Progetto Manuzio

Vito Volterra

Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

TRATTO DA: Opere matematiche : memorie e note / Vito Volterra ; pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche; 5: 1926-1940 / Vito Volterra ; corredato dall'Elenco cronologico generale delle pubblicazioni - Roma : Accademia nazionale dei Lincei, 1962. - 538 p. : ill. ; 27 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
  0: affidabilità bassa

1: affidabilità media
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

REVISIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

VII.

ALCUNE OSSERVAZIONI SUI FENOMENI EREDITARI

«Rend. Accad. dei Lincei», ser. 6ª, vol. IX_1, 1929; pp. 585-595.

I.

1. In una recente Memoria pubblicata nel «Journal de Mathématiques»[1] sono ritornato sopra mie precedenti ricerche ed ho esaminato i fenomeni ereditari dal punto di vista energetico.

Mi permetto ora di aggiungere alcune osservazioni generali sui detti fenomeni portando qualche nuovo contributo al loro studio.

2. Supponiamo che lo stato attuale d'un parametro ρ dipenda dalla storia di un parametro q e la dipendenza sia lineare. La funzione $q(t)$ (t denotando il tempo) individuerà la *storia di q* ossia la storia primitiva, mentre la funzione $\rho(t)$ individuerà la *storia di* ρ ossia la *storia ereditaria*.

Ammetteremo ρ e q funzioni finite e continue e se vorremo considerare la *eredità completa* scriveremo nel

[1] «Journ. de Math.», tome VII, fasc. III, 1928. [In questo volume, IV, pp. 130-169].

caso del ciclo chiuso

$$(1) \qquad \rho(t) = aq(t) + \int_{-\infty}^{t} q(\tau)F(t-\tau)d\tau .$$ [2]

Il *coefficiente di eredità* F(t) sarà una funzione finita e continua e, se q è limitata, lo supporremo, per t = ∞, infinitesimo di ordine superiore ad un numero maggiore dell'unità.

a sarà una funzione continua compresa fra due numeri positivi che potremo supporre sempre ridotta eguale all'unità.

3. Se lo stato del parametro q anteriore ad un certo istante t_0 non influisce sul valore di ρ scriveremo la (1)

$$(A) \qquad \rho(t) = q(t) + \int_{-\infty}^{t} q(\tau)F(t-\tau)d\tau .$$

Questa equazione integrale può risolversi e avremo

$$(B) \qquad q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)G(t-\tau)d\tau$$

ove G è il nucleo coniugato di F, cioè

$$(2) \qquad G = -F + \overset{*}{F}{}^2 - \overset{*}{F}{}^3 + \dots$$ [3].

[2] Volterra, *Sur les fonctions de lignes*, Chap. VII, Paris 1913.

[3] Volterra et Pérès, *Composition et fonctions permutables*, Chap. II, Paris 1924.

In questo caso la eredità si dice *posteriore all'istante* t_0 *e, come la storia primitiva posteriore a* t_0 *individua quella ereditaria*, così, reciprocamente, *questa ultima individua la storia primitiva pure posteriore a* t_0.

L'equazione (A) corrisponderà all'eredità diretta e la (B) a quella inversa.

La eredità sarà *ritardatrice* o *acceleratrice* secondoché il nucleo F è negativo o positivo.

Abbiamo subito i teoremi:

TEOREMA I. – *Se l'eredità diretta è ritardatrice quella inversa è acceleratrice*. Infatti dalla (2) segue che, se F è negativa, G è positiva.

TEOREMA II. – *Se l'eredità diretta è acceleratrice quella inversa non potrà essere anch'essa acceleratrice*.

Infatti dalla (2) segue:

$$\overset{*}{G}\overset{*}{F} = -\overset{*}{F^2} + \overset{*}{F^3} - \overset{*}{F^4} + \ldots = \left(F - \overset{*}{F^2} + \overset{*}{F^3} - \overset{*}{F^4} + \ldots \right) - F = -G - F$$

e per conseguenza

$$G + F + \overset{*}{G}\overset{*}{F} = 0$$

relazione incompatibile coll'ipotesi che G ed F siano ambedue positive.

Dalle formule precedenti segue:

$$G = \left(-\overset{*}{F} + \overset{*}{F^2} - \overset{*}{F^3} + \ldots + \overset{*}{F^{2p}} \right)\left(\overset{*}{F^0} + \overset{*}{F^{2p}} + \overset{*}{F^{4p}} + \ldots \right) \tag{3}$$

essendo p intero e positivo.

Quindi se vale la: (3) F >0, e inoltre

$$(4) \qquad \mathrm{F} + \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{3} + \ldots + \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2p-1} > \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2} + \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{4} + \ldots + \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2p}$$

G sarà negativo. Dunque:

TEOREMA III. – *Se saranno soddisfatte le relazioni* (3) *e* (4)*, l'eredità diretta sarà acceleratrice e quella inversa sarà ritardatrice*.

4. Se il coefficiente di eredità F (t) si annulla per $t \geq \mathrm{T}_0$, T_0 si dirà la *durata dell'eredità diretta*.

Avremo allora che la equazione (1) diverrà

$$(\mathrm{C}) \qquad \rho(t) = q(t) + \int_{t-\mathrm{T}_0}^{t} q(\tau)\,\mathrm{F}(t-\tau)d\tau = q(t) + \int_{0}^{\mathrm{T}_0} q(t-\tau)\mathrm{F}(\tau)d\tau.$$

In questo caso la storia ereditaria non individua la storia primitiva, supponendo che non si tratti di eredità posteriore ad un certo istante.

Infatti prendiamo nella equazione precedente $q(t) = e^{\alpha t}$ con α costante positiva o negativa.

Avremo

$$\rho\,(t) = e^{\alpha t}\left(1 + \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau\right).$$

Se F(τ) è negativo si potrà sempre scegliere α in modo che

$$1 + \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau = 0$$

onde si avrà $\rho(t) = 0$ il che dimostra che la (C), nella quale si considera $q(t)$ come incognita, ha infinite soluzioni della forma

$$q(t) + Ce^{\alpha t},$$

ove C è una costante arbitraria.

Nel caso in cui la durata dell'eredità è ∞, cioè la eredità è completa, il sig. Kostitzin aveva fatto analoga osservazione[4] (cfr. § 5).

Ma nella citata Memoria del «Journal de Mathématiques»[5] ho enunciato il teorema che stabilisce la determinazione dell'eredità primitiva (nel caso della eredità limitata) nel modo seguente:

Nel caso della eredità diretta di durata limitata, nota la storia primitiva in un intervallo di tempo eguale alla durata dell'eredità e nota la storia ereditaria successiva, potrà determinarsi pure, durante lo stesso tempo, la storia primitiva.

5. Se la eredità diretta ha una durata limitata non viene come conseguenza che quella inversa abbia pure una durata limitata. Può inoltre il coefficiente d'eredità F(t) tendere a zero per t crescente indefinitamente, senza che

[4] *Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé* («Recueil mathématiques de Moscou», *33*, 1926, p. 41). Cfr. anche «Comptes Rendus Acad. des Sci. de Paris», 1927, 1er sémestre, p. 1403.

[5] Chap. 1, § II, n. 1.

il nucleo coniugato G(t) tenda analogamente a zero. Così, per esempio, se

$$\mathrm{F} = -\, e^{-t}$$

sarà

$$\mathrm{G} = 1.$$

Per rapporto alla decrescenza dei nuclei daremo qui alcuni teoremi. Supponiamo, nella (A), F negativo ed eguale a $-f$ e poniamo g in luogo di G. In virtù della (2) sarà

$$g = f + \overset{*}{f}{}^{2} + \overset{*}{f}{}^{3} + \dots \tag{2'}$$

TEOREMA IV. – *Se*

$$f(t) = e^{-\varphi(0)t}\, \varphi(t), \tag{5}$$

ove $\varphi(t)$ *è una funzione positiva decrescente,* $g(t)$ *sarà pure una funzione positiva decrescente.*

Infatti la (2') può scriversi

$$g(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

Da cui segue

$$g'(t) = f'(t) + \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau)\, d\tau + g(0) f(t) =$$

$$= \left[f'(t) + g(0) f(t) \right] + \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau ,$$

a cagione della proprietà delle funzioni permutabili appartenenti al ciclo chiuso. Quindi

$$\left[f'(t)+g(0)f(t)\right]=g'(t)-\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

o anche

$$\left[f'(t)+f(0)f(t)\right]=g'(t)-\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

giacché $f(0) = g(0)$.

Risolvendo questa equazione integrale rispetto a $g'(t)$ otterremo

$$g'(t)=\left[f'(t)+f(0)f(t)\right]+\int_0^t g(t-\tau)\left[f'(\tau)+f(0)f(\tau)\right]d\tau. \tag{6}$$

Dalla (5) segue $f(0) = \varphi(0)$, e

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}\left[f(t)e^{f(0)t}\right]=e^{f(0)t}\left[f'(t)+f(0)f(t)\right].$$

Siccome $\varphi(t)$ è decrescente e quindi $\varphi'(t) < 0$, sarà

$$f'(t) + f(0)\, f(t) < 0,$$

onde, per la (6), $g'(t) < 0$; il che dimostra il teorema.

Lemma. *Se*

$$f(t) = e^{mt} f_1(t)$$

e g_1 è il nucleo coniugato di $-f_1$ sarà

$$g(t) = e^{mt} g_1(t).$$

Infatti

$$\overset{*}{f}{}^{2} = e^{mt}\,\overset{*}{f}{}_1^{2} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{3} = e^{mt}\,\overset{*}{f}{}_1^{3}, \dots$$

TEOREMA V. – *Se* $|\varphi(t)| < \lambda$,

$$f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\varphi(t)$$

λ *ed* ε *essendo due costanti positive, avremo*:

$$\lim_{t-\infty} g(t) = 0.$$

Infatti, per il lemma precedente sarà

$$g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\gamma(t),$$

ove γ è il nucleo coniugato di $-\varphi$. Ora per i principii delle equazioni integrali

$$|\gamma(t)| < \lambda e^{\lambda t},$$

quindi

$$|g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t},$$

il che dimostra il teorema.

Se $f(t)$ è positivo resta implicitamente inteso che anche φ sarà positivo. Ma il teorema precedente è valido indipendentemente dal segno di $f(t)$.

Combinando i due teoremi IV e V si avrà la proposizione:

TEOREMA VI. – *Se*

$$f(t) = e^{-(\varphi(0)+\varepsilon)t}\,\varphi(t) \tag{7}$$

ove φ *è una funzione positiva decrescente ed* ε *è una costante positiva, la funzione coniugata* $g(t)$ *sarà una fun-*

zione positiva decrescente che tenderà a zero per $t = \infty$.

I teoremi precedenti provano la esistenza di *coefficienti di eredità diretta ed inversa che sono due nuclei coniugati ambedue decrescenti in valore assoluto e tendenti a zero.*

6. Se supponiamo

$$f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\varphi(t) \qquad , \qquad g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\gamma(t) \tag{8}$$

con $|\varphi(t)| < \lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ e costante (ved. teor. V), avremo

$$|f(t)| < \lambda e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \, , \, |g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{t} |f(t-\tau)| d\tau < \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon} < 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{t} |g(t-\tau)| d\tau < \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{9}$$

L'equazione integrale

$$\rho(t) = q(t) - \int_{t_0}^{t} q(\tau) f(t-\tau) d\tau , \qquad (t > t_0) \tag{A'}$$

si inverte mediante la formula

$$q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(\tau) g(t-\tau) d\tau , \qquad (t > t_0) \tag{B'}$$

e, in questo caso, se il parametro q è limitato, cioè

$$|q| < \mathrm{M},$$

sarà pure limitato il parametro ρ, e avremo

$$|\rho| < 2\ \mathrm{M};$$

e se

$$|\rho| < \mathrm{N},$$

dovrà essere

$$|q| < \mathrm{N}\left(1 + \frac{\lambda}{\varepsilon}\right).$$

Supponendo ρ e *q* limitate le due formule inverse (A') e (B') ove *f* e *g* sono date dalle (8) valgono anche per $t_0 = -\infty$; vale a dire, se $\rho(t)$ è limitata, l'equazione integrale

$$\text{(A'')} \qquad \rho(t) = q(t) - \int_{-\infty}^{t} q(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$$

viene risoluta dalla funzione

$$\text{(B'')} \qquad q(t) = \rho(t) + \int_{-\infty}^{t} \rho(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,$$

la quale è limitata. Ciò si prova coll'ordinario procedimento[6].

Dimostriamo ora che, se poniamo la condizione che la soluzione della (A'') debba essere limitata, questa è unica.

---

[6] È il procedimento esposto in VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales*, Paris 1913, Chap. II, § II, *III Principe d'inversion* che si può estendere al caso del limite inferiore ∞ dato l'ordine di infinitesimo dei nuclei per l'argomento ∞.

Infatti, supponiamo che debba essere

$$|q| < \mathrm{M},$$

e che sia $\rho = 0$.

Dalla (A") segue

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} q(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

quindi, in virtù della (9),

$$|q(t)| < \mathrm{M} \int_{-\infty}^{t} |f(t-\tau)| d\tau < \mathrm{M} \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon},$$

e perciò

$$|q(t)| < \mathrm{M} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon} \right)^{n}$$

n essendo un intero positivo qualunque. Dunque $|q(t)|$ deve essere inferiore a qualunque numero positivo e, per conseguenza, nel caso di $\rho = 0$, non v'è altra soluzione limitata che $q = 0$.

Le soluzioni della (A") della forma

$$q(t) = e^{\alpha t},$$

secondo il segno di α, divengono ∞ per $t = -\infty$ oppure per $t = \infty$ e non sono per conseguenza limitate (cfr. § .3).

II.

7. Nella Memoria precedentemente citata ho studiato

la questione energetica nel caso della eredità lineare per un sistema dinamico con un sol grado di libertà ammettendo la durata della eredità limitata. Cerchiamo ora di togliere questa condizione e supporre la eredità posteriore ad un certo istante iniziale.

Evidentemente se la eredità è limitata e consideriamo il fenomeno dopo decorso un periodo di tempo superiore alla durata dell'eredità, sarà lecito trascurare il fatto che l'eredità è posteriore all'istante iniziale. Quindi le formule che troveremo comprenderanno quelle già ottenute.

8. Prendiamo l'istante iniziale come origine dei tempi. Allora l'equazione dinamica da cui partiremo sarà[7]

$$q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(t-\tau)q(\tau)d\tau + Q, \tag{D}$$

o anche

$$q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(\tau)q(t-\tau)d\tau + Q \tag{D'}$$

con

$$f(t) > 0 \quad , \quad f'(t) < 0$$

Inoltre dovremo supporre[8]

$$m(t) = b - \int_0^t f(\tau)d\tau > 0$$

[7] Vedi la mia Memoria precedentemente citata, Chap. I, § 1, n. 2.

[8] Cfr. Chap. I, § 1, n. 4 della Memoria sopra citata.

comunque sia $t > 0$.

La (D) potrà scriversi

$$q''(t) + m(t)q(t) + \int_0^t f(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]d\tau = \mathrm{Q},$$

e, moltiplicando ambo i membri per $q'(t)$,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2 + \frac{1}{2}m(t)q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}m'(t)q^2(t) + \frac{1}{2}f(t)\left[q(t) - q(0)\right]^2 - \int_0^t f(\tau)\left[q(t) - (t-\tau)\right]q'(t-\tau)d\tau +$$

$$+ \mathrm{Q}q' = -\frac{1}{2}f(t)q^2(t) + \frac{1}{2}f(t)\left[q(t) - q(0)\right]^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\frac{d}{d\tau}\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau + \mathrm{Q}q'.$$

Ma, per mezzo di una integrazione per parti, si trova

$$\frac{1}{2}f(t)\left[q(t) - q(0)\right]^2 - \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\frac{d}{d\tau}\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t f'(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau.$$

Avremo dunque

$$\text{(E)} \qquad \frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} f(t) q^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau = \mathrm{Q}q'.$$

I termini

$$\frac{1}{2} f(t) q^2(t) \qquad , \qquad -\frac{1}{2}\int_0^t f'(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau$$

sono sempre positivi, dunque: *il lavoro eseguito dalle forze esterne, durante un intervallo qualunque di tempo, supera sempre la variazione subita nello stesso intervallo di tempo dal funzionale positivo*

$$\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right]^2 d\tau .$$

9. *Se il moto è spontaneo* (ossia Q = 0), *il precedente funzionale va continuamente diminuendo*.

Di qui segue che *il moto spontaneo è limitato e, quando gli spostamenti sono nulli, l'equilibrio è stabile*.

Dalla (D) segue, supposto Q = 0,

$$q'(t) - q'(0) + b\int_0^f q(\tau) d\tau - \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau - \xi) q(\xi) d\xi = 0,$$

o anche

$$q'(t) - q'(0) + \int_0^f q(\tau)\left[b - \int_0^{t-\tau} f(\xi) d\xi\right] d\tau - = 0$$

dunque

$$\frac{q'(t)-q'(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^t q(\tau)m(t-\tau)d\tau=0.$$

Ne viene

$$\lim_{t=\infty}\frac{1}{t}\int_0^t q(\tau)m(t-\tau)d\tau=0$$

da cui si ricava con facile dimostrazione che $q(t)$ *oscillerà indefinitamente attorno al valore zero, o tenderà in media assintoticamente verso zero*.

10. Nel caso in cui

$$f(t)=0 \quad \text{per} \quad t \geq T_0 \tag{10}$$

preso $t > T_0$ si ricade nelle formole ottenute nel caso della eredità di durata limitata a T_0[9]. La differenza essenziale che passa fra il caso (10) e il caso nel quale $f(t)$ non si annulla per $t \geq T_0$ consiste in questo: che nel primo caso è possibile ritornare dopo un certo tempo allo stato iniziale, anche dal punto di vista ereditario, mentre ciò non è possibile nell'altro caso.

11. È facile ottenere un'altra formula del tipo (E) nel modo seguente:

Supposto $b = 1$, poniamo

[9] Cfr. la mia Memoria sopra citata, Chap. II.

$$\rho(t) = q(t) - \int_0^t f(t-\tau)q(\tau)d\tau,$$

da cui segue

$$q(t) = \rho(t) + \int_0^t g(t-\tau)\rho(\tau)d\tau,$$

onde la (D) si scriverà

$$q''(t) + \rho(t) = \mathrm{Q}(t).$$

Moltiplicando ambo i membri per q' avremo

$$q'q'' + q'\rho = \mathrm{Q}q'$$

ossia

(11) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q'^2 + q\rho\right) = \rho' q + \mathrm{Q}q'.$$

Ora

$$\mathrm{P} = -\rho q + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^2 - \rho(q-\rho) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^2(t) - \rho(t)\int_0^t g(t-\tau)\rho(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau,$$

quindi

(12)
$$\frac{dP}{dt} = -\rho'(t)\left(\rho(t) + \int_0^t g(t-\tau)\rho(\tau)d\tau\right)$$
$$-\rho(t)\int_0^t g'(t-\tau)\rho(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau - \frac{1}{2}g(0)\rho^2(t)$$
$$= -\rho'(t)q(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)[\rho(t)-\rho(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2}g(t)\rho^2(t).$$

Sommando membro a membro le equazioni (11) e (12) si trova

(F)
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2 + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)[\rho(t)-\rho(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2}g(t)\rho^2(t) + Qq'.$$

Se $g' < 0$ e $g > 0$ i termini

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)[\rho(t)-\rho(\tau)]^2 d\tau \quad , \quad \frac{1}{2}g(t)\rho^2(t)$$

sono ambedue positivi, e quindi il lavoro eseguito dalle forze esterne, in un dato intervallo di tempo, supera la variazione subita dal funzionale positivo

$$\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau,$$

nello stesso intervallo di tempo.

La formula (F), che può anche scriversi

$$(F')\qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2+\frac{1}{2}\rho^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\rho^2(\tau)d\tau\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]^2 d\tau+\frac{1}{2}g(t)\rho^2(t)+\mathrm{Q}q',$$

è quella che volevamo ottenere. Se la eredità inversa avesse una durata limitata T_0, cioè se fosse $g(t) = 0$ per $t \geq T_0$, l'ultimo termine del primo membro della (F') si annullerebbe qualora fosse $t > T_0$ e questa formula diverrebbe:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}\rho^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} g(\tau)\rho^2(t-\tau)d\tau\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0} g'(\tau)\left[\rho(t)-\rho(t-\tau)\right]^2 d\tau=\mathrm{Q}q'.$$