di quella salvezza o sopravvivenza privilegiata indicata alla fine dei «Versi d'oro».

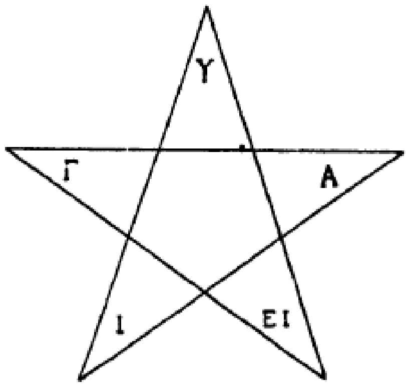


Fig. 29

Questo antico simbolo pitagorico riappare qua e là nella tradizione esoterica occidentale, designato di solito come «la figura di Pitagora». Talora al centro si trova scritta la lettera G, iniziale di Geometria, come ad esempio nella «flaming Star» di un noto Ordine Occidentale avente per scopo il perfezionamento dell'uomo, ossia alla lettera, la *teleté* dei misteri. Ma non è ora il caso di fare la storia della sua trasmissione sino a divenire il fatidico «stellone» d'Italia. Diremo soltanto, per chiuder questo capitolo, che il pentalfa ed il fascio littorio (tra i quali passa più di un legame) sono i soli importanti simboli spirituali veramente occidentali. Il resto, buono o cattivo che sia, vien dall'Oriente.

CAPITOLO IV
I POLIEDRI REGOLARI

I. Per vedere in quale modo Pitagora pervenne alla costruzione dei poliedri regolari ed alla loro inscrizione nella sfera occorrerebbe fare per lo spazio quel che abbiamo fatto, in parte, per il piano. Ossia ricostruire la geometria pitagorica dello spazio senza introdurre i concetti di rette parallele, di rette e piani paralleli, di piani paralleli, e mostrare come si possa egualmente pervenire ai risultati che Eudemo attraverso Proclo ci tramanda come conseguiti da Pitagora. Ma per non allungare troppo questo nostro studio ci limiteremo ad indicare per sommi capi la via da tenere, o una delle vie da seguire, tralasciando in generale le dimostrazioni che ognuno può trovare da sé.

Perciò, ammettendo che un piano divida lo spazio in due semispazii, ammettiamo anche il postulato del semispazio: *Il segmento congiungente due punti situati da parti opposte rispetto ad un piano è tagliato in un suo punto dal piano.* Può darsi che anche questo caso particolare del postulato di continuità fosse ammesso tacitamente come una verità primordiale. Si dimostra poi nel modo ordinario che:

a) Una retta non giacente in un piano e che abbia con esso un punto comune è divisa da esso in due semirette situate da parti opposte rispetto a quel piano.

b) Se due piani hanno un punto in comune la loro intersezione è una retta passante per quel punto; uno qualunque dei due piani è diviso dalla comune intersezione in due semipiani situati da parti opposte rispetto all'altro.

c) Se per un punto H di una retta *m* si conducono ad essa in piani diversi due perpendicolari *a* e *b*, ogni altra retta del piano *ab* passante per H è perpendicolare alla *m*, e viceversa ogni perpendicolare alla *m* per H giace nel piano *ab*. Il piano *ab* dicesi perpendicolare alla retta *m* in H; e la retta perpendicolare *m* al piano *ab* in H.

d) Per un punto A appartenente o no ad una retta passa un piano ed uno solo perpendicolare ad essa.

e) *Teorema delle tre normali*: Se una retta *m* è perpendicolare ad un piano α e dal piede H esce nel piano una retta *a* perpendicolare ad una retta *r* di α (passante o no per il piede H), la terza retta *r* è perpendicolare al piano *am* delle prime due.

f) Due piani che si intersecano dividono lo spazio in quattro parti (diedri). Seguono le definizioni di diedro convesso, piatto e concavo.

g) Sia β (fig. 30) un piano perpendicolare ad una retta *a* e sia H il suo piede. Conduciamo per *a* un piano qualunque α, e sia *r* la αβ; e conduciamo per H in β

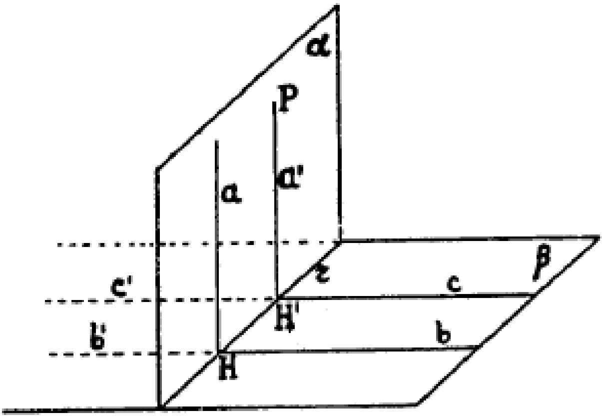


Fig. 30

la *bb'* perpendicolare alla *r*. Per il teorema delle tre normali la *b* è perpendicolare al piano α e quindi ad *a*; i due angoli $\widehat{bHa}$, $\widehat{aHb'}$ risultano retti. Facendo ruotare il piano *ab* intorno ad H su se stesso esso rimane perpendicolare alla *r* e quando la semiretta *b* va sulla *a* e la *a* sulla *b'*, il semipiano β va sul semipiano α ed α su β'. I due diedri $\beta\alpha$ e $\alpha\beta'$ si sovrappongono, sono quindi eguali; il semipiano α biseca dunque il diedro piatto $\widehat{\beta r \beta'}$. Ogni altro semipiano per *r* è interno all'uno od all'altro dei diedri $\alpha\beta$ e $\widehat{\alpha\beta'}$; quindi per una retta *r* del piano β si può condurre uno ed un solo piano α che bisechi il diedro piatto $\widehat{\beta r \beta'}$. Il piano α dicesi perpendicolare al piano β; l'angolo $\widehat{aHb}$ dicesi sezione normale di $\widehat{\alpha\beta}$, ed è retto.

Se per un punto P di α si conduce la perpendicolare a' alla r dal piede e la c in β perpendicolare alla r, anche il piano $a'c$ è perpendicolare alla r; facendo ruotare attorno alla r il semipiano β va in α ed α in β', la semiretta c va sulla a', e la a' sulla c'; dunque $\widehat{ca} = a'c'$ = un retto, e quindi a' risulta perpendicolare anche a β e la sezione normale $a'c$ del diedro $\alpha\beta$ risulta eguale all'altra $\widehat{ab}$.

h) Retta perpendicolare ad un piano per un punto. Sia H un punto di un piano β (fig. 30), e si conduca per H in β una retta b qualunque, e per H il piano α perpendicolare alla b; sia r la $\widehat{\alpha\beta}$. Per H conduciamo nel piano α la perpendicolare a alla r; per il teorema delle tre normali risulta a perpendicolare a β. La unicità della perpendicolare a β per H si dimostra per assurdo.

Se poi il punto dato fosse P esterno al piano β, condotta in β una retta b qualunque e per P il piano α perpendicolare alla b, esso interseca la b e quindi il piano β secondo una retta r. Da P in α si conduca la PH' perpendicolare alla r e per il teorema delle tre normali risulta PH' perpendicolare a β. Per assurdo se ne dimostra subito la unicità.

i) I piani passanti per una retta perpendicolare ad un piano sono perpendicolari ad esso.

k) Se i piani α e β sono tra loro perpendicolari, la perpendicolare PH' alla intersezione abbiamo veduto che è perpendicolare a β. Viceversa, per l'unicità della perpendicolare ad un piano, se due piani α e β sono perpendicolari, e da un punto P di α si conduce la perpendicolare a β essa giace in α.

l) Sezione normale di un diedro qualunque. Per due punti A e B (fig. 31) della costola *r* di un diedro $\alpha\beta$ conduciamo nella faccia α le perpendicolari *a, a'* alla *r*, e nella faccia β le perpendicolari *b, b'* alla *r*. Chiameremo sezioni normali del diedro $\alpha\beta$ gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$. Essi sono eguali. Presi infatti su α AC = BD e su β AE = BF i quadrilateri ACDB, ABFE sono dei rettangoli e quindi CD = AB = EF. La *r* è perpendicolare ai piani *ab* ed *a'b'*; quindi il piano α è perpendicolare ai piani *ab* ed *a'b'*, la CD che è perpendicolare alla intersezione *a* dei due piani α ed *ab* risulta perpendicolare al piano *ab* e perciò anche alla CE; analogamente risulta perpendicolare alla DF; ed analogamente la EF risulta perpendicolare alle CE ed FD. Inoltre, essendo CD perpendicolare al piano ACE, il piano CDE è perpendicolare al piano ACE, e la EF, perpendicolare anche essa al piano ACE, giace nel piano CDE; perciò il quadrilatero CDEF è un quadrilatero piano cogli angoli retti, ossia è un rettangolo. I triangoli ACE e BDF risultano quindi eguali per il terzo criterio, e gli angoli $\widehat{CAE}$ e $\widehat{DBF}$

sono eguali. Le sezioni normali di un diedro qualunque sono dunque eguali.

m) Se due piani α e β sono perpendicolari ad un terzo γ la loro intersezione è perpendicolare a γ.

n) Due piani perpendicolari ad una retta non si incontrano.

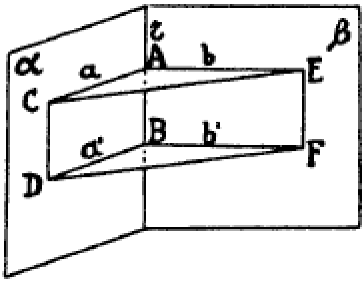


Fig. 81

o) Definizione di piano assiale di un segmento.
Si dimostra che esso è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.

p) Distanza di un punto da un piano; e luogo geometrico dei punti del piano aventi distanza assegnata da un punto esterno.
Corollario: Dato un poligono regolare inscritto in una circonferenza, un punto qualunque della perpendicolare al piano del poligono condotta per il centro è equidistante dai vertici del poligono.

q) Piano bisettore di un diedro e sue proprietà.
Per un punto P del piano γ bisettore del diedro αβ si conduca il piano δ perpendicolare allo spigolo *r*. I tre *piani* α, β, γ sono perpendicolari a δ;

condotte da P le perpendicolari PH e PK ad α e β esse giacciono in δ; ed unendo il punto M di intersezione della *r* e di δ con H, P, K, i triangoli rettangoli PHM, PKM sono eguali per avere l'ipotenusa PM in comune e gli angoli $\widehat{HMP}$, $\widehat{KMP}$ eguali perché γ è bisettore di $\alpha\beta$ e facendo ruotare attorno alla *r*, quando γ va su β, α va su γ ed i due angoli si sovrappongono.

Viceversa si dimostra che se un punto P interno ad $\alpha\beta$ è equidistante da α e da β, esso appartiene al piano γ bisettore del diedro $\widehat{\alpha\beta}$.

r) Definizione di triedro e di angoloide convesso.

s) TEOREMA: *In un triedro una faccia è minore della somma delle altre due.*

Si dimostra nel solito modo, e si estende all'angoloide.

t) TEOREMA: *La somma delle facce di un triedro è minore di quattro retti.*

Si dimostra nel solito modo e si estende all'angoloide convesso.

v) Definizione degli angoloidi regolari.

Hanno tutte le facce eguali, ed eguali i diedri formati da due facce consecutive.

x) Definizione di poliedro. Il poliedro si dice regolare quando tutte le facce sono poligoni regolari eguali e gli angoloidi sono regolari eguali.

z) Possono esistere al massimo cinque poliedri regolari, uno con tre, uno con quattro ed uno con cinque facce congruenti in un vertice eguali a dei triangoli equilateri; uno con tre quadrati congruenti in un vertice, ed uno con tre pentagoni regolari congruenti in un vertice.

Questa possibilità si dimostra nel solito modo.

2. *Costruzione del tetraedro regolare.*

Dimostrata la possibilità dell'esistenza dei cinque poliedri regolari passiamo alla loro effettiva costruzione.

La proprietà del baricentro di un triangolo qualunque si può riconoscere valida anche nella nostra geometria pitagorica indipendentemente dal postulato di Euclide; nel caso del triangolo equilatero è poi facilissimo riconoscere che il baricentro è anche centro delle due circonferenze circoscritta ed inscritta e che il raggio della prima è doppio di quello della seconda.

Per il centro H di un triangolo (fig. 32) equilatero ABC si condurrà la perpendicolare *h* al piano ABC, e siccome AH è minore di AB si determina nel piano A*h* l'intersezione di *h* con la circonferenza di centro A e raggio AB. Si unisce questo punto D con A, B, C; e si ha DA = DB = DC = AB. Il tetraedro DABC ha per facce quattro triangoli equilateri eguali; gli angoloidi sono dei triedri a facce eguali; ed i diedri sono pure eguali, perché il diedro di spigolo AC ha per sezione normale l'angolo DKB del triangolo isoscele KDB che ha per lato l'altezza della faccia e per base lo spigolo, ed è quindi lo stesso per tutti i diedri. Esiste dunque un tetraedro regolare di dato spigolo AB.

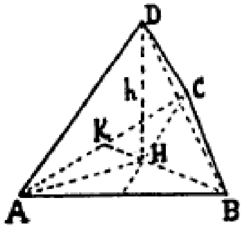


Fig. 82

Chiamando l_4 lo spigolo, con il teorema di Pitagora si ha:

$$(\mathrm{BK})^2 = \frac{3}{4} l_4^2 \quad \text{e quindi} \quad (\mathrm{BH})^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} l_4^2$$

$$(\mathrm{BH})^2 = \frac{1}{3} l_4^2 \quad \text{e} \quad (\mathrm{DH})^2 = \frac{2}{3} l_4^2$$

Il centro della sfera circoscritta sta sulla h che è il luogo dei punti equidistanti da A, B, C; quindi se D' è l'altro estremo del diametro OD, il piano ADD' è diametrale, il triangolo ADD' è rettangolo perché il punto medio di DD' è equidistante dai vertici, AH è l'altezza di questo triangolo rettangolo e quindi si ha:

$$(\mathrm{AD})^2 = 2r \cdot \mathrm{DH} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2} \cdot (\mathrm{DH})^2 = 2r \cdot \mathrm{DH};$$

$$3(\mathrm{DH})^2 = 4r \cdot \mathrm{DH};$$

$$3\,\mathrm{DH} = 4r; \quad \mathrm{DH} = \frac{4}{3} r \quad \text{e} \quad \mathrm{OH} = \frac{1}{3} r$$

Ne segue la regola per la

Inscrizione del tetraedro regolare nella sfera di raggio r.

Preso OD = r e da parte opposta OH = $\frac{1}{3}\ r$ si ha in DH l'altezza. Si conduce una circonferenza di diametro DD' = $2r$, e per H la perpendicolare al diametro; la sua intersezione con la circonferenza sia il vertice B del tetraedro. Condotto infine il piano passante per HB e perpendicolare al diametro DD', si descrive in esso la circonferenza di raggio HB ed in essa si inscrive il triangolo equilatero ABC. Il tetraedro ABCD è il tetraedro regolare inscritto.

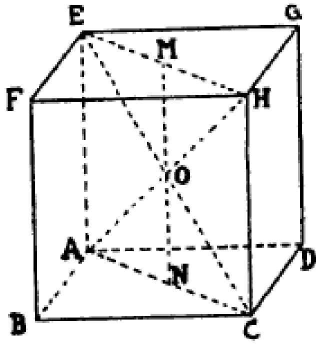


Fig. 33

3. *Esistenza e costruzione dell'esaedro regolare.*

Sia ABCD (fig. 33) un quadrato. Conduciamo per i vertici le perpendicolari al piano del quadrato ABCD da una stessa parte del piano, e prendiamo su esse i segmenti AE, BF, CH, DG eguali al lato AB. I piani EAB, EAD risultano perpendicolari al piano α del quadrato ABCD; e le perpendicolari BF e DG al piano ABCD giacciono rispettivamente nei piani EAB, EAD, dimodoché ABFE e ADGE sono due quadrati eguali al dato.

Analogamente la CH coincide con la intersezione dei piani FBC e GDC perpendicolari ad α, e quindi anche FBCH e CDGH sono dei quadrati. Perciò CH è perpendicolare al piano FHG; CD è perpendicolare a CB e CH, quindi anche al piano BCHF; il piano CDGH è perpendicolare al piano BCHF e la GH perpendicolare all'intersezione CH risulta perpendicolare anche al piano BCHF, e quindi alla HF. Quindi FHG = un retto. La FH è quindi perpendicolare al piano CDGH.

D'altra parte la DG è perpendicolare al piano HGE, i piani HGD, HGE sono perpendicolari tra loro e quindi la FH perpendicolare al primo di essi appartiene al secondo. Il quadrilatero FHGE è dunque un quadrilatero piano coi lati tutti eguali ed un angolo retto e perciò è un quadrato. Le sei facce dell'esaedro ABCDEFGH sono dei quadrati; le tre facce congruenti in ogni vertice sono dei quadrati ed i diedri son tutti retti; l'esaedro regolare è costruito.

EA ed HC sono perpendicolari ad AC ed EH, e il piano EAC è perpendicolare ad ABCD, la CH pure e perciò giace in AEC, quindi EACH è un quadrilatero piano con gli angoli retti, ossia è un rettangolo, quindi le due diagonali del cubo CE, AH sono eguali e si tagliano per metà. In simil modo EF e CD risultano perpendicolari a FC ed ED, EFCD risulta un rettangolo, e la diagonale FD è eguale alle altre due ed è tagliata per metà dal loro punto medio; lo stesso per la BG. Le quattro diagonali sono eguali, e si incontrano in un medesimo punto O che le biseca, quindi O è equidistante da tutti i vertici ed è centro della sfera circoscritta.

Si ha poi $(EC)^2=(EA)^2+(AB)^2+(BC)^2$ e quindi $4R^2=3l_6^2$ ed $l_6^2=\frac{4}{3}R^2$.

Condotta OM perpendicolare ad EH e quindi alla faccia EFHG, il segmento OM, che è la metà dello spigolo è eguale all'apotema del cubo, e $a_6^2=\frac{R^2}{3}$.

D'altra parte si riconosce facilmente che il quadrato costruito sopra il lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio R è triplo del quadrato del raggio (ossia il lato del triangolo equilatero è $R\sqrt{3}$ e si ha quindi il

TEOREMA: L'apotema del cubo inscritto nella sfera di raggio R è $\frac{1}{3}$ del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio R; e lo spigolo del cubo è i $\frac{2}{3}$ di tale lato $\left(l_6=\frac{2}{3}R\sqrt{3}\right)$

Dopo ciò per risolvere il problema della inscrizione del cubo nella sfera di raggio dato, occorre sapere dividere un segmento assegnato in *n* (nel nostro caso 3) parti eguali. Il problema, indipendentemente dalla teoria delle parallele, è sempre risolubile grazie al seguente

LEMMA: Se l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è divisa in *n* parti eguali e per i punti di divisione si conducono le perpendicolari ad uno dei cateti esse lo dividono in *n* parti eguali.

Sia ABC un triangolo rettangolo (fig. 34), e sia l'ipotenusa BC divisa in *n* (5) parti eguali; per i punti di divisione D, E, F, G conduciamo le perpendicolari ai cateti AC e AB. Si riconosce facilmente che DMAL, ENAK, EPLK ecc. sono dei rettangoli e che essendo $\widehat{EDM} \equiv \widehat{DMB} + \widehat{DBM}$ è pure $\widehat{EDP} \equiv \widehat{DBM}$; quindi i triangoli rettangoli EDP, DBM sono eguali, e EP = DM e perciò AL = LK. Analogamente LK = KI = HI = HC.

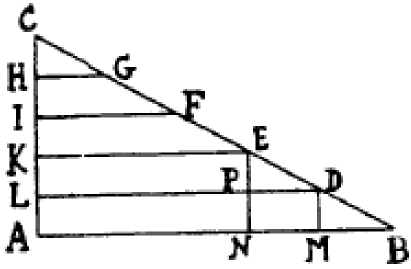


Fig. 34

Viceversa, per l'unicità del sottomultiplo di un segmento dato, se ipotenusa e cateto sono divisi in un medesimo numero di parti eguali, le congiungenti i punti di divisione corrispondenti LD, KE... risultano perpendicolari al cateto.

Vedremo nel capitolo ultimo come si possa sempre, indipendentemente dalla teoria delle rette parallele, risolvere il problema di dividere un segmento in un numero assegnato di parti eguali. Frattanto per il caso di *n* = 5 il problema si risolve così: Preso un segmento tale che il suo quintuplo sia maggiore del segmento dato (per esempio riportando cinque volte consecutivamente la quarta parte del segmento assegnato), si descrive sopra di esso come diametro la circonferenza, e poi con centro in uno degli estremi del diametro e raggio eguale al segmento assegnato si descrive un'altra circonferenza; il punto di intersezione delle due circonferenze è vertice di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il diametro della prima circonferenza, e conducendo per i punti di divisione del diametro le perpendicolari al cateto esso viene diviso in cinque parti eguali.

In modo analogo si risolve il problema della divisione di un segmento in tre parti eguali. Risolviamo adesso il problema della *Iscrizione del cubo nella sfera di raggio R*: si costruisce il triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio R, e se ne divide il lato in 3 parti eguali. Per un diametro CE della sfera (fig. 33) si conduce un piano, ed in esso si costruisce il triangolo rettangolo di ipotenusa CE e cateto $CH = \frac{2}{3}$ del lato del triangolo equilatero costruito. Per il punto medio O di CE (centro della sfera) si conduce la perpendicolare MN al cateto EH; OM = ON è l'apotema. Per M e per N si conducono i piani perpendicolari alla MN, e nel primo di essi si costruisce il quadrato che ha EH per diagonale. Esso è una faccia del cubo; i simmetrici dei quattro vertici rispetto ad O danno gli altri quattro vertici del cubo.

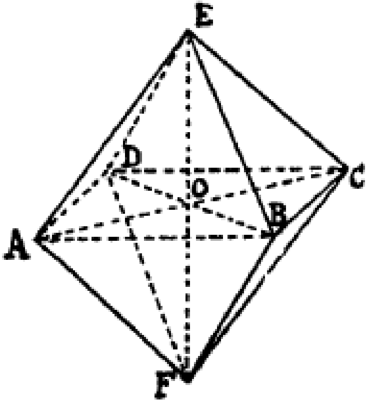


Fig. 85

4. *Inscrizione dell'ottaedro regolare nella sfera di raggio dato.*

Condotto per il centro della sfera il piano perpendicolare al diametro EF, sia ABCD (fig. 35) un quadrato inscritto nel cerchio sezione. Unendo gli estremi del diametro EF con A, B, C, D si ha l'ottaedro regolare inscritto. Infatti le otto facce sono dei triangoli equilateri, gli angoloidi sono eguali ed i diedri pure, essendo angoli al vertice di triangoli isosceli aventi il lato eguale all'altezza della faccia e la base eguale al diametro della sfera.

Si dimostra facilmente che l'ottaedro che ha per vertici i centri delle sei facce del cubo è regolare, e che il tetraedro che ha per vertice un vertice del cubo ed i tre vertici opposti delle tre facce ivi congruenti è regolare.

5. *L'icosaedro regolare.*

Divisa una circonferenza (fig. 36) di centro V e raggio qualunque in 10 parti eguali si inscriva in essa il decagono regolare $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5$ ed i due pentagoni regolari $A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$.

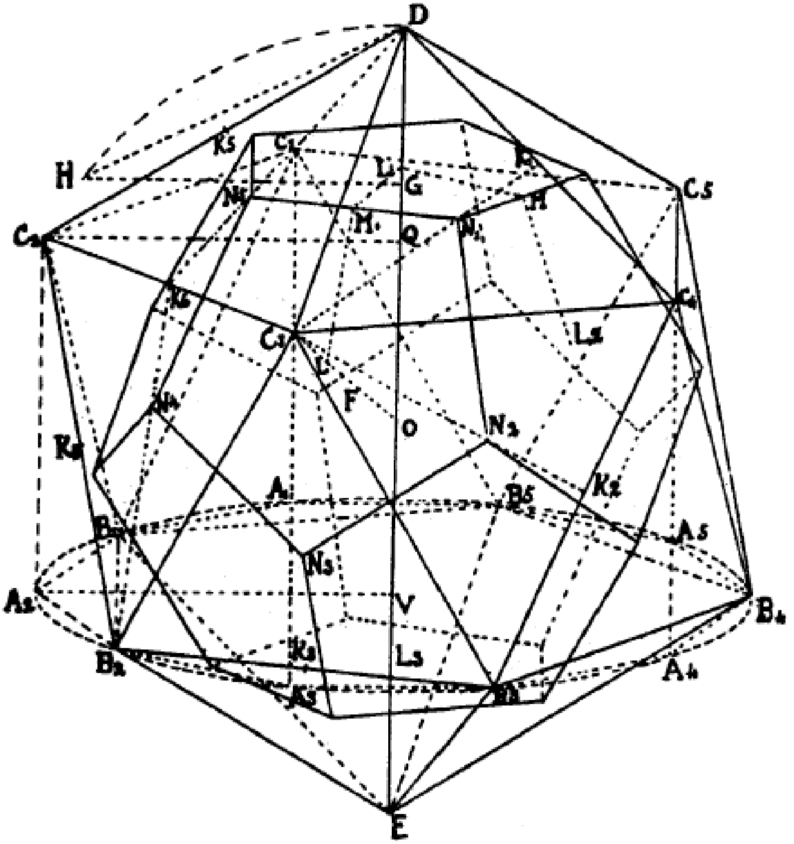


Fig. 36

Per i vertici A del primo pentagono si conducano le perpendicolari al piano α della circonferenza, e si prendano su di esse i segmenti $A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = A_5C_5 = VA_1$. Il piano $C_2A_2A_3$ è perpendicolare al piano α, quindi la A_3C_3 giace in esso, il quadrilatero piano $C_2A_2A_3C_3$ è un rettangolo e $C_2C_3 = A_2A_3$. Analogamente A_4C_4 giace nel piano $C_3A_3A_4$, il quadrilatero piano $C_3A_3A_4C_4$ è un rettangolo e $C_3C_4 = A_3A_4$. E così proseguendo i lati del pentagono $C_1C_2C_3C_4C_5$ risultano tutti eguali a A_1A_2.

Esso è inoltre un poligono piano. Infatti la C_2A_2 è perpendicolare al piano α ed al piano $C_1C_2C_3$; il piano $C_2A_2A_4$ è perpendicolare al piano α e quindi la A_4C_4 perpendicolare al piano α giace nel piano $C_2A_2A_4$; quindi $C_2A_2A_4C_4$ è un rettangolo, e C_2C_4 è perpendicolare a C_2A_2 e perciò C_4 giace nel piano $C_1C_2C_3$; analogamente C_5 giace nel piano $C_2C_3C_4$; quindi il poligono $C_1C_2C_3C_4$-C_5 è un pentagono piano coi lati tutti eguali. Il suo angolo $C_1C_2C_3$ è eguale all'angolo $A_1A_2A_3$ perché sono entrambi sezioni normali dello stesso diedro, analogamente per gli altri angoli; e quindi $C_1C_2C_3C_4C_5$ è un pentagono regolare piano eguale ai due pentagoni inscritti nella circonferenza del piano α.

Condotta per il centro V la perpendicolare al piano α, essa giace nel piano C_2A_2V, e, preso su essa dalla parte di C_2 il segmento $VQ = VA_2 = A_2C_2$, la C_2Q sta nel piano del pentagono $C_1C_2C_3C_4C_5$, ed è $QC_2 = VA_2$, e C_2A_2-VQ è un quadrato. Analogamente $QC_1 = VA_2$, ecc., e quindi Q è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono regolare $C_1C_2C_3C_4C_5$ ed eguale alla circonferenza del piano α.

Essendo poi C_1A_1 perpendicolare ad A_1B_5 si ha:

$$(C_1B_5)^2 = (C_1A_1)^2 + (A_1B_5)^2$$

e poiché C_1A_1 è eguale al raggio della circonferenza V ed A_1B_5 è il lato del decagono regolare inscritto in essa, sarà C_1B_5 il lato del pentagono regolare, cioè $CB_5 = B_1B_5 = C_1C_5 = ...$

Analogamente dai triangoli rettangoli $C_1A_1B_1$, C_5A_5-B_5... si ottiene $C_1B_1 = B_1B_5$, $C_5B_5 = B_5B_4$... quindi i triangoli $C_1B_1C_5$, $C_1B_5C_5$ sono equilateri, e così proseguendo si riconosce che i dieci triangoli $C_1C_2B_4$, $C_2B_4B_2$, C_2C_3-B_2, $C_3B_2B_3$... che si ottengono unendo ordinatamente i vertici del pentagono $C_1C_2C_3C_4C_5$ a quelli del pentagono $B_1B_2B_3B_4B_5$ sono equilateri.

Sia O il punto medio di VQ; si vede subito che esso equidista dai vertici C e dai vertici B. Prendiamo allora sulla VQ i segmenti $OD = CE = OC_1 = OB_1$; confrontando con la fig. 23 si riconosce che i segmenti QD e VE sono la parte aurea di QV ossia del raggio delle due circonferenze di centro V e centro Q. Uniamo D coi vertici del pentagono $C_1C_2C_3C_4C_5$ e E con quelli del pentagono $B_1B_2B_3B_4B_5$. Dal triangolo rettangolo DQC_2 risulta: $(DC_2)^2 = (QC_2)^2 + (QD)^2$, e quindi anche DC_2 è eguale al lato del pentagono. Analogamente per DC_1, DC_3, DC_4, DC_5; quindi anche i triangoli aventi il vertice in D e per lati opposti i lati del pentagono $C_1C_2C_3C_4C_5$ sono equilateri. E lo stesso naturalmente per i triangoli di vertice E aventi per lati opposti i lati del pentagono $B_1B_2B_3B_4B_5$. Abbiamo così ottenuto un icosaedro avente per vertici i punti D ed E ed i dieci vertici dei due pentagoni $C_1C_2C_3$-C_4C_5 e $B_1B_2B_3B_4B_5$; esso ha per facce dei triangoli equilateri, ed è inscritto nella sfera di centro O e raggio OD.

Poiché O equidista da D, C_2, B_2 e così pure C_3 equidista dagli stessi punti, i piani assiali degli spigoli $C_2DC_2B_2$ si tagliano sicuramente, e la loro intersezione OC_3 risulta perpendicolare al piano DC_2B_2 e lo interseca, in un punto F equidistante da D, C_2, B_2. D'altra parte i triangoli DC_2O, C_3C_2O hanno OC_2 in comune, OD = OC_3, $DC_2 = C_2C_3$ e sono perciò eguali; l'altezza C_2Q dell'uno è eguale alla C_2F dell'altro, ed è F interno a OC_3 ed OF = OQ e FC_3 = QD.

I triangoli isosceli OC_3D, OC_3C_4 hanno per lato il raggio della sfera circoscritta e per base lo spigolo dell'icosaedro quindi sono eguali. E, poiché OQ = OF, anche i triangoli OC_3Q, OC_4F risultano eguali per il primo criterio, ed essendo OQC_3 = un retto anche OFC_4 = un retto; FC_4 è dunque perpendicolare ad OC_3 e giace quindi nel piano DC_2B_2; ossia C_4 sta in questo piano. Analogamente si dimostra che anche B_3 sta in questo piano; e si ha: $FB_3 = FC_4 = FD = FC_2 = FB_2$. Perciò il pentagono $DC_2B_2B_3C_4$ è un pentagono piano equilatero inscritto nella circonferenza di centro F e raggio FD, ossia è un pentagono piano regolare ed è base della piramide pentagonale regolare di vertice C_3. Analogamente si dimostra che ogni vertice dell'icosaedro è vertice di una piramide pentagonale regolare eguale.

La sezione normale del diedro di spigolo DC_3 si ottiene congiungendo il suo punto medio con i punti C_2 e C_4. Quest'angolo è quindi l'angolo al vertice di un triangolo isoscele che ha per lato l'altezza della faccia e per base la diagonale del pentagono di base; quindi la sezione normale è la stessa per ogni diedro di ogni angoloide dell'icosaedro.

L'icosaedro costruito è dunque un icosaedro regolare.

Per costruire l'icosaedro regolare di dato spigolo C_1C_2 si può dunque procedere nel modo seguente: 1° – si determina (fig. 23) il segmento C_1C_4 di cui C_1C_2 è la parte aurea. 2° – si determina il centro Q della circonferenza circoscritta al triangolo isoscele di lato C_1C_4 e base C_1C_2, e si descrive la circonferenza di centro Q e raggio QC_1. 3° – si inscrive in questa circonferenza il pentagono regolare $C_1C_2C_3C_4C_5$. 4° – si conduce per il centro Q la perpendicolare al piano del pentagono e si prende QV eguale al raggio della circonferenza, e si ha nel punto medio O di QV il centro della sfera circoscritta ed in OC_1 il raggio. 5° – si prendono sul diametro QV i segmenti $OD = OE$ eguali ad OC_1. 6° – si conduce per V il piano perpendicolare al diametro DE. 7° – si abbassa dal vertice C_1 la perpendicolare al piano condotto per V, il suo piede A_1 appartiene alla circonferenza di centro V e raggio eguale a VQ. 8° – si abbassa da C_2 la perpendicolare a questo piano ed anche il suo piede A_2 appartiene alla circonferenza di centro V. 9° – si prende il punto medio B_1 dell'arco A_1A_2 e si inscrive nella circonferenza di centro V il pentagono regolare che ha questo punto medio per uno dei suoi vertici, ossia, il pentagono B_1B_2-$B_3B_4B_5$. 10º – si unisce D ai punti C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ed E ai punti B_1, B_2, B_3, B_4, B_5; si unisce poi B_1 a C_2, C_2 a B_2 ecc., e si ha l'icosaedro.

6. *Inscrizione dell'icosaedro regolare nella sfera di raggio* R.

Il triangolo DC_2E della fig. 36 è rettangolo in C_2 perché i suoi vertici equidistano da O centro della sfera. In esso l'altezza $C_2Q = r$, raggio del pentagono $C_1C_2C_3C_4$-C_5; $DQ = l_{10}$; $C_2D = l_5$; $QE = QV + VE = r + l_{10} = s_{10}$, e quindi $C_2E = s_5$; perciò per la [8]

$$(C_2D)^2 + (C_2E_1)^2 = 5r^2$$

ma per il teorema di Pitagora si ha:

$$(C_2D)^2 + (C_2E)^2 = (DE)^2 = 4R^2$$

e perciò $5r^2 = 4R^2$. ossia si ha il

TEOREMA: *Il quintuplo del quadrato che ha per lato il lato del pentagono di base è eguale al quadruplo del quadrato del raggio della sfera circoscritta.*

Premesso questo teorema, prendiamo (fig. 36) DE = 2R, e dividiamo DE in cinque parti eguali. Preso DG eguale ad un quinto di DE, si conduca per G la perpendicolare a DE sino ad incontrare in H la circonferenza di diametro DE. Si ha: $(DH)^2 = DE \cdot DG$ ossia

$$(DH)^2 = 2R \cdot \frac{2}{5} R = \frac{4}{5} R^2$$

DH è dunque eguale al raggio r della circonferenza circoscritta al pentagono.

Si determina allora il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r, e si toglie da OD e da OE, in modo da ottenere i segmenti OQ ed OV. Si conducono per Q e per V i piani perpendicolari al diametro DE, e con centri Q e V e raggio r si descrivono in essi due circonferenze. In queste si inscrivono opportunamente i pentagoni regolari di vertici A, di vertici B e di vertici C; ed unendo il vertice D coi vertici C, il vertice E coi vertici B, i cinque vertici C tra loro consecutivamente, i cinque B tra loro ed i vertici C opportunamente ai vertici B si ha l'icosaedro regolare inscritto.

Chiamando con R il raggio della sfera circoscritta, con a l'apotema dell'icosaedro, con l_5 lo spigolo, con r il raggio della circonferenza circoscritta al pentagono di lato l_5, con l_{10} la parte aurea di r, con s_5 e s_{10} i lati del pentalfa e del decalfa inscritti in questa circonferenza, con R' il raggio della sfera tangente agli spigoli dell'icosaedro nei loro punti medii, con a_5 l'apotema del pentagono di lato l_5 e con a_{10} l'apotema del decagono di lato l_{10}, si hanno le seguenti relazioni:

$$5r^2 = 4\mathrm{R}^2$$

$$2\mathrm{R} = r + 2l_{10} = s_{10} + l_{10}$$

e quindi, dal triangolo rettangolo DC_2E si ricava:

$$\mathrm{R}' = \frac{1}{2} s_5 \cdot a_{10}$$

cioè: il raggio della sfera tangente agli spigoli dell'icosaedro è eguale alla metà del lato del pentalfa inscritto nella circonferenza di raggio *r*, oppure è eguale all'apotema del decagono inscritto in questa circonferenza.

Il raggio della sfera inscritta od apotema *a* è cateto di un triangolo rettangolo ON_5K_6 che ha per ipotenusa R' e per altro cateto la terza parte dell'altezza della faccia; quindi:

$$a^2 = \mathrm{R}'^2 - \frac{l_5^2}{12} = \frac{1}{4}s_5^2 - \frac{l_5^2}{12} = \frac{1}{12}(3s_5^2 - l_5^2)$$

e per la [2] e la [6]:

$$a^2 = \frac{1}{12}(3s_5^2 - 4r^2 + s_{10}^2) = \frac{1}{12}(3s_{10}^2 - r^2 + s_{10}^2) =$$

$$= \frac{1}{12}(4s_{10}^2 - 4r^2) = \frac{1}{12}(2s_{10} + r) + (2s_{10} - r) =$$

$$= \frac{1}{12}(s_{10} + l_{10} + r + r)(s_{10} + s_{10} - r) =$$

$$= \frac{1}{12}(2\mathrm{R} + 2r)(s_{10} + l_{10}) = \frac{(\mathrm{R} + r)\cdot \mathrm{R}}{3}$$

ossia: il quadrato che ha per lato l'apotema dell'icosaedro è eguale alla terza parte del rettangolo che ha per lati il raggio della sfera circoscritta, e questo raggio R aumentato del raggio *r* della circonferenza circoscritta al pentagono. La relazione si può anche scrivere sotto la forma $\mathrm{R}r = 3a^2 – \mathrm{R}^2$.[53]

---

53 Dal triangolo ON_5D si ha invece:

$$a^2 = \mathrm{R}^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{l_5}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{l_5^2}{3}$$

Si può riconoscere infine che il piano diametrale passante per i vertici D, B_2, E sega l'icosaedro secondo un esagono che ha due lati opposti eguali allo spigolo dell'icosaedro e gli altri quattro eguali all'altezza della faccia, e si può dimostrare geometricamente che questo esagono ha la stessa estensione del rettangolo che ha per lati s_{10} e R + a_5.

Tagliando invece l'icosaedro con un piano diametrale perpendicolare al diametro DE si ottiene per sezione un decagono regolare che ha il lato eguale alla metà dello spigolo dell'icosaedro ed è inscritto in una circonferenza di raggio R', da cui risulta che la metà di l_5 è la parte aurea di R'; che risulta anche dalla formula: $R' = \frac{1}{2} s_5$.

7. *Costruzione del dodecaedro regolare.*

---

e

$$3a^2 = 3R^2 - l_5^2$$

e quindi

$$3R^2 - l_5^2 = Rr + R^2$$

e

$$2R^2 = l_5^2 + Rr; \quad l_5^2 = R(2R - r)$$

Si ha pure:

$$s_5^2 + l_5^2 = 4R^2$$

ossia

$$a_{10}^2 + \left(\frac{l_5}{2}\right)^2 = R^2$$

Si ha inoltre geometricamente dalla figura:

$$l_5^2 = 2R \cdot l_{10} \quad ; \quad s_5^2 = 2R \cdot s_{10}$$

Consideriamo nella fig. 36 la piramide pentagonale di vertice C_3 e base $DC_2B_2B_3C_4$. I punti medi K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 dei lati della base sono alla loro volta vertici di un pentagono regolare di centro F che è base di un'altra piramide di vertice C_3 e spigoli $C_3K_1 = C_3K_2 = C_3K_3 = C_3K_4 = C_3K_5$. I centri N_1, N_2, N_3, N_4,N_5 delle facce laterali della prima piramide stanno sugli spigoli della seconda e si ha:

$$C_3N_1 = C_3N_2 = C_3N_3 = C_3N_4 = C_3N_5 = \frac{2}{3}C_3K_1$$

Siccome $K_1\widehat{C_3K_2} = K_2C_3K_3 = \dots$ i triangoli isosceli $N_1C_3N_2$, $N_2C_3N_3$... sono eguali per il primo criterio e quindi $N_1N_2 = N_2N_3 = N_3N_4 = N_4N_5 = N_5N_1$.

Siccome il triangolo C_3FK_1 è rettangolo in F ed N_1K_1 è un terzo dell'ipotenusa, la perpendicolare al cateto C_3F condotta da N_1 incontra il cateto C_3F in un punto L tale che FL è un terzo di C_3F.

Lo stesso accade per gli altri punti N_2, N_3, N_4, N_5; e quindi $N_1N_2N_3N_4N_5$ è un pentagono piano equilatero inscritto nella circonferenza di centro L e raggio LN_1; ossia è un pentagono piano che ha per vertici i centri delle facce dell'icosaedro congruenti in C_3.

Analogamente prendendo i centri delle facce laterali della piramide di vertice D e base $C_1C_2C_3C_4C_5$, essi sono i vertici di un altro pentagono piano regolare ed eguale al precedente ed avente in comune con esso il lato N_5N_1; e prendendo i centri delle facce laterali della piramide di vertice C_4 e base $DC_3B_3B_4C_5$ si ottiene un terzo pentagono piano regolare eguale ai precedenti ed avente un lato in comune con il primo ed uno in comune con il secondo in modo che il vertice N_1 è comune ai tre pentagoni.

Operando in modo consimile con ciascuno dei dodici vertici dell'icosaedro si ottiene un dodecaedro che ha per facce dei pentagoni regolari eguali a $N_1N_2N_3N_4N_5$, e per angoloidi dei triedri a facce eguali.

Il vertice C_3 ed il centro L della base sono equidistanti dai vertici della base $N_1N_2N_3N_4N_5$ e quindi anche il centro O della sfera circoscritta all'icosaedro è equidistante da tutti i vertici dei pentagoni come $N_1N_2N_3N_4N_5$; quindi il dodecaedro che abbiamo costruito è inscritto nella sfera di raggio ON_1.

Preso allora il punto medio M dello spigolo del dodecaedro comune alle facce adiacenti di centri L_1 e L_2 ed unitolo con essi, l'angolo L_1ML_2 è la sezione normale di tale diedro; ed è angolo al vertice di un triangolo isoscele che ha per lati gli apotemi delle facce L_1M e L_2M e per base il segmento L_1L_2 che unisce i centri delle due facce. Ma OL_1 ed OL_2 sono eguali perché cateti dei triangoli rettangoli ON_1L_1, ON_1L_2 aventi l'ipotenusa ON_1 in comune ed i cateti L_1N_1, L_2N_1 eguali; quindi il segmento L_1L_2 è base di un triangolo isoscele che ha per lati $OL_1 = OL_2$ e l'angolo al vertice in comune con il triangolo isoscele che ha per lati i raggi OD, OC_4 della sfera e per base lo spigolo DC_4 dell'icosaedro. Tali elementi restano dunque gli stessi se si prende la sezione normale di un altro diedro del dodecaedro; quindi questi diedri son tutti eguali, e possiamo concludere che il dodecaedro costruito è regolare, è inscritto nella sfera di raggio ON_1 ed ha per apotema OL_1.

Vedremo più oltre la costruzione del dodecaedro di dato spigolo.

8. *Inscrizione del dodecaedro regolare nella sfera di raggio* R.

Sia ABCD... UV (fig. 37) un dodecaedro regolare.

In esso si può inscrivere un cubo avente per vertici dei vertici del dodecaedro e per spigoli delle diagonali delle facce del dodecaedro.

Preso infatti il vertice A, e nelle tre facce congruenti in A i vertici G, C, P; e presi i quattro vertici U, M, S, K, del dodecaedro ad essi diametralmente opposti, questi otto punti sono vertici di una figura i cui spigoli sono tutti eguali alle diagonali delle facce del dodecaedro, ossia al lato del pentalfa inscritto nella faccia. Dimostriamo che i triedri aventi per vertici i vertici e per spigoli gli spigoli di questa figura ivi concorrenti sono trirettangoli; basterà dimostrare che ad esempio il triedo di vertice A è trirettangolo, e per esempio che AG è perpendicolare ad AC.

Tornando per un momento alla figura 26, osserviamo che se dai vertici C ed I del pentagono regolare ACEGI si abbassano le perpendicolari CP, IQ al lato EG i triangoli rettangoli CPE, IQG, avendo l'ipotenusa ed un angolo acuto eguali sono eguali e si ha CP = IQ; quindi il quadrilatero PQIC è per costruzione un rettangolo di base PQ ed altezza CP = QI. Esso si ottiene anche riportando a partire dal punto medio M di EG i due segmenti $MP = MQ = \frac{1}{2} CI$, ed unendo P con C e Q con I.

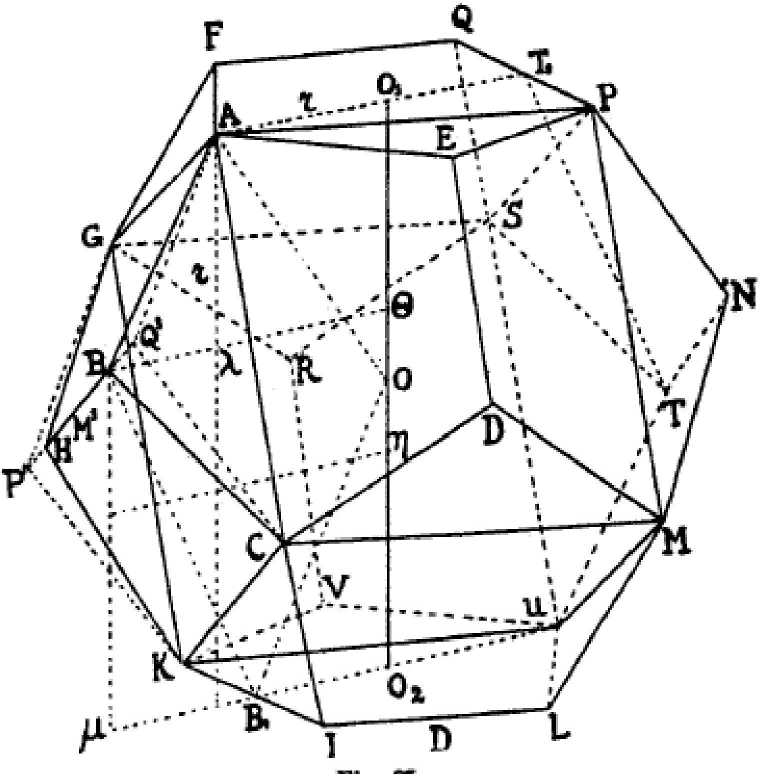


Fig. 37

Preso allora (fig. 37) il punto medio M' dello spigolo HB del dodecaedro, e presi $M'P' = M'Q' = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} CK$, i quadrilateri GP'Q'A, KP'Q'C sono dei rettangoli; e perciò la P'Q' è perpendicolare alle Q'A e Q'C ed al loro piano AQ'C, e così pure è perpendicolare alle P'G e P'K ed al loro piano GP'K. Il piano ABH che passa per P'Q' risulta perpendicolare al piano AQ'C ed al piano GP'K, e la retta GA di questo piano essendo perpendicolare alla intersezione AQ', come pure alla GP', è perpendicolare anche al piano AQ'C come pure al piano GP'K; e quindi è perpendicolare alla AC ed alla GK. Quindi il quadrilatero AGKC, che ha tutti i lati eguali ha due angoli retti; e siccome lo stesso discorso si ripete per la KC e la KC è perpendicolare al piano Q'CA in un punto C della sua intersezione AC con il piano GAC ad esso perpendicolare la CK sta nel piano GAC, e GACK è un quadrato. Analogamente si dimostra che sono dei quadrati le altre due facce ACMP e AGSP.

Operando in simil modo coi triedri di vertici G, S, P, K, U, M, C, gli spigoli GK, SU, PM, AC si dimostrano perpendicolari al piano del quadrato AGSP ed eguali tra loro ed al lato AP di questo quadrato; quindi AGSPCKUM è effettivamente un cubo, inscritto nel dodecaedro, e tutti e due sono inscritti nella sfera che ha per diametro la diagonale del cubo.

Dalla fig. 36 risulta che i centri di due facce opposte del dodecaedro come L_1 e L_3 stanno sul diametro DE e sono equidistanti dal centro O della sfera circoscritta al dodecaedro; perciò la congiungente i centri di due facce opposte del dodecaedro è perpendicolare ad esse. Congiunti dunque nella fig. 37 i centri O_1 ed O_2, di due facce opposte la O_1O_2 passi per il centro O ed è O_1O – O_2O

l'apotema del dodecaedro. Esso è cateto del triangolo OAO_1, avente per ipotenusa il raggio OA = R e per altro cateto il raggio $O_1A = r$ della circonferenza circoscritta al pentagono AEPQF. Questo raggio non è che l'altezza del triangolo rettangolo che ha per cateti l_5 ed s_5 ossia AE ed AP. Ma AP è lo spigolo del cubo inscritto e sappiamo che il triplo del quadrato dello spigolo è eguale al quadrato della diagonale; abbiamo quindi:

$$3(\mathrm{AP})^2 = 2\mathrm{R}^2$$

ossia

[14] $$3 s_5^2 = 4 \mathrm{R}^2$$

e siccome il quadrato che ha per lato il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio R è il triplo del quadrato del raggio, mentre il quadrato di s_5 è i quattro terzi di questo quadrato, ne segue che il quadrato di s_5 è i quattro noni del quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto, e perciò lo spigolo del cubo inscritto, che è anche il lato del pentalfa inscritto nella faccia del dodecaedro, è i due terzi del lato del triangolo regolare inscritto nella circonferenza di raggio R.

Perciò per costruire il dodecaedro regolare inscritto nella sfera di raggio OA = R si può procedere così: 1º – Si inscrive il triangolo equilatero nella circonferenza di raggio R, e si prende i due terzi del lato. Si ha così lo spigolo del cubo inscritto ed il lato $AP = s_5$ del pentalfa inscritto nella faccia. 2º – Si determina la parte aurea di questo spigolo e si ha così $AE = l_5$. 3º – Si costruisce il triangolo rettangolo di cateti s_5 ed l_5; l'altezza di questo triangolo rettangolo è il raggio *r* della circonferenza circoscritta alla faccia del dodecaedro. 4º – Si costruisce il triangolo rettangolo di ipotenusa R e cateto *r*, l'altro cateto è l'apotema OO_1 del dodecaedro. 5º – Preso un segmento O_1O_2 eguale al doppio dell'apotema si conducono per O_1 ed O_2 i piani perpendicolari ad esso, si descrivono in questi piani le circonferenze di raggio *r* e centri O_1 ed O_2 e si inscrivono in esse i pentagoni regolari AEPQF, UVKIL dove U è simmetrico di A rispetto ad O punto medio di O_1O_2. I punti A, P, K, U sono quattro vertici del cubo inscritto. 6º – Si conducono per A e per P i piani perpendicolari ad AP. 7º – Nel primo di questi piani si costruisce il quadrato che ha per diagonale AK e nel secondo il quadrato PSUM che ha per diagonale PU; si hanno così gli altri quattro vertici del cubo. 8º – Nel piano AFG si completa il pentagono regolare AFGHB, e poi nel piano EAB si completa il pentagono ABCDE, e poi HBCIK ecc.

9. *Relazioni tra gli elementi del dodecaedro ed altra soluzione del problema della sua inscrizione nella sfera di raggio* R.

Nella figura 26 i triangoli AVO, CΘO, DOZ, EVO... sono isosceli con il lato eguale al raggio OA della circonferenza e la base eguale al lato del decagono regolare inscritto, quindi la circonferenza di centro O e raggio eguale al lato AB del decagono passa per Θ, V, Y, Z...; il suo raggio è parte aurea di quello della circonferenza di raggio OA. I triangoli isosceli CΘY, OCA sono eguali perché hanno il lato eguale e l'angolo al vertice eguale, quindi il lato ΘY del pentalfa inscritto nella minore è eguale al lato del pentagono inscritto nella maggiore ed è quindi parte aurea del lato del pentalfa inscritto nella maggiore: e quindi ΘV lato del pentagono inscritto nella minore è parte aurea del lato del pentagono inscritto nella maggiore. I triangoli isosceli BCV e OYZ sono eguali perché hanno il lato eguale e l'angolo al vertice eguale e quindi il lato del decagono inscritto nella minore è parte aurea del lato del decagono inscritto nella maggiore; ed il lato del decalfa inscritto nella minore, essendo eguale al raggio della minore aumentato del lato del decagono inscritto, è eguale al raggio della maggiore.

Viceversa, data la circonferenza di centro O e raggio OV e descritta la circonferenza concentrica che ha per raggio il lato VZ del decalfa si ottiene la circonferenza di raggio OC e sussistono le relazioni ora vedute, ed in particolare il lato del pentagono regolare inscritto nella maggiore è eguale al lato del pentalfa inscritto nella minore.

Consideriamo ora le facce opposte (fig. 37) AEPQF, KILUV del dodecaedro, e siano O_1 ed O_2 i centri delle rispettive circonferenze circoscritte ed *r* il loro raggio $O_1A = O_2K$.

Sappiamo che O_1O_2 è perpendicolare alle due facce e quindi anche il piano O_1AO_2 è perpendicolare a queste due facce; esso coincide con il piano DEN_5 della figura 36, passa per il punto K_6 di questa figura ed è perpendicolare allo spigolo C_2C_3 perché anche K_6Q è perpendicolare a questo spigolo, e quindi taglia il piano della faccia $C_2C_3B_2$ secondo la K_6B_2 perpendicolare allo spigolo C_2C_3, e passa quindi per N_4 ossia per il vertice B della figura 37; e siccome questo piano O_1AO_2 passa anche per il vertice U opposto al vertice A interseca la faccia inferiore KILUV secondo la O_2U e quindi lo spigolo KI nel suo punto medio B_1; quindi il pentagono O_1AB-B_1O_2 è un pentagono piano. Analogamente è un pentagono piano $O_1O_2UTT_1$; ed il piano O_1OA sega il dodecaedro secondo l'esagono ABB_1UTT_1. Analogamente è piano il pentagono $O_1O_2D_1DE$ ed i due pentagoni hanno i lati ordinatamente eguali, gli angoli di vertice O_1 ed O_2 retti, gli angoli di vertice B_1 e D_1 eguali perché sezioni normali del dodecaedro; e si riconosce facilmente che anche gli angoli di vertice A e B del primo pentagono sono rispettivamente eguali a quelli di vertice E e D del secondo. I due pentagoni $O_1ABB_1O_2$, $O_1EDD_1O_2$ sono dunque eguali; perciò conducendo da B e D le perpendicolari al lato comune O_1O_2 i loro piedi coincidono in un punto Θ e ΘB = ΘD. Così pure ΘN, ΘS, ΘG risultano eguali a ΘB e perpendicolari ad O_1O_2,; insomma Θ è il centro di una circonferenza di raggio ΘB situata in un piano perpendicolare a O_1O_2, nella quale è inscritto il pentagono piano regolare BDNSG.

Analogamente conducendo da C la perpendicolare Cη ad O_1O_2 si dimostra che η è centro di una circonferenza (situata in un piano perpendicolare ad O_1O_2) nella quale è inscritto il pentagono piano regolare CMTRH.

Siccome AE spigolo del dodecaedro è parte aurea di AP e quindi di BD, troviamo che il lato del pentagono inscritto nella circonferenza di raggio r è parte aurea del lato del pentagono inscritto in quella di centro Θ e raggio ΘB; ne segue che il raggio r è parte aurea del raggio ΘB ossia, che questo raggio è eguale al lato s_{10} del decalfa inscritto nella faccia del dodecaedro.

Preso ora su BΘ il segmento Θλ, eguale ad r il segmento Bλ, sarà eguale ad l_{10}, e poiché O_1AλΘ è un rettangolo per costruzione il triangolo ABλ è rettangolo. La sua ipotenusa è l_5, il cateto Bλ, è l_{10}, l'altro cateto è quindi eguale ad r. Il rettangolo O_1AλΘ è dunque un quadrato ed i piani delle due circonferenze di centri O_1 e Θ hanno una distanza eguale ad r.

D'altra parte essendo l'apotema O_2B_1 della faccia eguale alla metà di BΘ = s_{10}, B_1 è il punto medio del segmento $O_2\mu$ preso eguale a s_{10}, e quindi $B\Theta O_2\mu$ è un rettangolo, e $B\mu B_1$ è un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è eguale ad $r + a_5$, il cateto μB_1 è eguale a a_5 e quindi:

$$(B\mu)^2 = (r+a_5)^2 - a_5^2 = r^2 + 2ra_5$$

ma

$$r = s_{10} - l_{10} \quad \text{ed} \quad a_5 = \frac{s_{10}}{2}$$

perciò

$$(B\mu)^2 = r^2 + s_{10}(s_{10} - l_{10}) = r^2 + s_{10}^2 - l_{10}s_{10}$$

e siccome

$$r^2 = s_{10} \cdot l_{10}$$

si ottiene

$$(\mathrm{B}\mu)^2 = s_{10}^2$$

quindi

$$\mathrm{B}\mu = s_{10}$$

ossia

$$\mathrm{B}\mu = \mathrm{O}_2\Theta = \mathrm{B}\Theta = s_{10}.$$

Quindi anche $\mathrm{B}\mu\mathrm{O}_2\Theta$ è un quadrato; e la distanza tra il piano dei vertici BDNSG e la faccia inferiore KILUV è eguale ad s_{10}.

Analogamente preso il punto η sopra $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ tale che $\mathrm{O}_2\eta = \mathrm{O}_1\Theta = r$ esso è il centro della circonferenza di raggio s_{10} passante per CMTRH.

Ne segue che $\Theta\eta = \Theta\mathrm{O}_2 - \mathrm{O}_2\eta = s_{10} - r = l_{10}$. Dunque la distanza tra i piani dei vertici BDNSG e CMTRH è eguale a l_{10}, lato del decagono regolare inscritto nella faccia del dodecaedro.

La distanza tra le due facce opposte del dodecaedro AEPQF e KILUV è eguale a $2a$; e si ha:

[15] $$2a = 2r + l_{10} = s_{10} + r$$

ed

$$a = \frac{2r + l_{10}}{2} = \frac{r + s_{10}}{2} = \frac{r}{2} + a_5.$$

Dai triangoli rettangoli $\mathrm{AO}_1\eta$ e $\mathrm{B}\Theta\mathrm{O}_1$ che hanno per cateti r ed s_{10} si trae che le ipotenuse $\mathrm{A}\eta$ e BO_1 sono eguali a s_5.

Siccome poi r è la parte aurea di s_{10}, s_{10} a sua volta è la parte aurea di $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$; dunque la distanza $2a$ tra le due facce opposte del dodecaedro è divisa dai piani degli altri vertici in due punti Θ ed η tali che $\eta O_1 = O_2 \Theta$ è la parte aurea di $2a$, la parte rimanente $O_1 \Theta = O_2 \eta$ è eguale alla parte aurea r di s_{10} e la parte intermedia è la parte aurea di r ossia è il lato del decagono inscritto nella faccia del dodecaedro.

Riassumendo, le due circonferenze di centri Θ ed η hanno il raggio eguale al doppio dell'apotema della faccia del dodecaedro, hanno dalle due facce ad esse prossime distanza eguale al raggio della faccia e dalle altre due facce distanza eguale al loro raggio ossia al lato del decalfa inscritto nella faccia del dodecaedro.

Nella figura 28 è disegnata nel suo piano la sezione ABB_1 UTT_1 del dodecaedro ed è costituita dall'esagono PFQP'F'Q'. I punti N e D corrispondono ai centri O_1 e O_2 delle facce della figura 37.

I lati PF e P'F' sono quelli eguali allo spigolo l_5 del dodecaedro. BD e PN sono eguali al raggio r della faccia; O punto medio di ND è il centro della sfera ed OB = OF = OP è il raggio R della sfera circoscritta, DH è eguale ad s_{10}. Completando il quadrato ADHF ed il rettangolo ADNV, risulta AB eguale ad l_{10}.

Preso sopra PB il punto K tale che PK = s_{10} sarà BK = r; condotta per K la perpendicolare a PD essa taglia AV in C e DN in E tali che AC = DE = r e BC = AK = l_5: preso poi KL = BM = s_{10} i triangoli rettangoli KBL, KPN sono eguali e quindi KN = BL = s_5 e $P\widehat{K}N = K\widehat{L}B = A\widehat{C}B = AKB$ quindi i punti A, K, N sono allineati, e la diagonale AN è divisa da K in due parti, AK eguale ad l_5 e KN eguale a s_5, dimodoché AN è eguale a $l_5 + s_5$. AD è eguale ad s_{10}; preso allora il punto medio Q di AD sarà DQ l'apotema a_5 della faccia ed OQ il raggio R' della sfera tangente agli spigoli del dodecaedro nei loro punti medii. E siccome OQ è la metà di AN si ha la semplice relazione:

[16] $$R' = \frac{l_5 + s_5}{2}$$

Nella figura 28 FN e CD sono eguali ad s_5. Dalla figura risulta che il rettangolo BDNP è eguale alla somma del rettangolo BDHG e del quadrato GHNP e quindi si ha:

$$2a \cdot r = r \cdot s_{10} + r^2 = r \cdot s_{10} + s_{10} \cdot l_{10} = s_{10}(r + l_{10}) = s_{10}^2$$

Dunque

[17] $$2a \cdot r = s_{10}^2$$

od anche

[18] $$a \cdot r = 2a_5^2$$

Nella figura 28 la diagonale AN, e gli assi di AD e DN si incontrano nel punto medio di AN ed il rettangolo di base AQ = a ed altezza a è diviso dalle BP e CE in modo che il rettangolo di base AB = l_{10} ed altezza a è eguale in estensione al rettangolo di base AQ = a_5 ed altezza r.

Si ha dunque:

[19] $$a \cdot l_{10} = r \cdot a_5$$

od anche

[19'] $$2a \cdot l_{10} = r \cdot s_{10}$$

Dai triangoli OBD ed OQD della fig. 28 si trae:

[20] $$\mathrm{R}^2 = a^2 + r^2$$

[21] $$\mathrm{R}^2 = a^2 + a_5^2$$

e da queste od anche dalla figura

[22] $$\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^2 + r^2 - a_5^2 \qquad \mathrm{R}'^2 + \left(\frac{l_5}{2}\right)^2$$

L'esagono ABB_1UTT_1 sezione del dodecaedro è eguale al rettangolo di lati $2s_{10}$ e $2a$, diminuito dei rettangoli di lati r ed l_{10} e a_5 ed s_{10}. Si ha dunque:

$$2\,s_{10} \cdot 2\,a - rl_{10} - a_5 s_{10} = 4\,a_5 \cdot 2\,a - r\,(s_{10} - r) - 2\,a_5^2$$

$$= \ 4a_5(s_{10} + r) - r \cdot s_{10} + r^2 - 2a_5^2 = 8a_5^2 + 4a_5 r - 2a_5 r + r^2 - 2a_5^2$$

$$= \ 6a_5^2 + 2\,a_5(s_{10} - l_{10}) + r^2 = 6a_5^2 + 4\,a_5^2 - s_{10}\,l_{10} + r^2 = 10\,a_5^2$$

Dunque la sezione fatta nel dodecaedro con il piano passante per i centri di due facce opposte ed il vertice di una di queste facce è il decuplo del quadrato che ha per lato l'apotema della faccia.

Nell'esagono PFQP'F'Q' le diagonali PP' ed FF' sono eguali a 2R e siccome si bisecano in O ne segue che PFP'F' è un rettangolo; e quindi i triangoli isosceli PQ'F' e FQP' che hanno il lato eguale hanno eguali anche le basi PF' ed FP' e sono eguali. Queste basi sono eguali a 2R'.

Gli angoli $Q'PF'$ e QFP' alla base dei due triangoli isosceli precedenti sono eguali; e quindi sono eguali anche gli angoli $Q'PF$ e $\widehat{PFQ}$; quindi i triangoli

PFQ' e PFQ sono eguali per il primo criterio e perciò le due diagonali dell'esagono PQ e FQ' sono eguali. Quest'ultima è ipotenusa del triangolo FQ'T' e perciò il quadrato costruito sopra di essa è dato da $9a_5^2 + r^2$: e se ne possono trovare anche altre espressioni.

Dopo avere trovato l'espressione delle tre diagonali dell'esagono PFQP'F'Q' si può trovare che la sua area è anche espressa da R'($2l_5 + s_5$) od anche da R'(2R' + l_5), che si possono dimostrare identicamente eguali a $10a_5^2$.

In base alle proprietà che abbiamo trovato si può dare la seguente soluzione al problema di inscrivere il dodecaedro regolare nella sfera di raggio dato, soluzione preferibile alla prima e che presumiamo collimi con quella data dai pitagorici: 1º – Dato R si determina come nell'altro procedimento lo spigolo AP del cubo inscritto che è anche eguale ad s_5, lato del pentalfa inscritto nella faccia del dodecaedro. 2º – Si determina la parte aurea di questo spigolo del cubo e si ha in essa lo spigolo del dodecaedro. 3º – L'altezza del triangolo rettangolo che ha per cateti s_5 ed l_5 ossia gli spigoli del cubo e del dodecaedro inscritti è eguale ad r, raggio della circonferenza, circoscritta alla faccia del dodecaedro. 4º – Le proiezioni dei cateti di questo triangolo sono l_{10} e s_{10}, ossia il lato del decagono regolare ed il lato del decalfa inscritti nella circonferenza circoscritta alla faccia. 5º – Si prende un segmento $\Theta\eta = l_{10}$ lato del decagono e parte aurea del raggio r, e se ne prendono i prolungamenti $\Theta O_1 = \eta O_2 =$

r. Il punto medio O dei segmenti Θη e O_1O_2 è il centro della sfera inscritta, ed i segmenti $OO_1 = OO_2 = a$ sono eguali all'apotema del dodecaedro. 6º – Per i punti O_1, Θ, η, O_2 si conducono i piani perpendicolari ad O_1O_2; in questi piani si descrivono le circonferenze di centri O_1 e O_2 e raggio r e quelle di centri Θ e η e raggio s_{10} = lato del decalfa, e si inscrivono in esse i pentagoni regolari AEPQF, KILUV, BDNSG, CMTRH in modo che i vertici A e B stiano in uno stesso piano OO_1AB ed i vertici I, C in uno stesso piano OO_2IC e che questi due piani formino un angolo di 36°. Si hanno così tutti i vertici del dodecaedro. 7º – Si tira AB, ED, PN, QS, FG, IC, LM, UT, VR, KH; e poi si uniscono successivamente i punti B, C, D, M, N, T, S, R, G, H, B ed il dodecaedro è costruito.

Il problema di costruire il dodecaedro circoscritto alla sfera di raggio a, si risolve immediatamente. Basta prendere la parte aurea del diametro $2a$, e la parte rimanente è r, la differenza tra $2a$ ed r è s_{10}; e la differenza fra s_{10} ed r è l_{10}; e ora si prosegue come nel caso precedente.

Il problema di costruire il dodecaedro regolare di dato spigolo l_5, si risolve costruendo prima (fig. 23) il segmento s_5 di cui lo spigolo assegnato è la parte aurea; poi costruito il triangolo rettangolo di cateti s_5 ed l_5, la figura 28 fornisce successivamente r, l_{10}, s_{10}, a, a_5, R, ed R'.

Ipsicle e prima di lui Aristeo[54] han dimostrato che i circoli circoscritti al pentagono del dodecaedro ed alla faccia dell'icosaedro inscritti nella stessa sfera hanno lo stesso raggio.

La dimostrazione si può fare così: nella fig. 36 si ha: $ON_5 - R > OL_1$. Sugli apotemi OL, OL_1, OL_2 ... prendo $OL' = OL'_1 = OL'_2 = ... = R$. Questi punti sono vertici dell'icosaedro inscritto nella sfera di raggio R. Infatti, 1º – $L'L'_1 = L'L'_2 = L'_1L'_2 = ...$ perché basi di triangoli isosceli di lato ed angolo al vertice eguale; 2º – Il triangolo equilatero $L'L'_1L'_2$ ha il centro sull'asse ON_1 equidistante da essi: questo centro X è il piede delle altezze di vertici L', L'_1, L'_2 dei triangoli eguali ON_1L, $ON_1L'_1$, $ON_1L'_2$; 3º – Il triangolo rettangolo $OXL'_1 = ON_1L_1$ perché l'ipotenusa $OL'_1 = ON_1$ ed un angolo acuto è in comune; quindi $XL'_1 = L_1N_1$; ma XL'_1 è il raggio della circonferenza circoscritta alla faccia dell'icosaedro, ed L_1N_1 è il raggio di quella circoscritta al pentagono del dodecaedro; e quindi la proprietà è dimostrata geometricamente.

54 Cfr. G. Loria – *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, pagg. 159 e 271.

CAPITOLO V
IL SIMBOLO DELL'UNIVERSO

1. In relazione ai poliedri regolari e specialmente al dodecaedro regolare dobbiamo ora soffermarci alquanto a considerare le tre medie considerate anche dai pitagorici, ossia la media aritmetica, la media geometrica e la media armonica.

Nicomaco di Gerasa, scrittore del primo secolo dell'era volgare, attesta che Pitagora conosceva le tre proporzioni aritmetica, geometrica ed armonica; e Giamblico attesta che nella sua scuola si consideravano le tre medie aritmetica, geometrica ed armonica[55].

Si ha proporzione aritmetica tra quattro numeri a, b, c, d quando $a - b = c - d$; la proporzione è continua se $b = c$; ed in tal caso b è il medio aritmetico o la media aritmetica di a e d e si ha: $b = \frac{a+d}{2}$.

Se si tratta di tre segmenti in proporzione aritmetica, la definizione è la stessa ed il segmento b semisomma dei due segmenti a e d è la loro media aritmetica.

---

55 Cfr. NICOMACO DI GERASA, ed. Teubner, pag. 122; e JAMBLICHI, *Nicomachi Arith. introd.*, ed. Teubner, pag. 100. Cfr. anche G. LORIA, *Le scienze esatte*, pag. 36.

Si ha proporzione geometrica tra quattro numeri a, b, c, d quando $a : b = c : d$, e per i segmenti quando il rettangolo dei medi è eguale al rettangolo degli estremi. Con questa definizione non vi è bisogno della teoria delle parallele e della similitudine, non si considera il rapporto di due segmenti e non si sbatte nella questione della incommensurabilità. Abbiamo veduto inoltre che i pitagorici erano in grado di risolvere il problema dell'applicazione semplice, ossia di costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti assegnati a, b, c, nel caso in cui il primo segmento era maggiore di uno almeno degli altri due, sempre s'intende senza bisogno di parallele. Se b è eguale a c, la proporzione è continua e b è il medio geometrico tra a e d; la media geometrica di due segmenti è dunque il lato del quadrato eguale al rettangolo degli altri due; ed abbiamo visto che i pitagorici erano sempre in grado, come applicazione del teorema di Pitagora, di costruire tale media geometrica.

Quanto alla proporzione armonica e alla media armonica, si dirà che quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione armonica quando i loro inversi sono in proporzione aritmetica, ossia quando $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$; e conseguentemente b è medio armonico tra a e d quando l'inverso di b è eguale alla media aritmetica degli inversi degli altri due.

Archita in un suo frammento ci ha tramandato le definizioni pitagoriche nel caso della proporzione continua di tre termini; le definizioni antiche coincidono con le moderne nel caso della media aritmetica e della geometrica, la definizione della media armonica è invece diversa. Riportiamo il frammento di Archita,[56] inserendo per chiarezza gli esempi numerici:

«La media è aritmetica quando i tre termini sono in un rapporto analogo di eccedente, vale a dire tali che la quantità di cui il primo sorpassa il secondo è precisamente quella di cui il secondo sorpassa il terzo; in questa proporzione si trova che il rapporto dei termini più grandi è più piccolo, ed il rapporto dei più piccoli è più grande (esempio: 12, 9 e 6 sono in proporzione aritmetica perché 12 – 9 = 9 – 6; il rapporto dei termini più grandi cioè il rapporto di 12 e di 9 è uguale a $1+\frac{1}{3}$, il rapporto dei più piccoli, cioè di 9 e di 6 è eguale $1+\frac{1}{2}$, ed $\frac{1}{3}$ è minore di $\frac{1}{2}$)».

«Si ha media geometrica, continua Archita, quando il primo termine sta al secondo come il secondo sta al terzo, ed in questo caso il rapporto dei più grandi è eguale al rapporto dei più piccoli (esempio: 6 è la media geometrica di 9 e 4 perché 9 : 6 = 6 : 4); il medio subcontrario che noi [Archita] chiamiamo armonico esiste quando

56 Cfr. H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, ed. Berlin 1912; fr. 2°. Il frammento di Archita è riportato nel testo greco dal Mieli a pag. 251 dell'opera più volte citata. Lo Chaignet (A. Ed. Chaignet – *Pythagore et la philosophie pythagoricienne*, 2ª ed., vol. I, pag. 282-83) ne dà la traduzione.

il primo termine passa il secondo di una frazione di se stesso, identica alla frazione del terzo di cui il secondo passa il terzo; in questa proporzione il rapporto dei termini più grandi è il più grande ed il rapporto dei più piccoli il più piccolo (esempio: 8 è la media aritmetica di 12 e di 6, perché $12=8+\frac{1}{3}$ di 12; ed $8=6+\frac{1}{3}$ di 6; il rapporto di 12 ad 8 è eguale a $1+\frac{1}{2}$, quello di 8 a 6 è eguale a $1+\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{2}$ è maggiore di $\frac{1}{3}$)».

Prima di Archita (o dei pitagorici?) questa proporzione era chiamata ὑπεναντία tradotto con sub-contraria anche dal Loria, perché secondo la definizione che abbiamo riportato, in questo caso succede il contrario che nel primo[57]. Da questa definizione si può trarre con operazioni aritmetiche semplici la definizione moderna. Difatti se *a*, *b*, *c*, formano proporzione armonica, ciò significa secondo Archita che $a=b+\frac{1}{n}a$ e $b=c+\frac{1}{n}c$; ;dalle quali si deduce facilmente:

$$n=a:(a-b)=c:(b-c)$$

e quindi:

$$a(b-c)=c(a-b);\ ab-ac=ac-bc;\ 2ac=ab+bc;$$

57 Cfr. Jamblichi, *Nicomachi Arith.*, ed Teubner, pag. 100; e Nicomaco, ed. Teubner, pag. 135.

$$2ac=b(a+c);\ b=\frac{2ac}{a+c};\ \frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right).$$

Si può anche scrivere:

$$b\left(\frac{a+c}{2}\right)=a\cdot c$$

Si ha quindi la proporzione numerica:

$$a:\frac{a+c}{2}=\frac{2ac}{a+c}:c$$

che, secondo quanto attesta Nicomaco di Gerasa, Pitagora trasportò da Babilonia in Grecia.[58] In questa importantissima proporzione geometrica gli estremi sono due numeri (o grandezze) qualunque, i medii sono ordinatamente la loro media aritmetica e la loro media armonica. Nel caso di segmenti, dalla penultima relazione risulta la presumibile definizione geometrica della media armonica: la media armonica *b* di due segmenti *a* e *c* è l'altezza di un rettangolo avente per base la media aritmetica dei due segmenti ed eguale al rettangolo che ha per lati i due segmenti, ossia eguale anche al quadrato che ha per lato la media geometrica dei due segmenti.

E poiché la media aritmetica di due segmenti *a* e *c* è maggiore del più piccolo di questi segmenti, ne segue che dati i due segmenti *a* e *c*, costruita geometricamente la loro media aritmetica, per determinare geometricamente anche la media armonica bastava risolvere il problema dell'applicazione semplice, in questo caso risolu-

58 La testimonianza è di Giamblico, cfr. G. Loria, Le scienze esatte ecc., pag. 36.

bile sicuramente (anche senza la teoria delle parallele); ed abbiamo così trovato anche la relazione geometrica tra le tre medie.

L'esempio di media armonica che abbiamo addotto (8 media armonica tra 12 e 6) fa comprendere il perché Archita od i pitagorici dettero il nome di armonica alla media sub-contraria. Questi numeri infatti esprimono rispettivamente le lunghezze della prima, terza e quarta (ed ultima) corda del tetracordo greco (la lira di Orfeo); ossia in termini moderni le lunghezze rispettive delle corde (che a parità di tensione, di diametro ecc.) danno la nota fondamentale, la quinta e l'ottava[59]; e questo tanto nella scala pitagorica, quanto anche nella scala naturale maggiore e minore.

Questo conduce a vedere le relazioni che i pitagorici hanno scoperto (o stabilito) tra le corde del tetracordo, e così pure dell'ottava (chiamata in greco armonia).

Ce lo dice, in parte, Filolao in un suo frammento[60]. Dice Filolao: «L'estensione dell'armonia è una quarta più una quinta [adoperiamo i termini moderni di quarta e quinta per chiarezza]; la quinta è più forte della quarta di nove ottavi». Il che significa: presa una corda, e presa la corda che ne dia il suono primo armonico, ossia la corda che dà l'ottava, ed avute in questo modo le due corde estreme del tetracordo, l'armonia ossia l'ottava si

59 I termini di quarta, quinta ed ottava si trovano già in NICOMACO, ed. Teubner, pag. 122.

60 Cfr. CHAIGNET, *Pythagore etc.*, che riporta il frammento; vol. I, pag. 230.

estende mediante l'aggiunta di due corde intermedie che sono la nostra quarta e quinta. Si ha così il tetracordo composto di quattro corde che sono (per noi) ordinatamente quelle del *do*, del *fa*, del *sol* e del *do* superiore (la corda intermedia nel doppio tetracordo)[61]. Considerando le lunghezze di queste corde, invece delle frequenze od altezze dei suoni emessi come oggi si usa, frequenze che sono le inverse delle lunghezze, è noto come Pitagora abbia trovato sperimentalmente le lunghezze di queste corde. Egli trovò che la lunghezza dell'ultima corda era la metà di quella della prima, e che la lunghezza della seconda, cioè del *fa* era semplicemente la media aritmetica delle lunghezze di queste due corde estreme. Quanto alla corda del *sol*, il cui suono dà all'orecchio la sensazione di un intervallo rispetto al *do* inferiore eguale

61 Questo tetracordo non è altro che la lira di Orfeo, strumento con il quale si accompagnava la recitazione ed anche il canto. Osserva A. TACCHINARDI nella sua *Acustica musicale* (1912, Hoepli, pag. 175), che è «notevole che il tetracordo contiene gli intervalli più caratteristici della voce nella declamazione. Infatti, interrogando, la voce sale di una quarta; rinforzando, cresce ancora di un grado; ed infine, concludendo, ridiscende di una quinta». Occorre anche tener presente che «l'accento dell'indo-europeo era un accento di altezza; la vocale tonica era caratterizzata, non da un rinforzo della voce, come in tedesco ed in inglese, ma da una elevazione. Il «tono» greco antico consisteva in una elevazione della voce, la vocale tonica era una vocale più acuta delle vocali atone; l'intervallo è dato da Dionigi di Alicarnasso come un intervallo di una quinta» (A. MEILLET, *Aperçu d'une histoire de la langue grecque*, Paris 1912, pag. 22; vedi anche pag. 296).

all'intervallo del *do* superiore a quello del *fa*, aveva una lunghezza tale che le quattro lunghezze nel loro ordine formavano una proporzione geometrica. Queste lunghezze sono infatti espresse rispettivamente da $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2};$ od in numeri interi, prendendo eguale a 12 la lunghezza della prima corda, sono espresse dai numeri 12, 9, 8, 6; ed essendo 9 maggiore di 6 la lunghezza della corda del *sol* si poteva sempre determinare con il metodo dell'applicazione semplice.

La lunghezza della terza corda è dunque 8, ossia la media sub-contraria di 12 e di 6; ed ecco perché Archita dà il nome di armonica a questa media.

In conclusione le quattro corde del tetracordo hanno lunghezze che si stabiliscono semplicemente così: l'ultima corda è lunga la metà della prima, la seconda ha per lunghezza la semi-somma delle lunghezze delle corde estreme; e la terza corda ha per lunghezza la media armonica delle lunghezze delle corde estreme. Tutte queste lunghezze si costruiscono geometricamente. Se invece delle lunghezze si prendessero le frequenze si troverebbe che la quinta ha per frequenza la media aritmetica delle frequenze delle corde estreme, e la quarta la media armonica[62].

---

62 In molti testi di fisica e di matematica si trova detto che la media armonica deve il suo nome al fatto che le tre note dell'accordo maggiore *do, mi, sol* formano una progressione armonica in cui la lunghezza della corda del *mi* è la media armonica delle lunghezze delle altre due. Quest'affermazione è errata, quantunque

2. Vediamo ora quali medie aritmetiche, geometriche ed armoniche si presentino considerando gli elementi dei poliedri regolari.

Per il cubo la cosa è immediata. Il cubo ha 12 spigoli, 8 vertici e 6 facce; sono proprio i numeri che danno le lunghezze della prima, della terza e dell'ultima corda del

---

sia vero che nella scala naturale la lunghezza della corda del *mi* sia la media armonica delle lunghezze del *do* e del *sol*. Ma ciò non accade nella scala pitagorica.

Nella scala naturale gli intervalli sono basati sopra la legge dei rapporti semplici, e la media armonica delle lunghezze 1, $\frac{2}{3}$ del *do* e del *sol* è $\frac{4}{5}$ = lunghezza del *mi*; come quella del *re* = $\frac{8}{9}$ è la media armonica di quelle del *do* e del *mi*. La scala pitagorica di Filolao, invece, si impernia sul tetracordo; in esso la lunghezza della terza corda (*sol*) è la media armonica delle lunghezze delle corde estreme; la sua elevazione rispetto alla prima corda è la stessa di quella dell'ultima corda rispetto alla seconda, ed è la stessa elevazione che nel greco parlato si verificava secondo Dionigi di Alicarnasso per la vocale su cui cadeva l'accento tonico. E la denominazione di media armonica introdotta da Archita deriva dalla proprietà della corda del *sol* nel tetracordo greco, e non dalla proprietà del *mi* nell'accordo maggiore della scala naturale, allora inesistente.

Filolao ci dice come venivano stabiliti gli intervalli nella scala pitagorica. Si prendeva l'intervallo $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}$ tra le due corde medie del tetracordo (*sol* e *fa*); e con esso, partendo dal *do* e dal *sol* si determinavano le lunghezze delle altre corde. Si ottenevano così le lunghezze: *do* = 1, *re* = $\frac{8}{9}$, *mi* = $\frac{64}{81}$, *fa* = $\frac{3}{4}$, *sol* =

tetracordo. Inoltre 8 è il primo cubo, è il cubo del primo numero dopo l'unità. Per questa ragione Filolao chiama il cubo armonia geometrica.[63] I numeri dei suoi elementi presentano la stessa relazione che presentano le tre corde prima, terza e quarta del tetracordo.

La stessa cosa, naturalmente potrebbe dirsi per l'ottaedro regolare che ha 12 spigoli, 8 facce e 6 vertici.

Nell'icosaedro regolare, indicando con R il raggio della sfera circoscritta, con r quello della circonferenza circoscritta alla base pentagonale di ogni angoloide e con l_{10} e s_{10} i lati del decagono regolare e del decalfa in

---

$\frac{2}{3}$, $la = \frac{16}{27}$. Nella scala naturale, invece, la lunghezza del mi è $\frac{4}{5} = \frac{64}{80}$ con una differenza di circa $\frac{1}{100}$ dalla lunghezza del *mi* pitagorico. Nella scala pitagorica, quindi, il *mi* non è la media armonica tra il *do* ed il *sol*. Ed è invece la terza corda del tetracordo (la *quinta* della nostra ottava) che per le sue proprietà suggerisce ad Archita il termine di media armonica per designare la media aritmetica delle inverse. Così, e soltanto così, si può comprendere l'importanza che i pitagorici dovevano attribuire a questa media armonica, che con identica legge matematica si presentava nella musica, nella lingua, e nel dodecaedro, simbolo dell'universo. Naturalmente quest'errore si ripresenta nei testi di filosofia. Il Robin, p.e., (Léon Robin, *La pensée grecque*, Paris 1923, pag. 75) prende per le quattro corde della lira la *bassa*, la *terza*, la *media* e la *alta* rappresentate (dice lui) dai numeri interi 6, 8, 9, 12; e commette così il doppio errore di sostituire la *terza* alla quarta, e di invertire l'ordine delle lunghezze delle corde.

63 Cfr. Nicomaco, ed. Teubner, pag. 125.

essa inscritti, abbiamo trovato che: $s_{10} + l_{10} = 2\mathrm{R}$. La media aritmetica tra s_{10} e l_{10} è dunque R, mentre per la [9] la media geometrica è r. Si può dunque costruire la media armonica; indicandola con M si avrà:

$$(s_{10}+l_{10})\cdot\mathrm{M}=2s_{10}l_{10}$$

e sostituendo

$$2\mathrm{R}\cdot\mathrm{M}=2r^2$$

e siccome

$$r^2=\frac{4}{5}\mathrm{R}^2$$

si ha:

$$\mathrm{M}\cdot\mathrm{R}=\frac{4}{5}\mathrm{R}^2$$

ed infine

$$\mathrm{M}=\frac{4}{5}\mathrm{R}$$

Così pure, considerando il raggio R e la somma R + r dei due raggi, abbiamo trovato che la loro media geometrica è $(\mathrm{R} + r) \cdot r = 3a^2$, dove a indica l'apotema dell'icosaedro. E quindi, indicando con M la media armonica si ha:

$$(2R+r)\cdot\mathrm{M}=6a^2$$

e poiché

$$2R=s_{10}+l_{10}$$

si avrà:

$$2s_{10}\cdot\mathrm{M}=6a^2;\quad s_{10}\cdot\mathrm{M}=3a^2$$

ossia la media armonica tra la somma del raggio della sfera circoscritta all'icosaedro con il raggio della circonferenza circoscritta al pentagono base ed il raggio della sfera, è l'altezza di un rettangolo che ha per base il lato del decalfa inscritto in questa circonferenza ed è eguale al triplo del quadrato che ha per lato l'apotema dell'icosaedro.

Venendo a considerare gli elementi del dodecaedro regolare e della sua faccia, osserviamo innanzi tutto la presenza di due quaterne: la prima costituita dalle distanze $2a$, s_{10}, r, l_{10} tra i piani di due facce opposte, tra i piani contenenti gli altri vertici dalle due facce, e tra loro; la seconda dal lato del pentalfa e dai segmenti determinati sopra di esso dai due lati del pentalfa che lo intersecano, cioè dai segmenti AE = s_5, AN_1 = EN = l_5, AN = EN_1, NN, della fig. 26. In ambedue queste quaterne di segmenti, ognuno di essi è la parte aurea di quello che lo precede.

Ora, se indichiamo con a, b, c, d quattro segmenti consecutivi della successione che si ottiene prendendo come segmento consecutivo di un segmento la sua parte aurea, si ha:

$$a=b+c \qquad b=c+d$$

e quindi $a + d = 2b$; dunque: il secondo termine della successione è la media aritmetica degli estremi.

Si ha poi:

$$b^2 = ac; \quad c^2 = bd$$

quindi

$$bc=(a-c)c=ac-c^2=b^2-c^2=(b+c)(b-c)=ad$$

D'altra parte, indicando con M la media armonica degli estremi a, d, essa è tale che:

$$ad = \frac{a+d}{2} \cdot \mathrm{M}$$

ossia sostituendo, che:

$$bc = b \cdot \mathrm{M}$$

dunque essa non è altro che il terzo segmento c. Possiamo perciò enunciare la proprietà che, se quattro segmenti sono segmenti consecutivi di una successione tale che ogni segmento è seguito dalla sua parte aurea, accade che il secondo segmento ed il terzo sono rispettivamente la media aritmetica e la media armonica degli estremi.

Esattamente la stessa cosa accade per le lunghezze della seconda e terza corda del tetracordo rispetto alle lunghezze delle corde estreme.

Considerando allora la quaterna $2a$, s_{10}, r, l_{10} dei segmenti determinati sopra la congiungente i vertici di due facce opposte del dodecaedro dai piani delle facce e dai piani contenenti gli altri vertici si ha: 1° – la distanza s_{10}, (ossia il lato del decalfa inscritto nella faccia) è la parte aurea del doppio dell'apotema ed è la media aritmetica tra il doppio dell'apotema ed il lato l_{10} del decagono inscritto nella faccia (ossia la distanza tra i piani contenenti i vertici intermedi); 2° – La distanza tra uno di questi piani e la faccia più vicina, ossia il raggio r della circonferenza circoscritta alla faccia, è la media armonica tra $2a$ ed l_{10}.

Analogamente il lato l_5 del pentagono regolare inscritto è la parte aurea del lato s_5 del pentalfa, ed è la media aritmetica tra il lato del pentalfa ed il lato del pentagono $NN_1N_2N_3N_4$ della fig. 26; mentre il lato AN della punta del pentalfa è la media armonica tra il lato del pentalfa ed il lato del pentagono $NN_1N_2N_3N_4$.

Nel dodecaedro la distanza $2a$ delle facce opposte, e nella faccia il lato del pentalfa, sono così suddivisi in modo da costituire due quaterne di segmenti, tali che i segmenti medii si ottengono dagli estremi prendendone la media aritmetica e quella armonica, esattamente come le due corde medie del tetracordo si ottengono da quelle estreme.

Prendendo come segmenti estremi s_{10} ed r si trova per media aritmetica a [15]; e per la media armonica M si ha:

$$a \cdot M = rs_{10} = (s_{10} - l_{10})\, s_{10} = s_{10}^2 - s_{10}\, l_{10}$$

e per la [9] $\quad a \cdot M = s_{10}^2 - r^2 = (s_{10} + r)(s_{10} - r) = 2\, a\, l_{10}$

ed infine $\qquad M = 2l_{10}$

Così pure la media aritmetica tra s_5 ed l_5 è R' [16], e la media armonica è data da 2 (s_5 – l_5), che equivale a 4 (s_5 – R') ed a 4 (R' – l_5), ed è il doppio del lato AN della punta del pentalfa.

In queste due quaterne il quarto segmento è la parte aurea del primo, ed i due segmenti intermedi la media aritmetica e la media armonica degli estremi.

Si ha infine, indicando con M la media armonica di $2a$ ed s_{10}:

$$(2a+s_{10})\cdot \mathrm{M}=4a\cdot s_{10}=2(s_{10}+r)\cdot s_{10}=2s_{10}^2+2s_{10}\cdot r$$

e per la [17]

$$(2a+s_{10})\cdot \mathrm{M}=4ar+2s_{10}\cdot r=2r\cdot(2a+s_{10})$$

e quindi la media armonica tra $2a$ ed s_{10} è eguale al diametro della circonferenza circoscritta alla faccia.

L'esistenza di queste medie armoniche, e di queste specie di tetracordi costituiti dagli elementi del dodecaedro e della sua faccia non deve esser sfuggita ai pitagorici (almeno a quelli posteriori), e specialmente il tetracordo formato dagli elementi $2a$, s_{10}, r ed l_{10} deve avere costituito ai loro occhi una conferma significativa delle ragioni simboliche che facevano del dodecaedro regolare il simbolo geometrico dell'universo; diciamo conferma in quanto questa corrispondenza tra il dodecaedro e l'universo si basa sopra altre ragioni ancora.

3. I cinque poliedri regolari erano chiamati *figure cosmiche* perché erano considerati come simboli dei quattro elementi e dell'universo. II dodecaedro era il simbolo dell'universo. Se vogliamo vederne il perché non vi è che da leggere alcune pagine del «*Timeo*» di Platone. Riassumiamo servendoci della versione dell'Acri[64]. Timeo osserva che «ogni specie di corpo ha profondità ogni profondità deve avere il piano, e un diritto piano è fatto di triangoli», in altri termini ogni superficie piana poligonale è composta di triangoli e corrispondentemen-

64 Platone, *I dialoghi*, volgarizzati da Francesco Acri, Milano 1915, vol. III, pag. 142-45.

te ogni poliedro si decompone in tetraedri: dimodoché il piano corrisponde al numero tre dei vertici determinanti il triangolo ed il quattro al numero dei vertici che determinano il tetraedro. Il due, come è noto, corrisponde a una retta che è individuata da due punti. Il punto, la retta, il piano o triangolo ed il tetraedro sono gli elementi della geometria, come i numeri: uno, due, tre e quattro sono i numeri il cui insieme dà l'intera decade. Per il fatto che ogni poligono è composto di triangoli, i pitagorici dicevano che il triangolo è il principio della generazione[65].

«I triangoli, prosegue Timeo, nascono poi da due specie di triangoli, il triangolo rettangolo isoscele ed il triangolo rettangolo scaleno. Questi vengono posti come principii del fuoco e degli altri corpi [elementi]; e con essi si compongono i quattro corpi [i quattro elementi, ossia le superfici dei poliedri simboli dei quattro elementi]».[66]

Siccome di triangoli rettangoli scaleni ve ne sono innumerevoli (distinti per la forma), Timeo sceglie quello «bellissimo» avente le seguenti proprietà: 1º – con due di essi si compone un triangolo equilatero; 2º – l'ipotenusa doppia del cateto minore; 3º – il quadrato del cateto maggiore è triplo di quello del minore. Con sei di questi triangoli si forma un triangolo equilatero (o vice-

65 Cfr. Proclo, ed. Teubner, pag. 166, 15. Per altre fonti cfr. lo Chaignet, vol. II, pag. III.

66 Quanto si trova entro le parentesi è stato aggiunto da noi per chiarimento.

versa, preso un triangolo equilatero i diametri della circonferenza circoscritta passanti per i suoi vertici lo decompongono in sei di tali triangoli), e con quattro di questi triangoli equilateri si ottiene il tetraedro regolare, «per mezzo del quale può essere compartita una sfera in parti simili [di forma] ed eguali [di volume] in numero di ventiquattro». Con otto di tali triangoli equilateri si ottiene l'ottaedro (composto dunque di 48 di tali triangoli); il terzo corpo, l'icosaedro, ha venti facce triangolari ed equilatere, e quindi due volte sessanta di tali triangoli elementari. Altri poliedri regolari con facce triangolari non vi sono[67]. Con il triangolo rettangolo isoscele si genera il cubo; perché quattro triangoli isosceli formano un quadrato (od anche, il quadrato è diviso dai diametri passanti per i vertici in quattro triangoli rettangoli isosceli), e con sei quadrati si forma il cubo che consta così di ventiquattro triangoli rettangoli isosceli. Rimane così, dice Timeo, ancora una forma di composizione che è la quinta, «di quella si fu giovato Iddio per lo disegno dell'universo».

67 Timeo sembra proprio sicuro del fatto. Il Mieli (pag. 262 della sua opera) esclude assolutamente che i pitagorici fossero arrivati a riconoscere la impossibilità dell'esistenza di sei poliedri regolari, e riporta in nota, non dice se a sostegno di questa sua esclusione ma così pare, la dimostrazione di Euclide (XIII, 18) nel suo testo greco. A noi sembra che i pitagorici potevano benissimo pervenirvi; ad ogni modo è certo che essi conoscevano i cinque poliedri che effettivamente esistono.

A questo punto Platone fa tacere Timeo, forse per riserva[68] forse perché nel caso del dodecaedro vi è qualche differenza. Ma applicando il medesimo metodo di decomposizione in triangoli alle facce del dodecaedro, il pentagono con le sue diagonali dà il pentalfa, e la figura è divisa in trenta triangoli rettangoli dai diametri passanti per i dieci vertici del pentalfa. La superficie del dodecaedro viene perciò decomposta in 30×12 = 360 triangoli rettangoli, i quali però questa volta non sono di quelli «bellissimi» cari a Timeo. Ora il numero dodici (che compare anche negli altri poliedri) aveva già per conto suo un carattere sacro ed universale; dodici era il numero delle divisioni zodiacali e dodici in Grecia, Etruria e Roma, era il numero degli Dei consenti, dodici era il numero delle verghe del fascio etrusco e romano, ed un dodecaedro etrusco e molti dodecaedri celtici pervenutici stanno ad indicare l'importanza del numero dodici e del dodecaedro[69]. Il numero 360 era poi il numero delle divisioni dello zodiaco caldeo, ed il numero dei giorni dell'anno egizio, fatti presumibilmente noti a Pitagora. Per queste ragioni il dodecaedro si presentava naturalmente come il simbolo dell'universo.

---

68 Il silenzio di Platone in proposito ha dato nell'occhio anche al Robin, il quale dice (Léon Robin, *La pensée grecque*, Paris, 1923, pag. 273) che «*au sujet du cinquième polyèdre regulier, le dodécaedre... Platon est très mysterieux*». Il Robin non prospetta alcuna ragione di tanto mistero.

69 Cfr. Arturo Reghini, *Il fascio littorio*, nella rivista «Docens» 1934-XIII, numeri 10-11.

La cosa è pienamente confermata da quanto dicono due antichi scrittori. Alcinoo[70] dopo avere spiegato la natura dei primi quattro poliedri, dice che il quinto ha dodici facce come lo zodiaco ha dodici segni, ed aggiunge che ogni faccia è composta di cinque triangoli (con il centro della faccia per vertice comune) di cui ciascuno è composto di altri sei. In totale 360 triangoli. Plutarco[71], dopo avere constatato che ognuna delle dodici facce pentagonali del dodecaedro consta di trenta triangoli rettangoli scaleni, aggiunge che questo mostra che il dodecaedro rappresenta tanto lo zodiaco che l'anno poiché si suddivide nel medesimo numero di parti di essi.

E come l'universo contiene in sé e consta dei quattro elementi, fuoco, aria, acqua, terra, così il dodecaedro, inscritto nella sfera come il cosmo nella fascia (il περιέχον), contiene i quattro poliedri regolari che li rappresentano. Abbiamo veduto infatti come si possa inscrivere in esso e nella sfera l'esaedro regolare; si può mostrare poi facilmente che l'icosaedro avente per vertici i centri delle facce del dodecaedro è regolare; così pure si ottiene un ottaedro regolare prendendone come vertici i centri delle facce del cubo; ed unendo un vertice del cubo con quelli opposti delle facce ivi congruenti

70 Alcinoo, *De doctrina Platonis*, Parigi 1567, cap. II. Cfr. anche l'opera di H. Martin – *Études sur le Timée de Platon*, Paris 1841, II, 246.

71 Plutarco, *Questioni platoniche*, v. I. Naturalmente si tratta dell'anno egizio quantunque Plutarco si dimentichi di precisarlo.

e questi tre fra loro si dimostra che si ottiene un tetraedro regolare.

La tetrade dei quattro elementi è contenuta nell'universo, il κόσμος, e questo nella fascia, come i quattro poliedri nel quinto e nella sfera circoscritta. Così la tetrade dei punti, delle linee rette, dei piani e dei corpi è contenuta nello spazio e lo costituisce; e quattro punti individuano il poliedro con il minimo numero di facce ed individuano una sfera; così la somma dei primi quattro numeri interi dà l'unità e totalità della decade (numero che appartiene tanto ai numeri lineari della serie naturale, quanto ai numeri triangolari, quanto ai numeri piramidali, e questo indipendentemente dal fatto di assumere il dieci come base del sistema di numerazione); così le quattro note del tetracordo costituiscono l'armonia. Il tetraedro, la tetrade dei quattro elementi, la *tetractis* dei quattro numeri, ed il tetracordo sono così intimamente legati tra loro, ed ai quattro elementi del dodecaedro $2a$, s_{10}, r, l_{10} di cui ciascuno ha per parte aurea quello che lo segue, e di cui i medii hanno rispetto agli estremi esattamente la stessa relazione delle corde medie alle estreme del tetracordo, e che individuano i quattro piani contenenti i vertici del dodecaedro. E si comprende perché il catechismo degli Acusmatici identifichi l'oracolo di Delfi (l'ombelico del mondo) alla *tetractis* ed all'armonia.[72]

La parte aurea ha grandissima importanza nella struttura del pentalfa ed in quella del dodecaedro simbolo

72 Cfr. LÉON ROBIN, *La pensée grecque*, Paris 1923, pag. 78.

dell'universo. Si comprende quindi anche perché la parte aurea abbia tanta importanza nell'architettura pre-periclea[73]; e molte altre cose vi sarebbero da dire circa l'influenza ed i rapporti tra la geometria pitagorica, la cosmologia, l'architettura e le varie arti.[74]

La digressione sarebbe però troppo lunga. Ci limiteremo ad osservare che in questo modo lo sviluppo della geometria pitagorica ha per fine (nei due sensi della parola) la inscrizione del dodecaedro nella sfera ed il riconoscimento delle sue proprietà, come sappiamo che accadeva effettivamente.

Anche Euclide, secondo l'attestazione di Proclo[75], pose per scopo finale dei suoi elementi la costruzione delle figure platoniche (poliedri regolari); e forse dal tempo di Pitagora a quello di Euclide questo scopo finale si mantenne tradizionalmente lo stesso; ma mentre in Euclide l'intento era puramente geometrico, in Pitagora invece le proprietà del dodecaedro mostravano, se non dimostravano, l'esistenza nel cosmo di quella stessa armonia che l'orecchio e l'esperienza scoprivano nelle note del tetracordo.

Questo era, riteniamo, il legame profondo che univa la geometria alla cosmologia, e forniva la base e l'impul-

---

73 M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2ª ed. I, 178.

74 Alla considerazione della media armonica si connette, invece, il canone della statuaria di Polycleto; cfr. L. Robin, *La pensée grecque*, pag. 74.

75 Cfr. Loria, *Le scienze esatte* ecc., pag. 189.

so anche all'ascesi pitagorica; e si comprende ora con una certa precisione, e non più vagamente, come Platone potesse scrivere che «la geometria è un metodo per dirigere l'anima verso l'essere eterno, una scuola preparatoria per una mente scientifica, capace di rivolgere le attività dell'anima verso le cose sovrumane», e che «è perfino impossibile arrivare a una vera fede in Dio se non si conosce la matematica e l'intimo legame di quest'ultima con la musica»[76]. Per i pitagorici e per Platone la geometria era dunque una scienza *sacra*, ossia esoterica, mentre la geometria euclidea, spezzando tutti i contatti e divenendo fine a se stessa, degenerò in una magnifica scienza *profana.*

Di questo particolare legame della cosmologia con la musica, percepibile nel tetracordo formato dagli elementi costitutivi del dodecaedro, non è rimasta traccia, ma in questo caso riteniamo che l'assenza di ogni traccia materiale non sia casuale, perché questo doveva costituire uno degli insegnamenti segreti della nostra scuola; ed un indizio del fatto è fornito dalla subita riserva di Timeo nel dialogo platonico omonimo appena giunge a parlare del dodecaedro.

Così possiamo presumere di avere fatto un passo abbastanza importante per la restituzione della geometria pitagorica, non soltanto dal punto di vista moderno di restituzione dell'edificio geometrico puro, ma dal punto di vista pitagorico inteso a studiare il cosmo per scoprire

---

76 Cfr. Loria, *Le scienze esatte* ecc., pag. 110.

le connessioni tra la geometria e le altre scienze e discipline.

Altre cose si potrebbero aggiungere in proposito, ma anche noi dobbiamo pitagoricamente tener presente: μὴ εἶναι πρὸς πάντας πάντα ῥητά.

CAPITOLO VI
DIMOSTRAZIONE DEL "POSTULATO" DI EUCLIDE

1. Partendo dal teorema dei due retti, e con l'aiuto del conseguente teorema di Pitagora, ma senza ricorrere alla teoria delle parallele, della similitudine e della proporzione, è dunque possibile pervenire a tutte le scoperte dei pitagorici menzionate da Proclo, con l'unica restrizione che il problema dell'applicazione semplice (*parabola*) non si può risolvere in tutti i casi, ma solo in un caso speciale, per quanto importante e sufficiente a consentire il pieno sviluppo della geometria pitagorica piana e solida come la abbiamo potuta restituire sin qui. Ed abbiamo notato il fatto eloquente che per i problemi dell'applicazione la testimonianza addotta da Proclo non è quella autorevole di Eudemo, ma soltanto quella di coloro che stavano attorno ad Eudemo.

Si obbietterà che questo non basta a dimostrare con assoluta certezza che effettivamente quella che abbiamo ricostituito sia tale e quale la geometria pitagorica. Lo sappiamo perfettamente, ma sappiamo anche che, data la assoluta mancanza di ogni documento diretto, del quale avremmo del resto dovuto tener conto come elemento per la restituzione e non come documento di prova, non era possibile fare di più; e sappiamo che in questa circostanza anche le prove indirette, che abbiamo raccolto per via, hanno il loro valore a favore della nostra tesi.

Nello sviluppo della geometria pitagorica ci siamo limitati a quanto occorreva per poter raggiungere i risultati menzionati da Proclo; ma si possono raggiungere altri risultati ancora; ed una parte di essi li dovremo premettere per trattare l'importante questione del «postulato» delle parallele.

Il problema dell'applicazione semplice, corrispondente alla risoluzione dell'equazione $ax = bc$ o $ax = b^2$, si può risolvere nel caso in cui a sia maggiore di b o di c. Nel caso che ciò non avvenga la certezza dell'esistenza della soluzione si può avere solo quando si disponga della proprietà postulata da Euclide con il suo V postulato. Una difficoltà analoga si incontra in altre importanti questioni. Così, dati tre punti di una circonferenza, si dimostra che gli assi delle tre corde passano per il centro; ma non si può dimostrare in generale che per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza.

Ora, di fronte a questo ostacolo che sbarra la strada all'ulteriore sviluppo della geometria, come potevano comportarsi i pitagorici? Abbiamo veduto quali ragioni importanti fanno ritenere che essi non hanno ammesso il postulato delle parallele e nemmeno il concetto di parallele quale è definito da Euclide; ci proponiamo adesso di mostrare come potevano, egualmente, superare la difficoltà.

Osserviamo anzi tutto come sia noto come, conoscendo comunque il teorema dei due retti (proposizione Saccheri), si può, ammettendo il postulato di Archimede, dimostrare con il Legendre[77] la unicità della non secante una retta data passante per un punto assegnato (proprietà equivalente al postulato delle parallele); e così pure osserviamo come il Severi, ammesso il suo postulato delle parallele[78], dimostri, sempre con l'aiuto del postulato di Archimede, la unicità della non secante. La cosa è dunque possibile servendosi del postulato di Archimede; se non che, non possiamo pensare a ricorrere a questo postulato perché Archimede è posteriore persino ad Euclide, e non è verosimile che i Pitagorici abbiano ammesso un postulato come quello di Archimede.

D'altra parte, è vero che il postulato di Archimede basta per permettere di raggiungere il risultato; ma è anche necessario ricorrere ad esso? E se non è necessario, potevano i pitagorici, senza di esso ed in modo più semplice, raggiungere il risultato, dimostrare cioè la unicità della non secante una retta data passante per un punto assegnato?

---

77 Cr. R. BONOLA in ENRIQUEZ, *Questioni riguardanti etc.*, pag. 323.

78 Cfr. SEVERI, *Elementi di Geometria*, Firenze 1926, vol. I, pag. 119.

Vedremo di sì, e vedremo come; ma ci è necessario per far questo premettere ancora altre proposizioni che si deducono da quelle già viste.

2. TEOREMA: *Se due rette* a *e* b *sono perpendicolari entrambe ad una stessa retta AB, ogni altra perpendicolare ad una di esse incontra anche l'altra ed è ad essa perpendicolare.*

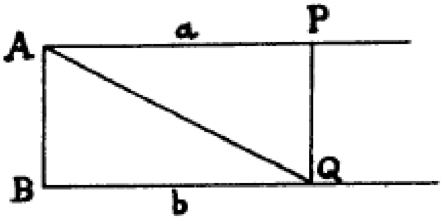


Fig. 38

Siano le due rette *a* e *b* (fig. 38) perpendicolari alla AB; e da un punto P della *a* conduciamo la perpendicolare alla *b*. Il suo piede Q è necessariamente distinto da B, perché altrimenti da B uscirebbero due perpendicolari alla *b*. E siccome la AB e la PQ perpendicolari in punti diversi ad una stessa retta non possono incontrarsi, i punti P e Q devono stare da una stessa parte rispetto ad AB. Unendo A con Q il triangolo ABQ è rettangolo, e quindi AQB è minore dell'angolo retto $\widehat{PQB}$; la QA divide quindi in due parti quest'angolo retto, e siccome sappiamo che i due angoli acuti del triangolo rettangolo sono complementari, i due angoli AQP e QAB risultano eguali perché complementari di uno stesso angolo $\widehat{AQB}$. I due triangoli ABQ, QPA, avendo inoltre eguali gli angoli AQB e QAP perché entrambi complementari dello stesso angolo $\widehat{BAQ}$, risultano eguali per il secondo criterio; e quindi l'angolo APQ è retto, c.d.d.

D'altra parte essendo unica la perpendicolare per P alla *a* essa coincide con la PQ, ossia la perpendicolare PQ alla *a* incontra la *b* ed è ad essa perpendicolare.

Osservazione: Un punto qualunque P o Q di una delle due rette *a* o *b* ha dall'altra distanza costante. Infatti, essendo ABPQ un rettangolo il lato PQ è eguale al lato opposto AB. Perciò due rette perpendicolari ad una terza sono tra loro equidistanti.

Viceversa, se un punto P situato nel piano dalla parte di A rispetto alla *b* ha dalla *b* una distanza PQ = AB, allora diciamo che questo punto P appartiene alla perpendicolare alla AB condotta per A ossia sta sulla *a*.

Supponiamo infatti che i due punti A e P situati dalla stessa parte della *b* abbiano dalla *b* distanze eguali tra loro AB, PQ. Il punto P non può naturalmente appartenere alla AB, altrimenti Q coinciderebbe con B e quindi P con A; allora anche Q e B sono distinti. Uniamo A con Q; l'angolo AQB del triangolo rettangolo AQB è acuto e complementare di $\widehat{BAQ}$; la QA divide quindi $\widehat{BQP}$, ed AQB è complemento di $\widehat{AQP}$; perciò i due triangoli ABQ, QPA hanno AQ in comune, AB = PQ e l'angolo compreso eguale e sono perciò eguali; l'angolo PAQ è dunque eguale al complemento AQB di BAQ e perciò l'angolo $\widehat{BAP} = \widehat{BAQ} + QAP$

è eguale ad un retto. Il punto P sta dunque sulla *a* perpendicolare alla AB per A.

Ne segue che ogni altra retta passante per *a* non può essere tale che i suoi punti abbiano distanza costante dalla *b*; si ha dunque la *unicità* della retta equidistante; cioè il

TEOREMA: *Per un punto passa una ed una sola retta equidistante da una retta data.*

Il problema di condurre per un punto A la retta equidistante da una retta data *b*, si risolve immediatamente. Basta da A abbassare la perpendicolare alla *b*; e poi da A la perpendicolare a questa.

Abbiamo visto che tutti i punti della *a* e soltanto essi hanno dalla *b* la distanza costante AB.

Questo si esprime con il

TEOREMA: *Il luogo geometrico dei punti del piano situati da una stessa parte rispetto ad una retta data ed aventi da essa una distanza costante assegnata è una retta.*

Questa proposizione è quella che il Severi assume come postulato, chiamandolo il postulato delle parallele. Per noi è un teorema conseguenza del teorema dei due retti e quindi del postulato pitagorico della rotazione. Queste tre proposizioni sono tali che ognuna di esse porta per conseguenza le altre due; vedremo infatti tra breve che dalla proposizione ora stabilita si può dedurre il teorema dei due retti.

Osserviamo finalmente che l'aver dimostrato l'unicità della equidistante da una retta *b* passante per un punto assegnato A, non dice affatto che ogni altra retta passante per A debba secare la *b*; possiamo soltanto dire che, *se* vi sono altre rette passanti per A non secanti la *b*, esse non sono equidistanti dalla *b*: ossia per ora abbiamo dimostrato la *unicità* della retta equidistante; e nulla sappiamo della *unicità* della non secante.

3. Valgono per le rette equidistanti alcuni teoremi analoghi a quelli valevoli per le rette parallele di Euclide.

TEOREMA: *Se una retta ne incontra altre due e forma con esse angoli alterni interni eguali esse sono equidistanti.*

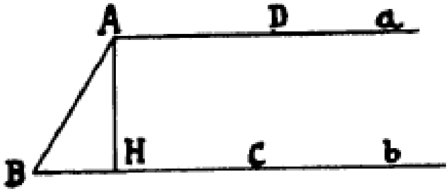


Fig. 39

Siano *a* e *b* (fig. 39) le due rette incontrate dalla trasversale AB, e siano gli angoli alterni interni eguali. Ne segue che gli angoli coniugati interni sono supplementari. Se questi angoli sono anche eguali, ossia se sono retti, le *a* e *b* sono perpendicolari entrambe alla AB, e per il teorema precedente sono equidistanti. Se i due angoli sono diseguali ed è per esempio $\widehat{DAB} > \widehat{ABC}$, sarà DAB un angolo ottuso ed ABC acuto. Abbassando da A la perpendicolare AH alla *b*, il piede H è situato rispetto a B dalla parte dell'angolo acuto perché un triangolo non può avere più di un angolo retto od ottuso, e, siccome anche l'altro angolo BAH del triangolo rettangolo ABH è acuto, ne segue che la AH divide l'angolo ottuso BAD in due parti.

Si ha per ipotesi: $\widehat{ABH}+\widehat{BAD}=2$ retti e quindi: $\widehat{ABH}+\widehat{BAH}+\widehat{HAD}=2$ retti ma $\widehat{ABH}+\widehat{BAH}=$ un retto per il teorema dei due retti: quindi $\widehat{HAD}=$ un retto; e le *a* e *b* perpendicolari alla AH sono due rette equidistanti.

Nota: lo stesso accade se la AB forma con le *a* e *b* angoli corrispondenti eguali, angoli alterni esterni eguali ecc.

TEOREMA INVERSO: *Se una trasversale seca due rette equidistanti, forma con esse angoli alterni interni eguali, angoli alterni esterni eguali, ecc.*

Supponiamo che la AB (fig. 39) tagli le due rette equidistanti *a* e *b*. Se fosse perpendicolare ad una di esse sappiamo che lo sarebbe anche all'altra ed il teorema sussisterebbe. Se non lo è formerà con la *a* angoli adiacenti diseguali; sia p.e. BAD ottuso. Condotta da A la perpendicolare comune alle due rette *a, b* essa divide BAD, e nel triangolo rettangolo BAH l'angolo ABH risulta complementare di $\widehat{BAH}$;

$$\widehat{HBA}+\widehat{BAH}=\text{un retto}$$

e quindi

$$\widehat{HBA}+\widehat{BAH}+HAD=2\,\text{retti}$$

e

$$\widehat{HBA} + BAD = 2 \text{ retti}$$

I due angoli coniugati interni sono dunque supplementari; e quindi gli alterni interni sono eguali ecc.

Nota: non è però dimostrato che se due rette sono equidistanti ogni secante della prima *deve* secare anche la seconda; perciò non si può ancora risolvere p.e. il problema dell'applicazione semplice nel caso generale.

4. Diventa ora possibile la dimostrazione del teorema dei due retti attribuita da Eudemo ai pitagorici, dimostrazione alla quale si riferisce il passo della *Metafisica* di Aristotele.

Condotta per il vertice A di un triangolo ABC (fig. 1) la equidistante dal lato opposto BC, per l'eguaglianza degli angoli alterni interni di vertici A e B, ed A e C il teorema si dimostra nel modo ben noto.

Naturalmente questa semplice dimostrazione è per noi un cavallo di ritorno. Lo era anche per i pitagorici cui Eudemo attribuisce la dimostrazione? Lo era anche per Aristotele? Se non lo era, ossia se non si basava sopra il teorema delle rette equidistanti, derivante dal teorema dei due retti, doveva necessariamente basarsi sopra questa proprietà delle rette equidistanti ammessa per postulato o dedotta da un postulato equivalente; ma rimarrebbe con ciò inesplicabile la esistenza dell'antica dimostrazione del teorema dei due retti menzionata da Eutocio. Comunque questa dimostrazione si basa sopra le proprietà delle rette equidistanti, e vale quindi sia che si accetti o non si accetti o non si usi il postulato di Euclide. La equidistante è una non secante, che a differenza delle altre eventuali non secanti (o parallele secondo la definizione di Euclide) gode delle proprietà vedute, e consente perciò la dimostrazione del teorema dei due retti.

I pitagorici antichi, per le ragioni che abbiamo veduto, non ammettevano né il postulato di Euclide né un postulato sopra le rette equidistanti come quello del Severi. Se, come crediamo, pervennero al concetto delle rette equidistanti, si fu come conseguenza del teorema dei due retti da essi dimostrato con la ignota dimostrazione in tre tempi, e non viceversa. A meno che non si voglia supporre che in un certo momento una parte dei pitagorici abbia creduto di poter prendere come punto di partenza il concetto delle rette equidistanti, e di trarne la dimostrazione del teorema dei due retti al posto dell'antica dimostrazione.

Dopo Euclide, ricorsero al concetto delle rette equidistanti Poseidonio e Gemino con lo scopo di eliminare il postulato di Euclide; ed altri tentativi furono fatti come è noto in seguito, ma sempre in modo non rigoroso, perché, come il Saccheri ha dimostrato, l'ammettere che delle rette equidistanti esistano effettivamente è da considerare come un nuovo postulato[79]. Esso è il postulato del Severi, equivalente alla proposizione Saccheri, ed al nostro postulato pitagorico della rotazione.

---

79 GIOVANNI VAILATI, *Di un'opera dimenticata del P. Girolamo Saccheri*, in *Scritti*, 1911, pag. 481.

Per noi è un teorema perché è conseguenza del teorema dei due retti, a sua volta conseguenza del postulato della rotazione.

Per le ragioni vedute è certo che gli antichi pitagorici non ammettevano, ma dimostravano, la proposizione Saccheri, e la dimostravano in un modo che non è verosimile derivi da un postulato delle rette equidistanti o dal concetto stesso di rette equidistanti; mentre è per lo meno possibile che la dimostrazione si basasse sopra un postulato come quello della rotazione.

Se ammettevano questo postulato, non solo ne potevan dedurre il teorema dei due retti, e quello di Pitagora, ma anche tutte le scoperte loro attribuite da Proclo-Eudemo, ed inoltre la teoria delle equidistanti e, di rimando, la dimostrazione del teorema dei due retti attribuita ad essi da Eudemo.

5. TEOREMA: *Se una trasversale incontra due rette equidistanti e da un punto di una di esse si conduce la retta equidistante dalla trasversale, essa incontra anche l'altra.*

Sia *m* la trasversale delle due rette equidistanti *a* e *b* (fig. 40), e sia P il punto assegnato sopra la *a*. Congiungiamo B con P, e prendiamo sulla *b* il segmento BQ = AP situato rispetto alla *m* dalla parte di P. La BP forma con le *a* e *b* angoli alterni interni eguali; quindi i triangoli APB, QBP vengono eguali per il 1° criterio; perciò anche $A\widehat{P}B = BPQ$ e la *m* e la PQ risultano equidistanti. E siccome sappiamo che per P passa una sola retta equidistante dalla *m*, essa coincide con la PQ; dunque la equidistante dalla *m* condotta per P punto della *a* incontra anche la *b* nel punto Q.

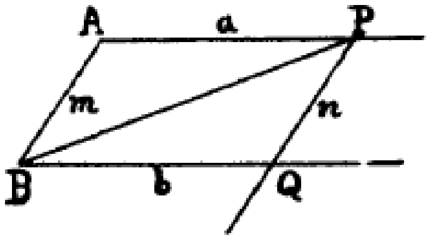


Fig. 40

Osservazione: il quadrilatero ABQP è un romboide. Viceversa, se ABPQ è un romboide, siccome una diagonale fa coi lati opposti angoli alterni interni eguali, essi sono equidistanti. Dunque nel romboide e nel rombo i lati opposti sono equidistanti.

Questa distanza costante si chiama *altezza* del romboide.

TEOREMA: *Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la retta equidistante da uno degli altri due lati essa incontra il terzo lato nel suo punto medio.*

Per il punto medio M del lato AB (fig. 41) del triangolo ABC conduciamo la retta equidistante dalla BC. Tutti i punti della BC stanno da una stessa parte rispetto ad essa; i punti A e B stanno da parte opposta rispetto ad essa, e quindi anche i punti A e C stanno da parte opposta, e quindi il segmento AC è tagliato in un suo punto N da questa retta. Completiamo il romboide che ha per lati consecutivi MN, MB; il lato NP di questo romboide è equidistante dalla AB e lascia, il punto C e la AB da parti opposte; quindi il vertice P compreso tra B e C. Siccome PN = BM = AM, ed è $M\widehat{AN} = PNC$ perché corrispondenti rispetto alle equidistanti AB, PN, e $A\widehat{MN} = NPC$ per ragione analoga, i triangoli AMN, NPC risultano eguali e quindi AN = NC, ossia N è il punto medio di AC.

Naturalmente per la stessa ragione P è il punto medio di BC e si ha

$$MN = BP = PC = \frac{1}{2} BC$$

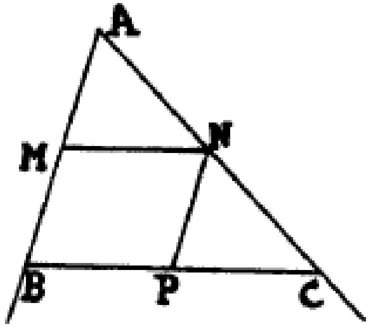


Fig. 41

TEOREMA INVERSO: *La congiungente i punti medii di due lati di un triangolo è equidistante dal terzo lato ed è eguale alla metà di esso.*

Si dimostra per assurdo, come conseguenza della unicità della equidistante dalla BC passante per M, e della unicità del punto medio M.

Come conseguenza di questi teoremi se ne possono dimostrare degli altri sul fascio delle rette equidistanti, sul trapezio, ecc.; si può risolvere il problema della divisione di un segmento in un numero assegnato di parti eguali; si può dimostrare che le tre mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto ecc.[80]

Ci limiteremo al seguente teorema di cui abbiamo bisogno.

TEOREMA: *Se sul prolungamento di un lato di un triangolo si prende un segmento eguale al lato, e per l'estremo del segmento si conduce la retta equidistante da uno degli altri due lati essa incontra il prolungamento del terzo lato.*

Sia AMN il triangolo dato; prendiamo sul prolungamento di AM il segmento MB = AM; e sul prolungamento di AN il segmento NC = AN. Uniamo B con C. Per il teorema precedente la MN e la BC sono equidistanti. Dunque la equidistante dalla MN passante per B incontra il prolungamento della AN nel punto C.

6. Vogliamo ora dimostrare la proprietà, fondamentale che per un punto assegnato A esterno ad una retta data *b* si può condurre una sola retta che non la seca.

---

80 In modo simile a questo si può sviluppare la teoria delle rette e dei piani equidistanti e la teoria dei piani equidistanti. Avremmo potuto premettere questi sviluppi, ottenendo poi con il loro sussidio molte semplificazioni in varie questioni che abbiamo trattato, ma con un po' di pazienza si è potuto fare a meno anche di essi.

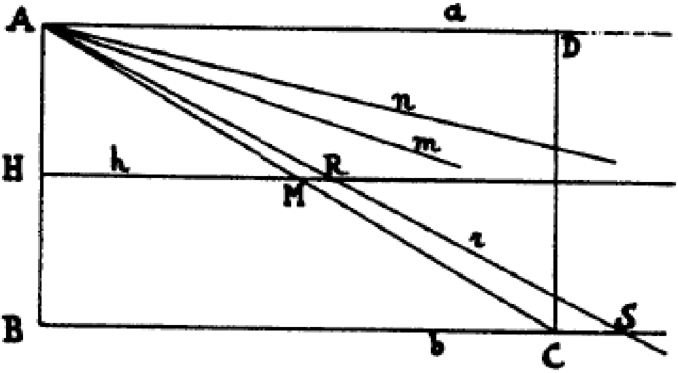


Fig. 42

Dal punto A (fig. 42) conduciamo la perpendicolare alla *b* e sia B il piede; e dal punto A conduciamo la *a* perpendicolare alla AB. Sappiamo che la *a* e la *b* entrambi perpendicolari alla AB non si possono incontrare. Si tratta di dimostrare che ogni altra retta passante per A e distinta dalla *a* è una secante della *b*.

Supponiamo se è possibile che ciò non accada.

Vi sarà allora, oltre alla *a*, almeno un'altra retta *m* che passa per A e non incontra la *b*. Il punto A divide la *m* in due semirette situate da parti opposte della *a*; consideriamo la semiretta *m* che rispetto alla *a* è situata dalla parte del punto B, ossia della *b*, ossia della striscia di lati *a* e *b*. E consideriamo le semirette *a* e *b* situate rispetto alla AB dalla stessa parte della semiretta *m*. La *m* è una delle semirette di origine A e comprese nell'angolo $\widehat{BAa}$ delle semirette AB ed *a*, la quale per ipotesi non incontra la *b*. Oltre a questa semiretta ve ne possono essere altre di origine A che non incontrano la semiretta *b*; anzi ve ne sono di sicuro e sono tutte le semirette di origine A e comprese nell'angolo $\widehat{ma}$, perché se una di esse p.e. la *n* incontrasse la *b* in un punto N, siccome la semiretta *m* sarebbe interna all'angolo BAN del triangolo ABN e lascerebbe quindi i punti B ed N da parti opposte dovrebbe segare il segmento BN contrariamente alla ipotesi fatta sulla *m*. Perciò ogni retta *n*, interna all'angolo $\widehat{mAa}$, , è dunque una non secante se la *m* è una non secante.

D'altra parte, dall'origine A escono sicuramente oltre alla AB delle semirette comprese in $\widehat{BAa}$ e secanti la *b*. Una di queste è ad esempio quella che forma con la AB l'angolo di 60° e con la *a* quello di 30°; preso, infatti, a partire da A su questa semiretta il segmento AC = 2AB, e congiunto B con C e con il punto medio M di BC, il triangolo isoscele BAM avendo l'angolo al vertice BAM di 60° è equilatero; quindi il triangolo MBC è isoscele e l'angolo ABC è retto, il che significa che il punto C della AM sta sulla *b*, ossia che la AM è una secante della *b*. Naturalmente tutte le semirette per A interne a BAC sono delle secanti della semiretta *b*.

D'altra parte, le semirette del fascio di centro A comprese tra la semiretta AB e la semiretta *a* o sono secanti della semiretta *b* oppure sono non secanti della *b*. Alla classe delle secanti appartiene la AB, la AC e tutte le semirette comprese entro l'angolo $\widehat{BAC}$; e vi appartengono inoltre certamente anche una parte delle semirette di origine A ed interne all'angolo $\widehat{CAa}$; basta infatti prendere un punto S qualunque sul prolungamento del segmento BC dalla parte di C, e la semiretta di origine A, passante per S, è compresa nell'angolo $\widehat{CAa}$ ed è una secante della semiretta *b*. Alla classe delle non secanti appartiene la *a* di sicuro, la *m* per ipotesi, e come abbiamo veduto anche tutte le semirette di origine A ed interne ad $\widehat{mAa}$.

La classe delle semirette di origine A e *secanti* la semiretta *b* costituisce un insieme ordinabile, perché è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della semiretta *b*. Ordinandole effettivamente in corrispondenza sarà la AB la prima semiretta secante seguita ordinatamente dalle altre; e poiché non esiste l'ultimo punto della semiretta *b* così non esiste l'ultima semiretta di origine A secante della *b*; ossia dopo una secante qualunque della *b* nel fascio ordinato delle semirette di centro A ve ne sono delle altre.

Premesse queste considerazioni, conduciamo dal punto C la perpendicolare comune alle rette *a* e *b*. Le semirette di origine A che seguono la AB e precedono la AC sono in corrispondenza biunivoca con punti del segmento BC; le semirette che seguono la AC analogamente sono in corrispondenza biunivoca con i punti del segmento CD, dimodoché le semirette del fascio di centro A comprese tra la AB e la *a* sono in corrispondenza biunivoca con i punti della spezzata ortogonale ABC, estremi compresi. La AB è la prima delle semirette secanti, la *a* l'ultima delle non secanti la *b*.

Facciamo a questo punto una osservazione: La corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento BC e le semirette dell'angolo convesso BAC che proietta il segmento da un punto A fuori della retta BC, permette di ordinare l'insieme delle semirette dell'angolo $\widehat{BAC}$.

Per dedurre dalla ordinabilità della retta la possibilità di ordinare le semirette di un fascio, il Severi[81] nota che occorre prima introdurre il postulato delle parallele, e poi nella corrispondenza escludere dal fascio una delle semirette. Tale duplice necessità scompare se, invece di ordinare le semirette in corrispondenza con i punti di una retta, si può ordinare le semirette in corrispondenza con i punti del perimetro di un rettangolo le cui diagonali passino per A, e la corrispondenza è completa, nessuna semiretta esclusa.

Naturalmente per fare questo bisogna conoscere i rettangoli indipendentemente dal postulato delle parallele, cosa che si verifica appunto nello sviluppo di questa nostra geometria pitagorica.

Stabilita in questo modo la ordinabilità dell'insieme delle semirette del fascio di centro A comprese tra la AB e la AD, e stabilito il verso di tale ordine; ed osservato che tali semirette sono necessariamente secanti o non secanti della semiretta *b*, che ogni semiretta che precede una secante è anche essa una secante ed ogni semiretta che segue una non secante è anche essa una non secante, osserviamo ancora che come non esiste l'ultima delle se-

---

81 Severi, *Elementi di geometria*, vol. I, pag. 177.

mirette secanti la *b* così da un punto di vista puramente logico si potrebbe pensare che non esista o possa non esistere la prima delle semirette non secanti la *b*; ossia che data una semiretta qualunque non secante la *b* se ne possano sempre trovare delle altre pure non secanti le quali la precedano.

L'intuizione però osserva che partendo dalla posizione iniziale AB, od anche AC, e girando intorno ad A sino ad arrivare alla posizione finale *a*, la semiretta che era una secante è divenuta alla fine una non secante. Se la metamorfosi non si è verificata proprio al momento finale per la semiretta *a*, dovrà essersi verificata ad un certo momento per una posizione intermedia, prima della quale la semiretta si era mantenuta sempre ancora secante e dopo la quale si è mantenuta sempre ancora non secante. Insomma è intuitivamente evidente che esiste una ed una sola semiretta che è la prima delle non secanti; e tutto si riduce a mostrare che tale prima non secante non è altro che la *a*.

Da un punto di vista logico si presenta corrispondentemente la necessità di ricorrere ad un postulato; ed era naturale e prevedibile che questo dovesse accadere, altrimenti il postulato della rotazione pitagorica (o l'equivalente proposizione Saccheri) sarebbe stato equivalente al postulato di Euclide; soltanto che non si tratta del postulato di Archimede ma di un caso assai più semplice del postulato di continuità. Bisogna ammettere come postulato la esistenza di una semiretta di separazione delle due classi di semirette secanti e non secanti la *b*; verità talmente evidente all'intuizione da presumere che agli occhi degli antichi dovesse costituire un dato di fatto, una verità primordiale tanto assiomatica da non sentire neppure il bisogno di postularla esplicitamente. Invero, se Euclide non ha sentito il bisogno di postulare il postulato di continuità nei due casi che abbiamo a suo tempo espressamente notato, sarebbe strano credere o pretendere che ciò sia o debba essere avvenuto in un caso perfettamente analogo, e questo due secoli prima di Euclide quando Pitagora per primo faceva della geometria una scienza liberale.

7. Ammettiamo dunque esplicitamente il *postulato* che vi è almeno una semiretta di origine A che separa le semirette di origine A e secanti la *b* da quelle non secanti la *b*.

Sappiamo che non può essere una secante quindi sarà necessariamente una non secante. Inoltre si riconosce subito, per assurdo, la sua unicità. Essa è dunque la *prima* non secante. Noi intendiamo mostrare che nessuna semiretta del fascio A distinta dalla *a* può essere la *prima* non secante, dimodoché la *a* è come sappiamo non secante, ed è la prima e l'unica.

Premettiamo un'osservazione:

se per il punto medio H di AB (fig. 42) si conduce la perpendicolare *h* ad AB (asse di AB ed equidistante dalla *a* e dalla *b*), ogni semiretta per A che sega la *h* sega anche la *b*. Se infatti la *r* sega la *h* in R, essendo HB eguale ad AH la *b* equidistante dalla HR sega come sappiamo la *r*, perciò una semiretta per A che non seghi la *b* non può segare neppure la *h*; in particolare la prima semiretta che non sega la *b* non può segare la *h* ed è quindi contenuta nella striscia *ah*.

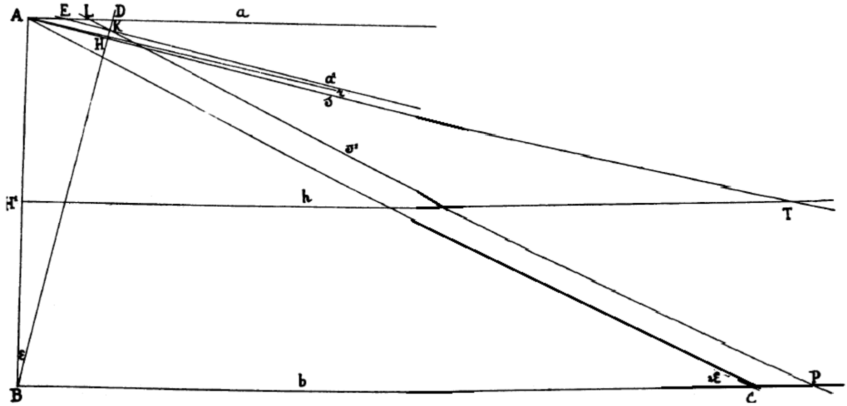
Dimostriamo adesso il

TEOREMA FONDAMENTALE: *Per un punto non appartenente ad una retta data passa una ed una sola retta che non la seca.*

Sia (fig. 43) A il punto dato e *b* la retta data. Si conduce da A la perpendicolare AB alla retta data, e sia B il piede. Poi da A la semiretta *a* perpendicolare alla AB dalla stessa parte della semiretta *b* e per il punto medio H di AB la semiretta *h* perpendicolare ad AB sempre dalla stessa parte delle *a* e *b*.

Supponiamo se è possibile che la semiretta *r* che forma con la semiretta a un certo angolo δ (con $\delta \neq 0$) sia una non secante *qualunque* della *b* (eventualmente anche la prima). Allora la prima non secante, ossia la semiretta di separazione delle secanti dalle non secanti di cui abbiamo ammessa l'esistenza, non può seguire la *r*, e perciò o coincide con la *r* o precede la *r*, ossia la semiretta di separazione deve formare con la *a* un angolo $\varepsilon \geq \delta$ dove per altro è certamente $\varepsilon < 30°$. Sia essa la *s*.

Condotta allora per A la semiretta che forma con la semiretta *a* l'angolo 2ε essa sega la *b* in un punto C. Conduciamo per B la perpendicolare alla *s* e sia H il piede. Dovendo essere acuto l'angolo HAB del triangolo rettangolo AHB, il piede H sta sulla semiretta *s*, e l'angolo ABH = ε.



F 45

Siccome la BH fa con la BA un angolo ε 30° e quindi anche minore di 60°, essa incontra certamente la semiretta *a* in un punto D. Ciò risulta anche dal fatto che la *s* è tutta compresa nella striscia *ha*, perché la *s* non incontrando la *b* non incontra neppure la *h*, quindi B ed H sono da parti opposte della *h*, BH incontra la *h*, e quindi anche la *a*.

Si ha subito: BD > BA > BH.

Preso perciò BK eguale a BA, sarà il punto K compreso tra H e D. Facendo ruotare la figura intorno a B dell'angolo ε in modo che A vada su K, BA va su BK e la *a*, perpendicolare alla BA in A, va sulla *a*' perpendicolare alla BK in K.

La *a*' e la *s*, perpendicolari entrambi alla BD sono equidistanti, e poiché K è compreso tra H e D, D e la *s* stanno da parti opposte rispetto alla *a*', e quindi anche D e A; perciò il segmento AD è tagliato in un suo punto E dalla *a*'.

Con la rotazione la *s* va sulla *s*' che passa per K e forma con *a*' l'angolo ε penetrando perciò nell'angolo retto $\widehat{EKD}$ ed incontrando il segmento ED in un punto L.

La DA forma con le rette equidistanti *a*' ed *s* angoli corrispondenti $\widehat{DEK}$, DAH eguali; quindi $\widehat{DEK}=\varepsilon$, il triangolo LEK è isoscele e perciò l'angolo esterno $\widehat{DLK}=2\varepsilon$.

Prendiamo ora sul prolungamento di BC il segmento CP = AL, ed uniamo P con L. I triangoli ALC, PCL hanno LC in comune, AL = CP e l'angolo compreso eguale perché la trasversale CL forma con le due rette equidistanti *a* e *b* angoli alterni interni eguali; perciò $\widehat{ALP}=\widehat{ACP}$, e quindi $\widehat{PLD}=\widehat{ACB}=2\varepsilon$. Dunque tanto la PL come KL formano con la AD un angolo eguale a 2ε; perciò le semirette LK ed LP coincidono, ossia i tre punti L, K, P sono allineati, ossia la *s*' incontra la *b*.

Il triangolo PBK è isoscele avendo gli angoli alla base complementari di ε, il suo vertice P sta quindi sull'asse di BK. Facendo ruotare tale triangolo intorno a B di E in modo da riportare la base BK su BA, il suo asse va sulla *h*, la *s*' torna sopra la *s*, ed il punto P della *s*' va sopra la *h*. La *s* incontra dunque la *h* in un punto T. Preso ora sul prolungamento di AT un segmento TV = AT il punto V della *s* appartiene alla *b*.

Dunque la *s* è una secante della *b*.

Conclusione: la prima non secante *s* non può formare con la *a* un angolo $\varepsilon \geq \delta$; ma abbiamo veduto che non può formare con la *a* neppure un angolo minore di δ; quindi se esistesse una prima non secante la *b* distinta dalla *a* dovrebbe soddisfare alla condizione di formare con la *a* un angolo che non dovrebbe esser né maggiore, né eguale né minore dell'angolo S formato con la *a* da una non secante qualunque *r*. Ne segue che, essendo impossibile soddisfare tali condizioni, tale prima non secante distinta dalla *a* non esiste; e quindi la *a* è una non secante della *b*, è la prima ed è l'unica tra tutte le semirette di origine A e comprese tra la AB e la *a*, che non seca la *b*.

Questa dimostrazione si può facilmente trasformare in modo da fare a meno del movimento di rotazione attorno al punto B.

Concludiamo che, ammettendo il postulato pitagorico della rotazione, o l'equivalente teorema dei due retti (proposizione Saccheri) o l'equivalente postulato del Severi sopra le rette equidistanti, si può dimostrare il postulato di Euclide, sia ricorrendo al postulato di Archimede, sia facendo a meno di ricorrere al postulato di Archimede, ed ammettendo soltanto la esistenza di quella semiretta di separazione delle secanti dalle non secanti che alla intuizione degli antichi doveva apparire indiscutibile.

8. Dimostrato il postulato di Euclide si rientra naturalmente nell'alveo della geometria euclidea non archimedea; ed il nostro compito è finito.

A noi interessava difatti la restituzione della geometria pitagorica, non in quanto collimava con la geometria euclidea, ma in quanto ne differiva. Che ne differisse sostanzialmente lo prova la esistenza di quella arcaica dimostrazione del teorema dei due retti che non poteva essere basata sopra le proprietà degli angoli alterni interni.

Per ottenere questa dimostrazione abbiamo ricorso alla supposizione che i pitagorici ammettessero il postulato pitagorico della rotazione che abbiamo enunciato, ed abbiamo veduto che ne segue immediatamente il teorema dei due retti nel primo caso particolare menzionato da Eutocio, poi negli altri casi, ed abbiamo veduto che di lì si trae senz'altro il teorema di Pitagora, e si può con successivi sviluppi arrivare a tutte le scoperte attribuite ai Pitagorici. Fatto questo, e sempre senza introdurre il concetto di parallele e il relativo postulato, abbiamo potuto pervenire alla teoria delle rette equidistanti, la quale consente da sola la più recente dimostrazione del teorema dei due retti riportata da Aristotele ed attribuita da Eudemo ai pitagorici.

Sappiamo bene quali obbiezioni si possono sollevare all'adozione del postulato pitagorico della rotazione, che presuppone il concetto di *movimento rigido* del piano, e la capacità di riconoscere l'eguaglianza delle figure per sovrapposizione. Ma questo è un problema teorico del quale non ci interessiamo; a noi interessa invece vedere se i pitagorici possono avere adottato esplicitamente o no questo postulato della rotazione.

Come riprova del fatto che essi non ammettevano il postulato delle parallele, definite come in Euclide, abbiamo addotto la ragione che per i pitagorici il concetto di infinito si identificava con quello di imperfetto. Ora, per una ragione analoga, da un punto di vista pitagorico, si potrebbe obbiettare che essi non potevano accettare o basarsi neppure sopra il concetto di movimento. Infatti nella serie delle opposizioni pitagoriche, come il concetto di finito e perfetto si oppone al concetto di infinito ed imperfetto, così, corrispondentemente, il concetto di immobilità si oppone a quello di movimento. Questa è per noi una obbiezione assai più seria dell'altra.

Seguendo una pura norma di coerenza schematica, sia il concetto di infinito sia quello di movimento avrebbero dovuto essere banditi. Ma dobbiamo tenere presenti i legami che avvincevano le concezioni geometriche dei pitagorici a quelle cosmologiche; e se «nessuno ha mai veduto due rette parallele nel senso anzi detto, due rette cioè che prolungate indefinitamente non si incontrano mai»[82], viceversa chiunque vede e sa per esperienza che il movimento è un carattere essenziale della vita umana ed universale. Gli astri, ossia gli Dei, si movevano eternamente nelle loro danze celesti. E secondo i pitagorici, il movimento circolare era quello perfetto, forse non soltanto per la sua regolarità e semplicità, ma anche per il fatto che il centro e l'asse di rotazione restavano im-

---

82 GIUSEPPE VERONESE, *Appendice agli elementi di geometria*, Padova, 1898, pag. 23.

mobili e partecipi della perfezione. L'ammettere dunque che una retta del piano situata ad una qualsiasi distanza finita dal centro di rotazione ruotasse anche essa, era ammettere quanto sembrava verificarsi nell'universo con la rotazione intorno alla terra od al fuoco centrale od al sole (Aristarco di Samo), ed ammettere che l'angolo del raggio vettore iniziale con la sua posizione finale fosse eguale all'angolo delle posizioni iniziale e finale della retta, era ammettere un fatto conforme alla intuizione e verificato dalla esperienza nel campo raggiungibile dalla nostra osservazione.

Dice il Veronese[83] «che fa veramente onore ad Euclide di avere fatto senza del movimento dove ha potuto, poiché nei suoi *elementi* è chiara la tendenza di evitarlo per quanto gli è stato possibile». Se dunque Euclide, pur reluttante, fa uso del movimento, prima di lui se ne doveva fare uso ancora maggiore, ed abbiamo così una riprova che i pitagorici ne facevano uso senza tanti scrupoli e che quindi potevano benissimo anche servirsi di un postulato relativo al movimento di rotazione come quello che abbiamo enunciato. Con il tempo il punto di vista pitagorico che legava intimamente tra loro le varie scienze venne tenuto sempre meno presente, accentuandosi la tendenza a fare della geometria una scienza separata, puramente logica; ed Euclide, ammettendo il suo postulato, raggiungeva il doppio scopo di liberarsi sempre più dal concetto di movimento e di procurarsi un

83 G. VERONESE, *Appendice agli elementi* etc., pag. 38.

mezzo comodo e rapido per risolvere difficoltà che altrimenti si possono superare solo con molto maggiore pazienza e lavoro. In compenso introdusse il suo postulato che non ha mai soddisfatto nessuno e che D'Alembert chiamava «lo scoglio e lo scandalo della geometria».

9. Ricapitolando, consideriamo due semirette *a* e *b* perpendicolari da una stessa parte in due punti A e B ad una stessa retta AB. Esse non si incontrano; e ciò risulta dal solo fatto che da un punto qualunque del piano si può condurre una sola perpendicolare ad una retta data.

In secondo luogo, se si ammette il postulato pitagorico della rotazione o la proposizione Saccheri, si ha che queste rette sono anche equidistanti[84].

In terzo luogo, se si ammette anche il postulato di Archimede oppure il caso particolare del postulato di con-

---

84 In precedenza, supponendo noto che due rette perpendicolari in punti distinti ad una stessa retta non possono incontrarsi, ne abbiamo dedotto che una retta *r* con una rotazione di mezzo giro intorno ad un punto O esterno ad essa prende una posizione tale che la *r* ed *r*' non si incontrano. Questo fatto, per altro, non è che una conseguenza del postulato pitagorico della rotazione. Di fatti, con tale rotazione un punto A della *r* va sul simmetrico A' di A rispetto ad O; ed A' non appartiene alla *r* perché altrimenti anche O dovrebbe appartenere alla *r*. D'altra parte, se le *r* ed *r*' avessero in comune un punto P, dovrebbero per il postulato pitagorico formare un angolo di 180°, ossia coincidere, e questo non può accadere perché A' della *r*' non appartiene alla *r*: quindi esse non si incontrano.

tinuità che noi abbiamo adoperato, si ha che la semiretta *a* è l'unica semiretta di origine A che non seca la *b*.

Torniamo dopo ciò ad esaminare la questione della seconda dimostrazione pitagorica del teorema dei due retti. Secondo Proclo, Eudemo direbbe testualmente così: «Sia il triangolo αβγ e si conduca per α la parallela alla βγ... (καὶ ἤθω διὰ τοῦ ᾶ τῇ βγ παράλληλος ἡ)».

Qui appare il termine parallela e l'articolo determinativo ἡ ne implica la riconosciuta unicità; ma, anche ammettendo che Proclo abbia riportato di peso la dizione usata da Eudemo, resta a vedere se Eudemo adoperava il termine parallela nella accezione attribuita ad esso dalla posteriore definizione di Euclide, e resta a vedere se la nozione della unicità di questa retta proveniva anche in Eudemo dall'accettazione di un postulato come quello ammesso poi da Euclide.

Aristotele nel passo della Metafisica in cui si riferisce a questa stessa dimostrazione conduce anche lui per il vertice α la retta che serve alla dimostrazione, ma non la chiama né parallela, né equidistante, né non secante; egli dice semplicemente: εἰ οὖν ἀνῆκτω ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ossia: se si conduce la [retta] di fianco [o di fronte] al lato...

Anche in questo passo l'articolo ἡ mostra che tale retta è ritenuta unica, ma anche qui non è definita in nessun modo e non si sa di dove derivi questa sua unicità.

L'etimologia evidente della parola parallela non dà in proposito nessuna luce; il termine è adoperato in astronomia per i paralleli della sfera celeste; ed è usato nel linguaggio ordinario da Aristotele, come poi ad esempio da Plutarco nelle "*vite parallele*".

Dal linguaggio ordinario è passato poi al linguaggio geometrico, ma quando e con quale precisazione non risulta. Aristotele lo usa tre volte nella *Analitica*, come termine geometrico, e sentenzia che coloro i quali si sforzano di descrivere le parallele commettono una petizione di principio.

Così come stanno le cose il passo di Eudemo e quello del suo maestro Aristotele non provano affatto che la dimostrazione posteriore dei pitagorici si basasse sopra una definizione delle parallele e sopra un relativo postulato eguali alla definizione ed al postulato di Euclide. E non è da escludere che questa retta fosse *la* equidistante, e fosse chiamata *la parallela*, e fosse ritenuta unica non secante semplicemente per non essere ancora sorto il dubbio che oltre alla equidistante vi potessero essere anche altre rette non secanti. In tal caso il dubbio sarebbe sorto dopo, ed Euclide lo avrebbe eliminato d'autorità introducendo il suo postulato. In tal caso la dimostrazione di Aristotele sarebbe corretta se quella tal retta condotta per il vertice del triangolo si intende che sia equidistante, e sarebbe scorretta se concepita come parallela ne fosse supposta senza base la unicità; mentre invece quella di Eudemo sarebbe corretta se con il termine di parallela si intende la equidistante (la cui unicità e le cui proprietà i pitagorici potevano desumere dal teorema dei due retti) e sarebbe scorretta se designasse una parallela nel senso euclideo e non si fosse ammesso o dimostrato il postulato di Euclide.

Comunque i due passi, di Aristotele e di Eudemo, non provano che i pitagorici posteriori dessero del teorema dei due retti una dimostrazione identica a quella di Euclide. Se, come ci sembra, questa dimostrazione pitagorica posteriore si basava sopra le proprietà delle rette equidistanti, sia pure chiamandole parallele, anche questa dimostrazione era indipendente da quel concetto di rette che prolungate all'infinito non si incontrano mai e da quel postulato di Euclide, che vanno così poco d'accordo con la concezione pitagorica.

Notiamo in fine che nella dimostrazione che abbiamo dato della unicità della non secante non si presenta la necessità di prolungare la retta all'infinito e quindi anche essa quadra con la concezione pitagorica. E notiamo ancora che, anche se non si vuole accordare che la geometria pitagorica si basasse sopra il nostro postulato pitagorico della rotazione, la dimostrazione del «postulato» di Euclide che abbiamo esposto si può fare egualmente, se si ammette la proposizione Saccheri od il postulato del Severi. E siccome i pitagorici conoscevano certamente il teorema dei due retti indipendentemente dal postulato delle parallele, risulta così manifesto che essi potevano dal teorema dei due retti e senza postulato di Archimede arrivare a dimostrare la unicità della non secante. La questione non trascendeva i loro mezzi, né certamente l'intelligenza di quei così detti «primitivi».

10. La trasformazione del postulato di Euclide in teorema è un risultato secondario di questo nostro studio. Ed esula dal carattere di questo studio, né ci presumiamo da tanto, il giudicare se l'assetto euclideo della geometria sia, da un punto di vista teorico moderno, preferibile all'antico assetto che abbiamo cercato di ricostituire. Naturalmente tutti i postulati sono comodi; e, tagliando il nodo gordiano delle parallele con la spada del postulato di Euclide, le cose si semplificano. Ma dovendo scegliere tra il V postulato ed il postulato pitagorico della rotazione quale dei due è meno ostico? Quale dei due è meno restrittivo? L'apprezzamento in queste cose è anche un po' personale, e noi lasciamo che ognuno scelga secondo i suoi gusti.

A noi interessa constatare che il postulato pitagorico della rotazione consente di dimostrare il teorema dei due retti e quello di Pitagora indipendentemente dal postulato e dalla teoria delle parallele in un modo che ha tutta l'aria di essere l'antico, e consente da solo di ottenere tutto lo sviluppo della geometria pitagorica; e non ci consta che sinora si sia trovato un modo, non soltanto più soddisfacente, ma un modo qualunque, di raggiungere lo stesso risultato. Il postulato di continuità al quale abbiamo ricorso è servito soltanto per risolvere l'ultima questione, quella di dimostrare il «postulato» di Euclide in modo non trascendente le possibilità dei pitagorici.

11. Una volta introdotto, come postulato, il V postulato di Euclide, la proprietà enunciata dal postulato pita-

gorico della rotazione viene a perdere ogni importanza. Non meraviglia quindi il non trovarne alcuna traccia superstite. Sarebbe strano che fosse accaduto diversamente quando ogni traccia di dimostrazione pitagorica si è perduta ad eccezione della tarda dimostrazione del teorema dei due retti.

Se la nostra ricostruzione corrisponde al vero, la introduzione del postulato di Euclide dovette sconvolgere profondamente l'assetto della geometria; ed anche questo è conforme alle notizie che abbiamo in proposito, poiché sappiamo che Euclide cambiò l'ordine e le dimostrazioni ed in generale alterò tutto l'assetto della geometria, sicché ad esempio il teorema di Pitagora divenne l'ultimo e ricevette un'altra dimostrazione.

Il favore quasi incontrastato di cui hanno goduto per oltre venti secoli gli «*elementi di Euclide*», aggiungendosi a queste condizioni sfavorevoli alla trasmissione della geometria pitagorica, ha portato alla esaltazione della scuola greco-alessandrina, a tutto scapito della gloria della «Scuola Italica».

Della scuola greca tutto o quasi ci è pervenuto; della nostra scuola, della scuola che aveva creato dalle fondamenta, nulla si è salvato. Un destino avverso sembra essersi accanito contro l'opera vasta ed ardita del grande filosofo. Abbattuto, ad opera della democrazia, il regime pitagorico in Cotrone; disperso l'Ordine e la scuola, le scoperte e le conoscenze vennero combattute, misconosciute, derise e dimenticate. Aristotele, con la sua autorità messa poi al servizio di pregiudizi di altra natura, impedì l'accettazione delle teorie cosmologiche pitagoriche, assicurando per venti secoli il trionfo dell'errata teoria geocentrica; la filosofia, intesa nel senso etimologico e pitagorico della parola, venne occultata nel dilagare delle speculazioni, dei sistemi, delle credenze, del moralismo e del feticismo; e persino l'opera geometrica, che pur doveva avere salde basi, si è perduta a tutto beneficio della scuola greca posteriore.

Per quanto arduo il compito, era, dopo venticinque secoli, l'ora di fare qualche cosa a favore della nostra scuola, riparando per quanto è possibile alla funesta azione del tempo e delle contingenze. Cercare di restituire l'opera geometrica della «Scuola Italica» è stato per noi non soltanto un importante argomento di studio, ma è anche un gradito compito di rivendicazione.

Nel terminare, vogliamo esplicitamente dichiarare che siamo perfettamente coscienti di quanto le nostre modestissime forze siano state inferiori all'impresa ed all'ardire. Vengano quindi altri, facciano di più e meglio, e saremo i primi a rallegrarcene. E così pure, ben inteso, sappiamo benissimo quale rapporto intercede tra noi e Pitagora. Perciò è naturale imputare a noi, e solo a noi, gli errori e le manchevolezze di queste pagine; ma, se vi sono dei meriti, preghiamo i lettori di ascriverli, *non nobis*, ma all'immortale fondatore della nostra scuola. Αὑτὸς ἔφα. Unico nostro merito, se mai, è l'avere saputo prendere direttamente da lui l'inspirazione.

ΤΕΛΟΣ