Progetto Manuzio

Vito Volterra

Saggi scientifici

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Saggi scientifici
AUTORE: Volterra, Vito
TRADUTTORE:
CURATORE:
NOTE:

TRATTO DA: Saggi scientifici / Vito Volterra. - Bologna : N. Zanichelli, 1920. - 218 p. ; 19 cm.

CODICE ISBN: non disponibile

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 1 gennaio 2011

INDICE DI AFFIDABILITA': 1
  0: affidabilità bassa
  1: affidabilità media
  2: affidabilità buona
  3: affidabilità ottima

ALLA EDIZIONE ELETTRONICA HANNO CONTRIBUITO:

Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

REVISIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it

VITO VOLTERRA

SAGGI SCIENTIFICI

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

PREFAZIONE

Ho raccolto in questo volume alcune conferenze che ebbi occasione di fare dopo il 1900. Nonostante le modificazioni introdottevi esse risentono ancora dell'epoca in cui vennero redatte e delle circostanze per cui furono preparate. Mi è sembrato opportuno di non alterare l'indole e le caratteristiche loro[1].

Alcuni di questi saggi furono pubblicati in francese e in inglese. Essi compariscono ora in italiano ed io ringrazio la signorina dott. Eleonora Freda per l'aiuto prestatomi.

V. VOLTERRA

[1] Altre modificazioni avrebbero potuto introdursi per tener conto di recenti risultati, per esempio nell'ultima parte del saggio sul Poincaré.

SUI TENTATIVI DI APPLICAZIONE DELLE MATEMATICHE ALLE SCIENZE BIOLOGICHE E SOCIALI

La sostanza di questo articolo costituì il discorso inaugurale letto nella solenne apertura della Università di Roma nel 1901 e pubblicato nell'Annuario della Università dell'anno 1901-902, riprodotto poi nel *Giornale degli Economisti*, Serie II, vol. 23, 1901. Esso fu stampato in Francese nella *Revue du Mois*, anno I, n.° I. Paris, Soudier, 1906, quindi nel vol. III, fasc. II, dell'*Archivio di fisiologia* (Firenze, gennaio 1906).

Anatole France, quell'acuto e geniale filosofo e romanziere, delizia di tanti delicati lettori, racconta questo aneddoto.

Alcuni anni fa, dice, visitavo in una grande città d'Europa le gallerie di storia naturale insieme con uno dei conservatori, il quale mi descriveva con la maggior compiacenza gli animali fossili.

Egli mi istruì benissimo fino ai terreni pliocenici; ma, allorchè ci trovammo dinanzi ai primi vestigi dell'uomo, volse la testa ed alle mie domande rispose che quella non era la sua vetrina.

Sentii la mia indiscrezione. Non bisogna mai domandare ad uno scienziato i segreti dell'universo che non sono nella sua vetrina.

*
* *

Se ad uno spirito fine, ma talvolta paradossale, come Anatole France, è permesso concludere dalla sua ingenua avventura che gli scienziati sono la gente meno curiosa del mondo, e che per ciascuno di essi ciò che si trova fuori della propria vetrina non lo interessa, noi ci guarderemo bene dal trarne una conseguenza; ma considereremo piuttosto quel fatto come un simbolo che rappresenta la naturale e spesso giustificata ritrosia che hanno coloro che si dedicano agli studi di esporre idee ed affermazioni fuori del campo in cui si svolgono di solito i loro pensieri ed in cui si aggira la loro attività scientifica.

Ma negli uomini di scienza la curiosità è ben grande di guardar fuori e lontano; vivo è il desiderio di frugare nella vetrina degli altri per ben conoscere il valore della propria, ed il fare talvolta un inventario comune fra colleghi vince quel riserbo che tratteneva l'amico di Anatole France dinanzi ad un estraneo.

Ed in chi si è dedicato agli studi di matematiche tale curiosità e simile desiderio son molto maggiori che non in coloro che si occupano di altre discipline.

Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che sian mai vissute. Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'Universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse.

Mentre egli impiega la propria vita e le forze del suo ingegno nell'affinare e perfezionare i suoi metodi, e nel renderli adatti e pronti ad ogni più delicata ricerca e ad una sempre più vasta comprensione di fatti, è di continuo premuto da un'onda crescente di studiosi che lo richiedono di aiuto e spesso sperano da lui più di quanto egli non possa.

È dato solo a rari spiriti, altamente speculativi, spaziare nella sfera dei numeri e degli enti astratti della geometria e della logica, restando indifferenti ed estranei a tutto ciò che si agita, vive e si trasforma d'intorno, lavorando al solo fine della gloria del pensiero umano.

È naturale invece nei più il desiderio di volger la mente fuori della cerchia della pura analisi matematica; d'informarsi, di comparare la riuscita dei vari mezzi di cui essa dispone, e classificarli in vista delle loro applicazioni, onde poter rivolgere la propria attività a perfezionare i più utili, a rafforzare i più deboli, a crearne dei più potenti.

Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le scienze biologiche e sociali, che è più intensa la curiosità, giacchè è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi.

*
* *

Cedendo al desiderio di esporre l'impressione che un matematico può provare dinanzi ad alcuni di questi nuovi tentativi, messi a confronto colle classiche applicazioni delle matematiche, io mi permetto di escire dall'àmbito dei miei studi, per brevemente aggirarmi in un campo limitato impari certo al soggetto, il quale collegato strettamente ai più grandi problemi della filosofia e della storia delle scienze, sarebbe per sè tanto vasto.

Il seguire infatti e comparare gli antichi e nuovi cammini che le matematiche han tenuto, infiltrandosi nei vari rami dello scibile; il veder l'effetto che in essi si è suscitato e quello che le matematiche per naturale reazione han risentito; lo sviscerare le mutue relazioni che ne son nate, mentre offrirebbe un quadro grandioso ed una superba sintesi di una gran parte del lavoro compiuto dall'umano pensiero e darebbe una guida nel suo futuro progredire, sarebbe argomento d'immane studio assai superiore alle mie forze.

Prima di ogni altra cosa credo necessario chiarire un punto molto delicato attinente al nostro soggetto.

Dalle matematiche alcuni si aspettano troppo poco, ed altri troppo, e ciò spiega la fredda diffidenza degli uni, l'entusiasmo caldo degli altri per le nuove loro applicazioni.

Se è vero il detto che esse non rendono altro che ciò che loro si dà, e che l'analisi nulla aggiunge di essenziale ai postulati che costituiscono il substrato di ogni svolgimento matematico, d'altra parte è pur noto che le matematiche son la strada maestra per giungere alle leggi generali e la guida più sicura per immaginare nuove ipotesi, ossia per cangiare e perfezionare quegli stessi postulati che formano la base di ogni singola trattazione; giacchè offrono il mezzo più squisito per saggiarli, portandoli dal campo dell'astrazione a quello della realtà. Ed invero, nulla meglio del calcolo permette di compararne esattamente le conseguenze più lontane coi dati delle osservazioni e delle esperienze.

Ma la storia della scienza è pronta ancora a dimostrarci qualche cosa di più e ad indicarci una più efficace e diretta cooperazione delle matematiche alla percezione e comprensione della natura.

Allorchè col calcolo veniamo a stabilire l'andamento preciso di due fenomeni, in apparenza diversi, e troviamo una identità nel modo col quale essi avvengono, o, come si dice, troviamo che son regolati dalle stesse equazioni, non vi è spesso che un sol passo per concludere che i due fatti costituiscono due apparenze di un fatto solo.

Tale e non altro fu il procedimento col quale il Maxwell giunse a riconoscere che le perturbazioni elettromagnetiche e la luce sono la stessa cosa; memorabile scoperta che aprì la via alle ricerche di Hertz, che ebbero tanta influenza sulla fisica moderna, e ispirarono le pratiche invenzioni di Ferraris e di Marconi.

Nessuno può quindi dire al geometra a quali ampi orizzonti condurrà lo stretto e spinoso sentiero che il calcolo gli fa seguire.

Avrebbe forse sospettato lo stesso Lagrange, allorchè ideava la meccanica analitica, che egli non solo creava un potente metodo ed una guida sicura in ogni più difficile questione della scienza del moto e dell'equilibrio, ma che le sue formule sarebbero divenute un giorno, nelle mani di uomini di genio come Maxwell e Helmholtz, così comprensive da abbracciare e dominare tutti i fenomeni del mondo fisico?

*

* *

Eppure se tanta è l'importanza dell'analisi, è necessario limitarne al suo giusto grado la portata.

Disgraziatamente i matematici di professione sono separati dal resto del mondo da una barriera di simboli, che danno un certo aspetto di mistero alle loro elucubrazioni ed alle opere loro, tanto che i non iniziati ai segreti del calcolo e dell'algebra si fanno talora l'illusione che i loro mezzi siano di una natura diversa da quelli di cui il comune ragionamento dispone.

È un errore analogo a quello che fan molti sulla potenza delle macchine delle quali è celato ed oscuro il meccanismo.

Ebbene, fra il ragionamento grossolano, che anche a chi è ignaro del calcolo pur fa prevedere in molti casi l'andamento di certi fenomeni ed il meccanismo delle forze che li governano, ed il ragionamento sottile del geometra che, da un insieme artifizioso di simboli algebrici, in una maniera che spesso desta meraviglia anche nei più esercitati e rotti alle disquisizioni analitiche, giunge al resultato che precisa l'andamento degli stessi fenomeni naturali, non corre quel divario che a tutta prima parrebbe. Anzi, se esaminiamo le cose con accuratezza, si vedrà che quest'ultimo sottile procedimento non è altro in sostanza che il primo rozzo ragionamento più perfezionato ed affinato. Ed oltre a ciò si può dire che nella mente del geometra quel primo rozzo ragionamento ha preceduto il calcolo e lo ha guidato, indicandogli su per giù dove doveva arrivare e quanto gli era permesso tentare.

In certo modo esso rappresenta la greggia armatura su cui l'intiero edificio analitico è costruito. Ma quando noi vediamo il lavoro compiuto, ci troviamo in presenza di un monumento magnifico che è già stato spogliato di tutti i ponti e i sostegni. I puntelli che hanno servito a reggere la cupola in costruzione sono spariti, ed essa appare agli occhi meravigliati di chi la guarda come un miracolo di costruzione.

Non con soverchie speranze quindi, nè avendo nell'animo illusioni spesso dannose, ma nemmeno con indifferenza, deve essere accolto ogni nuovo tentativo di sottoporre al calcolo fatti di qualsiasi specie.

*

* *

Il passaggio di una scienza dall'epoca che dirò prematematica a quella in cui essa tende a divenir matematica, resta caratterizzato da ciò: che gli elementi, che essa studia, vengono esaminati in modo quantitativo anzichè qualitativo; onde in questa transizione le definizioni che richiamano soltanto alla mente l'idea degli elementi stessi con una immagine più o meno vaga, cedono man mano il posto a quelle definizioni o a quei principii che li determinano, offrendo invece il modo di misurarli.

Quale importanza, per esempio, nella meccanica Newtoniana viene ad avere il primitivo concetto di forza espresso nei termini: «la forza è la causa di moto», di fronte alle due prime leggi che non danno in fondo altra cosa che il modo di misurarla? Tanto poco, che in alcuni moderni tentativi di rifacimento della meccanica la stessa parola forza, quest'ultimo residuo verbale di personificazione nel mondo inorganico, potè essere soppressa, soli restando a sostituirla quegli elementi che combinati ne danno la grandezza.

In virtù di questo classico ricordo e di tanti altri analoghi, che facilmente potrebbero citarsi, salutiamo con gioia il tentativo di Galton di misurare numericamente certi elementi della teoria dell'evoluzione organica, come la eredità e la variazione[2].

Forse il Galton in questa via non ha mosso che il primo passo, e forse sono da accogliersi le critiche rivolte ai suoi resultati e molto dovremo cambiare in ciò che egli ha fatto; ma dobbiamo pur riconoscere che l'alba di un nuovo giorno appare col sorgere del metodo da lui inaugurato.

Però, il tradurre nel linguaggio dell'aritmetica o della geometria i fatti della natura, è piuttosto schiudere il varco alle matematiche che non porre in opra lo strumento dell'analisi.

Lo studiare le leggi con cui variano gli enti suscettibili di misura, l'idealizzarli, spogliandoli di certe proprietà

---

[2] Natural Inheritance by FRANCIS GALTON, London 1889. – In un corto, ma molto interessante articolo del DAVENPORT, nel quale è esposta la storia di questi studi (*Science*, N. S., XII, n. 310), egli osserva che il GALTON è stato principalmente spinto verso le sue ricerche dai lavori di QUETELET.

o attribuendone loro alcune in modo assoluto, e lo stabilire una o più ipotesi elementari che regolino il loro variare simultaneo e complesso; ciò segna il momento in cui veramente si gettano le basi sulle quali potrà costruirsi l'intero edificio analitico.

Ed è allora che si vede rifulgere tutta la potenza dei metodi, che la matematica largamente pone a disposizione di chi sa usarli.

I cultori della economia politica, per esempio, hanno potuto sperimentare, sebbene questa scienza sia solo all'inizio di una tal via, con quale semplicità di mezzi essa conduca a rappresentare, come in un quadro, il meccanismo che vincola fra loro gli elementi del mondo economico, e come il calcolo algebrico esprima la grandezza dei cambiamenti di ciascuno col mutare di alcuni di essi o delle condizioni in cui si trovano; mentre la economia prematematica non raggiunse mai la visione completa del quadro essendo costretta ad esaminare ciascuna di queste relazioni presa singolarmente ed isolata dalle altre.

Plasmare dunque concetti in modo da potere introdurre la misura; misurare quindi; dedurre poi delle leggi; risalire da esse ad ipotesi; dedurre da queste, mercè l'analisi, una scienza di enti ideali sì, ma rigorosamente logica; confrontare poscia colla realtà; rigettare o trasformare, man mano che nascono contraddizioni fra i risultati del calcolo ed il mondo reale, le ipotesi fondamentali che han già servito; e giungere così a divinare fatti ed analogie nuove, o dallo stato presente arrivare ad argomentare quale fu il passato e che cosa sarà l'avvenire; ecco, nei più brevi termini possibili, riassunto il nascere e l'evolversi di una scienza avente carattere matematico.

Il cammino è lungo, ed è aspro, ed è sparso di difficoltà. Si pensi che i più remoti vestigi della civiltà umana ci tramandano tracce non dubbie di misure astronomiche fatte da popoli primitivi; eppure la meccanica celeste non conta nemmeno tre secoli di vita. Qual meraviglia dunque se ancora limitati di fronte ai desideri, alle speranze, alle immoderate richieste, sono i risultati che il calcolo ha potuto ottenere in quelle scienze che erano pur ieri nel periodo prematematico e che lottano ancora oggi per escirne?

*
* *

Ma vediamo senz'altro in azione questi metodi dell'analisi e miriamoli alle prese colle nuove questioni nelle quali hanno tentato di introdursi.

Fra le scienze fisiche ve ne è una che fu sempre a capo di tutte le altre, che le altre guidò, mentre queste vennero man mano imitandola e prendendola come esempio.

È questa scienza la meccanica, ed essa costituisce, insieme alla geometria, se non la più brillante, certo la più solida e sicura delle conoscenze di cui la mente umana si gloria.

Ora, non fra le biologiche, ma fra le scienze sociali, possiamo trovare un ramo di ricerche, la economia pura, che si è venuta foggiando sulla meccanica ed ha impiegato anch'essa i suoi procedimenti, si è giovata dei suoi metodi ed è pervenuta a resultati analoghi.

La meccanica, al pari di tutte le altre scienze fisiche e della economia, deve il successo all'uso dei metodi infinitesimali, i quali costituiscono l'ausilio analitico più delicato e ad un tempo più potente che sia stato mai immaginato.

Non è facile cosa, nè sarebbe breve, lo spiegare l'essenza dell'analisi infinitesimale, anche spogliandola di tutto ciò che non è necessario, e mettendo a nudo lo scheletro su cui è costruita questa superba e nobile creazione a cui cooperarono tanti ingegni da Archimede a Newton. Nè mi ci proverò. Dirò solo che i fenomeni naturali, di qualunque specie siano, a primo aspetto si presentano con una apparenza complessa. Ciò che avviene oggi è frutto di tutto quello che si è verificato nel passato; i cambiamenti che hanno luogo in un punto dello spazio sono dipendenti e legati a quelli che avvengono in tutti gli altri luoghi. Il voler scoprire ad un tempo tutti questi vincoli nascosti sì, ma di cui si palesano le conseguenze; il volerli abbracciare con uno sguardo solo e il dominarli tutti, sembra, al primo momento, opera non solo difficile ma impossibile, sebbene essa appaia necessaria se vogliamo formarci un'idea completa dei fenomeni stessi.

In qual modo il metodo infinitesimale riesce a districarci da un simile viluppo che preme da ogni parte e sembra soffocare ogni sforzo diretto ad escirne?

Immaginiamo il succedersi degli eventi in un tempo infinitamente piccolo ed in uno spazio pure infinitesimo. Diviene allora possibile scindere nei mutamenti degli elementi variabili le parti predominanti dalle altre trascurabili di fronte a queste, e, se ci è concesso misurare le prime o stabilire fra loro delle relazioni, resta possibile risalire, mediante questi dati, da ciò che ha luogo in un certo istante e in una certa plaga, a quello che avverrà col proceder del tempo per tutto, fin dove cioè le leggi elementari trovate restano soddisfatte.

Fissare tali leggi elementari si chiama porre le equazioni differenziali; risalire da esse di passo in passo, calcolando ogni singolo elemento, si chiama integrarle. Quest'ultima operazione il geometra può da solo eseguirla, anche se ignora, come spesso avviene, la questione concreta a cui mirano e a cui serviranno le sue formule, nello stesso modo che l'oscuro e paziente minatore, perduto nelle viscere della terra, arricchisce l'umanità di immani tesori di energia, mentre ignora se il combustibile, che egli penosamente cava dal suolo, servirà a dar vita ad una industria, o farà splendere di mille faci le nostre notti, o spingerà la nave nei mari lontani.

*

* *

È in virtù del calcolo infinitesimale, che possiamo, per esempio, seguire il moto degli astri, enunciar la legge con cui vibra la corda di un'arpa, e calcolare gli effetti delle più potenti macchine, ed è pure con questo mezzo che le equazioni differenziali della economia poterono esser poste.

Un confronto fra la meccanica e l'economia pura si presenta facilmente. Immaginiamo perciò di cogliere le impressioni che un cultore della meccanica può risentire nello studio della economia[3].

Il concetto dell'*homo œconomicus* che ha dato luogo a tante discussioni, che ha suscitato così grandi difficoltà e che tuttora trova delle menti ribelli ad accettarlo, riesce al nostro meccanico così naturale, che egli prova una vera sorpresa dell'altrui diffidente meraviglia suscitata da questo essere ideale e schematico. Egli vede nell'*homo œconomicus* un concetto analogo a quelli che per una lunga consuetudine gli son divenuti famigliari. Egli è avvezzo infatti ad idealizzare le superfici ritenendole senza attrito, i fili ammettendoli inestendibili, i corpi solidi supponendoli indeformabili, ed è solito a sostituire ai fluidi della natura i liquidi ed i gas perfetti.

[3] Cfr. Principii di economia pura per MAFFEO PANTALEONI, Firenze, 1894. Scritti varii di economia per MAFFEO PANTALEONI, Palermo, 1904. – Vedi: Mathematical investigations in the Theory of value and prices by Dr. IRVING FISHER (Trans. of the Connecticut Academy, IX July 1892). – Una esposizione del modello meccanico immaginato dal FISHER è stata fatta dal Col. BARONE nel vol. VIII, Serie 2ª del *Giornale degli Economisti*. – Nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (Leipzig, Teubner) PARETO ha pubblicato nel 1902 un interessante articolo: *Anwendungen der Mathematik auf Nalionalöconomie*, ove si trovano riassunte le idee fondamentali, le diverse teorie ed i principali resultati sopra questo soggetto insieme con una ricca bibliografia.

E non solo ha l'abitudine di tutto ciò, ma sa il vantaggio che recano questi concetti.

Se il cultore della meccanica procede innanzi, si accorge che, tanto nella sua scienza che in quella economica, tutto si riduce ad un giuoco di tendenze e di vincoli, questi limitanti l'azione delle prime, che per reazione generano delle tensioni. Da questo insieme nasce talora l'equilibrio, talora il moto, d'onde una statica ed una dinamica e nell'una e nell'altra scienza.

Noi abbiamo già accennato alle vicende che l'idea di forza ha avuto in meccanica; dalle vette della metafisica essa è discesa nel campo degli enti misurabili. Così in economia non è più ora il momento di parlare col Jevons della espressione matematica delle quantità non misurabili[4]. Pareto invece di partire direttamente dall'idea di Ofelimità, come egli faceva nel suo *Corso di Economia politica*[5], propone di partire da concetti puramente quantitativi colle sue curve di indifferenza che corrispondono così bene alle curve di livello e alle superficie equipotenziali della meccanica[6].

---

[4] The Theory of political Economy by W. STANLEY JEVONS, London 1888. È interessante seguire l'origine e il corso delle idee di JEVONS che posson riattaccarsi a quelle di LAPLACE e di BERNOULLI e secondo il PANTALEONI agli studi fatti da JEVONS sotto la direzione di DE MORGAN (cfr. Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche, inserito negli *Scritti varii di Economia politica* sopra citati).

[5] PARETO VILFREDO. Cours d'économie politique professé à l'Université de Lausanne. Lausanne. 1896.

Le teorie molecolari ed atomiche inducono a concepire discontinua l'intima costituzione dei corpi: Lamé, Cauchy e tutti coloro che stabilirono la teoria matematica dell'elasticità, la cui grande portata e le continue applicazioni pratiche si rivelano ogni giorno, poterono raggiunger lo scopo solo passando, con un vero tratto di genio, dal discontinuo al continuo. Ora, analogamente a quanto fecero i creatori della teoria della elasticità, e Fourier in quella del calore, gli economisti suppongono che le quantità di beni di cui ciascuno può disporre, le quali di natura loro sarebbero discontinue, variino per gradi continui.

Finalmente il nostro meccanico ravvisa nel processo logico per ottenere le condizioni dell'equilibrio economico, lo stesso ragionamento che egli fa per stabilire il principio dei lavori virtuali, e, allorchè si trova dinanzi alle equazioni differenziali dell'economia, prova il desiderio di applicarvi per primo quei metodi di integrazione che ben conosce alla prova[7].

Noi abbiamo così veduto una disciplina, la quale fa parte di quelle dette morali, che, pur conservando la sua

---

[6] Sunto di alcuni capitoli di un muovo trattato di economia politica del Prof. PARETO, *Giornale degli Economisti*, II, XI, XX. – Vedere anche l'articolo sopra citato della *Encyklopädie der Math. Wiss*. §§ 3, 4, e l'appendice al *Manuale di Economia politica* pubblicato dal PARETO (Milano, Società editrice libraria, 1906).

[7] Vedi AMOROSO LUIGI, Sulle analogie fra l'equilibrio meccanico e l'equilibrio economico (Modena, 1910) – Contributo alla teoria matematica della dinamica economica. (Roma, 1912).

schietta originalità, si va assimilando i metodi matematici, e nel breve periodo trascorso dalla comparsa delle opere del Whewell, del Cournot, del Gossen e del Walras[8] ad oggi, ha cercato di porre a contributo ed applicarne le teorie.

*

* *

Sebbene di un interesse di giorno in giorno crescente le applicazioni delle matematiche alle scienze biologiche ci appaiono esse pure al loro inizio.

---

[8] Le memorie più antiche di economia politica di questi autori sono: WHEWEL WILLIAM, Mathematical Exposition of some Doctrines of Pol. Econ., Cambridge, Phil. Trans., VIII, 1829. – COURNOT ANTOINE AUGUSTIN, Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des richesses, 1838. – GOSSEN HERMANN HEINRICH. Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der darausfliessenden Regeln für menschliches Handeln, Braunschweig, 1854. – VALRAS MARIE ESPRIT LÈON. Elèments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale, Paris, 1874. – LEONE WALRAS, figlio di WALRAS ANTOINE AUGUSTE pure economista, è autore dell'opera: De la nature de la richesse et de l'origine de la valeur. Paris, 1831. – Per trovare le tracce più antiche delle idee e dei principii della economia matematica bisogna rimontare a GIOVANNI CEVA (nato nel 1647 o 1648), matematico ed ingegnere idraulico. Il titolo della sua opera economica è il seguente: De re nummaria quoad fieri potuit geometrice tractata, ad illustrissimos et excellentissimos dominos Praesidem Quaestoremque hujus arciducalis Caesaraei Magistratus. Mantova, 1711. – Cfr. l'art. di Pantaleoni su GIOVANNI CEVA nel *Dictionary of Political Economy* edito da R. H. INGLIS PALGRAVE, Londra, 1894.

Fu fondata, è vero, abbastanza recentemente una scuola, la quale ha preso il nome di scuola biomeccanica, ma non ci sembra di ravvisare in essa quelle caratteristiche che rivelano l'inizio di un periodo veramente matematico[9].

Vi sono pure dei rami della fisiologia, come l'ottica fisiologica, l'acustica fisiologica, nei quali degli uomini come l'Helmholtz hanno portato tutto il contributo della loro cultura universale in larga parte matematica[10]; vi è anche ciò che si può chiamare una termodinamica fisiologica[11]; vi sono gli studi classici sulla circolazione del sangue, ossia sul moto dei fluidi nei vasi elastici e contrattili, e gli studi meccanico-fisiologici sul camminare, correre e saltare[12], e molti altri dei quali mi permetto non

---

[9] Vedi: ROUX VILHELM, Gesammelte Abhandlungen über Entwickelungsmechanik der Organismen, Leipzig, 1895.

[10] HELMOLTZ HERMANN, Handbuch der phisiologischen Optik. Hamburg, 1894. – Die Lehre von den Tonempfidungen als physiol. Grundlage für die Theorie der Musik. Braunschweig, 1877.

[11] Cfr. Les transformations d'énergie dans l'organisme par ANDRÉ BROCA (Rapports présentés au congrès international de Physique rèuni à Paris en 1900) t. III, Paris, 1900.

[12] Theorie der durch Wasser oder andere inkompressibele Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen von WILHELM WEBER. (Berichte d. k. Sachs. Ges. d. Wiss. math. phys. Klasse XVIII, 1866). Cfr. la Mem. di E. H. WEBER, Ueber die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre. Ibid., 1850. Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung von W. WEBER und E. WEBER, 1836. – Questi studi furono preceduti da una lunga serie di lavori fra i

far cenno, e in tutti questi l'applicazione del calcolo è molto avanzata ed è feconda di utilissimi risultati; ma queste mirabili e spesso mature ricerche appaiono piuttosto appartenere ai vari rami della fisica matematica e della meccanica, che non ad un campo nuovo ove le matematiche abbian trovato un'applicazione originale.

*
* *

Per questa sola ragione, lasciandole da parte, veniamo senz'altro a quei tentativi che sono, è vero, appena iniziati, ma che attaccano delle questioni nuove proprie alla biologia.

I risultati loro non hanno ancora raggiunto quel grado di sicurezza che si manifesta nelle ricerche sopra ricordate. Perciò esse sollevano ancora dei dubbi, ma, non fosse che per questa ragione, solleticano maggiormente la curiosità.

Questi tentativi riguardano le questioni della classificazione e dell'evoluzione, questioni del resto fra loro strettamente legate, tanto che le teorie genetiche tendono a far dipendere l'una dall'altra.

Basta l'esame più superficiale per accorgersi subito che gli studi matematici iniziati in questo campo presentan tutti le caratteristiche proprie ad un primo stadio di ricerche o piuttosto ad un periodo di orientamento, ed

---

quali sono memorabili le profonde ricerche del BORELLI (De Motu animalium. Roma, 1630). – Riguardo alla scuola detta Iatromatematica, a capo della quale fu il BORELLI, vedi per esempio la Storia della medicina dello SPRENGEL, Venezia, 1814.

infine troviamo che soli vi dominano il metodo dell'analogia matematica e quello statistico fondato sul calcolo delle probabilità e sulla teoria degli errori.

Anzi, gli studi della scuola che possiam chiamare biometrica, non sono da separarsi dalle classiche ricerche statistiche proprie ai fenomeni sociali.

Il metodo dell'analogia in fisica matematica non è certamente nuovo.

Sono passate oggi molte illusioni sul modo di dare una spiegazione meccanica dell'Universo. Ora, se la fiducia di spiegare tutti i fenomeni fisici con leggi simili a quella della gravitazione universale o con un unico meccanismo, è venuta a svanire, andò concretandosi, quasi a compenso di tutto questo edificio di speranze che stava crollando, l'idea dei modelli meccanici, i quali, se non soddisfano chi cerca sistemi nuovi di filosofia naturale, contentano provvisoriamente coloro, che, più modesti, si appagano di ogni analogia e specialmente di ogni analogia matematica che valga a dissipare un poco le tenebre avvolgenti tanti fatti naturali.

Un modello meccanico di un fenomeno è infatti un apparecchio, il quale viene architettato senza preoccuparsi se nella sua essenza abbia rapporto alcuno col fenomeno stesso; ma è costruito con la sola condizione che, quando sia posto in moto, certe sue parti si spostino o mutino seguendo le stesse leggi con cui cambiano altrettanti elementi variabili nel fenomeno: elementi che si assumono quali parametri fondamentali di esso.

L'esperienza ci insegna che i modelli furono utili e servirono, come servon tuttora, ad orientarci nei campi della scienza più nuovi, più oscuri e nei quali si cerca a tentoni la via.

Si deve dunque accogliere l'ardito tentativo del nostro celebre astronomo Schiaparelli, di costruire un modello geometrico atto allo studio delle forme organiche e della loro evoluzione[13], con quel medesimo interesse con cui sono stati accettati e studiati i modelli meccanici di Maxwell e di Boltzmann della induzione elettrica e dei cicli termici[14]; tanto più che non gravi difficoltà si opporrebbero a trasformare il modello stesso dello Schiaparelli da geometrico in meccanico, rendendolo così ancor più intuitivo.

*

* *

È necessario pertanto distinguere nell'opera dell'astronomo italiano, onde bene afferrarla, due parti; quella che concerne la vera e propria rappresentazione geometrica delle variazioni del mondo organico, da quella relativa ad una ipotesi, se non interamente nuova, almeno

---

[13] Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure, del Prof. SCHIAPARELLI, Milano, Hoepli 1898.

[14] Cfr. ANTONIO GARBASSO, Fisica d'oggi, filosofia di domani (Milano 1910) – Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes, von Dr. LUDWIG BOLTZMANN. Leipzig, 1891.

esposta sotto forma nuova, giacchè l'autore vi ha applicato il suo modello cimentandolo subito alla prova.

Anche coloro che sono appena iniziati alle più elementari nozioni di geometria sanno che le linee si classificano; che abbiamo per esempio la retta, il cerchio, e che le curve appartenenti alla famiglia delle coniche si distinguono nella ellisse, nell'iperbole e nella parabola. Lo Schiaparelli ha cercato di stabilire un parallelo fra il modo col quale possono classificarsi le curve appartenenti ad una stessa famiglia e un sistema qualunque di enti della natura organica aventi certi caratteri comuni e raccolti sotto una medesima divisione, sia poi questa designata col nome di ordine, di classe, di regno.

Tutte le curve di una stessa famiglia soddisfano, al pari degli esseri organizzati, alla legge di correlazione fra le parti, e ciascuna dipende dai valori di certi parametri che possono supporsi individuare un punto, onde il passaggio da una forma ad un'altra può caratterizzarsi col movimento di questo.

Se si ammette che la natura degli esseri organici possa individuarsi mediante analoghi parametri l'ipotesi di Darwin sulla trasformazione delle specie trova una immagine o un modello in un simile movimento rispondente in modo poco meno che esclusivo alla legge della selezione naturale, fondata sulla lotta per l'esistenza.

Ma lo Schiaparelli ravvisa nel mondo inorganico, come in quello organico, una legge generale che lo induce a modificare l'edifizio Darwiniano aggiungendovi una nuova ipotesi, con che giunge a ciò che chiama il principio dell'evoluzione regolata o a tipi fissi.

Nel regno inorganico egli vede infatti emergere dal fondo generale dei fenomeni, una spiccata tendenza alla creazione di tipi specifici ben determinati e distinti l'uno dall'altro, le cui serie o classi procedono per differenze notabili e non per gradazioni insensibili, e questa stessa tendenza gli apparisce ancor più manifesta nel regno organico. Quindi nel suo schema geometrico, egli pone in evidenza delle serie discrete di punti, i quali corrispondono alle forme che sono predestinate a dare il tipo di quelle specie, che per un complesso di circostanze a noi ignote, sono le sole possibili. Colla nuova ipotesi il moto che rappresenta la evoluzione cessa dall'esser libero come nella ipotesi pura Darwiniana; ma resta vincolato da questi punti fissi, l'allontanamento dai quali ingenererebbe delle speciali reazioni paragonabili alle forze elastiche.

Queste considerazioni sopra una delle questioni più vitali che agiti le menti sono così intimamente collegate al modello geometrico, che non si saprebbe immaginare alcun modo di esprimerle senza ricorrere al linguaggio che esso spontaneamente offre.

Basterebbe questa sola circostanza per rendere il tentativo dello Schiaparelli meritevole della più alta considerazione, giacchè non è poca cosa l'offrire ad una scienza un linguaggio, specialmente quando esso ha le sue scaturigini da una fonte sì pura come quella geometrica. Quante teorie son passate e per i più son sepolte nell'oblio; pur di loro resta ancora un vestigio che dimostra che non passarono inutili sulla terra. È sufficiente che esse abbiano foggiato un termine solo del nostro linguaggio, perchè possa dirsi che una lontana scintilla della loro esistenza anima anche oggi la gran fiaccola del sapere, onde qualche cosa di loro, attraversando i secoli, vive sempre utilmente.

*
* *

L'opera dello Schiaparelli però, più che risolvere, apre ed aggiunge una nuova e particolare questione alle tante che già tengono il campo della biologia; ora anche i più accaniti avversari della scuola biometrica non posson negare che questa si è prefissa di dar risposta alle innumerevoli domande ed ai mille problemi che son nati e si affollano in seguito ai concepimenti grandiosi di Lamarck, Geoffroy Saint-Hilaire e Darwin, partendo da osservazioni e misure, e giovandosi per discuterle, o di metodi già noti, o di nuovi metodi che essa va creando. L'opposizione contro di essa mira piuttosto a colpire le applicazioni, forse troppo particolari che sono state fatte e alcuni resultati, che non il metodo matematico per sè stesso, il quale ne forma la base. Ma è appunto questo che noi desideriamo oggi porre in evidenza[15].

[15] Vedi: GEORG DUMACKER, Die Methode der Variations-statistik (*Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen* di W. ROUX, VIII, 1899). – C. B. DAVENPORT: Statistical methods. New-York, 1899. – Cfr. Las Matématicas y la Biologia por ANGEL GALLARDO

Nessuno meglio del Pearson ha mostrato le ragioni per cui la nuova via fu tentata, e nessun altro ne ha più nettamente delineato lo scopo e indicata la portata[16].

È necessario, secondo il Pearson, liberare la mente, nello stato presente delle nostre cognizioni, dall'idea di un meccanismo della eredità e rinunciare alla speranza di ottenere una relazione matematica fra ogni singolo genitore ed ogni singolo discendente. Le cause dell'eredità naturale, nei casi speciali, sono talmente complesse da non ammettere una esatta trattazione. Si deve quindi incominciare dall'esame in massa di un numero grandissimo di casi, discendendo soltanto poi di mano in mano a classi sempre più limitate; e non si deve mai stabilire regole generali desumendole da singoli esempi. In altri

---

(*Anales de la Sociedad Scientifica Argentina,* t. LI). Buenos Ayres, 1901. – I metodi somatometrici in Zoologia di G. CATTANEO (*Riv. di biologia generale*, Aprile-Maggio 1901). – Vedi gli articoli dei Prof. CAMERANO negli Atti dell'Acc. di Torino 1900-01 e quelli del Prof. ANDRES nei Rend. Ist. Lomb. 1897-901. – J. LUDWIG ha pubblicato nei tomi XLIII e XLIX della *Zeitschrift für Math. and Physik* estese bibliografie sugli studii biometrici. A cominciare dall'anno 1901 è comparso il giornale *Biometrika*, il cui scopo è quello di raccogliere e diffondere le ricerche biometriche (*Biometrika. A journal for the Statistical study of Biological Problems*. Founded by W. R. F. WELDON, FRANCIS GALTON and KARL PEARSON. Edited by KARL PEARSON, Cambridge, University Press.).

[16] Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III Regression, Heredity and Panmixia by KARL PEARSON (*Phil. Transaction of the R. Society of London S. A.*, CLXXXIX), London, 1897.

termini bisogna procedere coi metodi statistici, non con la considerazione di casi tipici. Ciò forse può scoraggiare oggi il medico pratico a cui interessa, per esempio, l'eredità morbosa in una speciale famiglia molto più che una media ed una probabilità riguardante un'intiera classe di persone. Ma d'altra parte tutto dimostra che nello studio dell'eredità, come in quello della variazione, ci troviamo di fronte ad un numero grandissimo di piccole cause che agiscono tutte contemporaneamente, nè queste cause è possibile sceverare.

Quindi per orientarsi non vi è altro mezzo che ricorrere a quei procedimenti, che in tutte le questioni analoghe han giovato in modo così manifesto: ai procedimenti cioè fondati sul calcolo delle probabilità.

È questo il ramo delle matematiche più singolare e curioso. Se analizziamo un giudizio qualsiasi della nostra mente noi possiamo esser certi di trovarci sempre, più o meno nascosto, un computo di probabilità. Si potrebbe dire in certo modo che l'uomo più semplice, il quale attende al mattino il levar del sole, deve la sua fiducia di veder sorgere il giorno, ad un'applicazione inconsciente del teorema dei grandi numeri di Bernouilli. Tuttavia la scienza delle probabilità è la sola parte delle matematiche i cui principii non son posti rigorosamente e son tuttora aperti alla critica ed alla discussione.

Su qual solida base giace per esempio la proposizione fondamentale della teoria degli errori? Eppure tutti ci credono, disse un giorno il Lipmann al Poincaré, perchè gli sperimentatori si immaginano che essa sia un teorema di matematiche, mentre i matematici ritengono che sia un fatto sperimentale.

Ma qualsiasi fiducia noi riponiamo nelle sue basi, è indubitato che la teoria delle probabilità ha reso e rende a tutte le scienze incalcolabili ed incontestati benefici.

L'enumerarli soltanto, come il discutere le questioni generali e le apparenti contraddizioni a cui abbiamo ora accennato, ci porterebbe troppo lontano.

Vediamo piuttosto, senza scendere a nessun particolare, con un esempio, come la nuova scuola tratta uno dei problemi che essa ha preso ad esaminare.

Immaginiamo un gran numero di individui di una certa specie. Se le loro forme si aggrupperanno o addenseranno attorno ad un tipo medio, avremo che man mano che ci discosteremo da questo, gli individui si faranno più rari. Il Galton rappresenta ciò graficamente misurando un organo e costruendo la curva che esprime la relazione che passa fra la grandezza di esso e la maggiore o minore abbondanza corrispondente di individui. Si trova così una linea che i geometri chiamano curva degli errori o della frequenza, e che i cultori della statistica denominano «del Quetelet». Un tale insieme di individui prende il nome di gruppo monomorfico.

Però può avvenire, per un certo insieme di esseri, che costruendo la curva come abbiam detto, essa non resulti una linea di frequenza: ciò significa che gli individui, anzichè attorno ad uno, si addensano attorno a due o a più tipi distinti, ossia che la curva può decomporsi in due o più curve di frequenza. Il gruppo si chiama allora dimorfico o polimorfico[17].

La scomposizione di un gruppo polimorfico in quelli elementari che lo costituiscono, divien così una questione puramente geometrica che il Pearson ha in parte risoluto, ed essa corrisponde alla discriminazione di una specie nelle sue varietà[18]. Se possiamo seguire una tale decomposizione col tempo e vedere come avviene il passaggio di un gruppo da monomorfico a polimorfico o viceversa, e anche semplicemente se possiamo scoprire la tendenza alla decomposizione o alla ricomposizione avremo colto con esatti particolari un dato elementare e fondamentale della evoluzione, da cui le questioni di variazione e di regressione, di continuità o discontinuità nelle specie, riceveranno un lume inatteso.

Ma vi ha di più: una curva di frequenza, pur conservandosi tale, può assumere forme diverse, o, come si dice, possono cambiare i parametri che la individuano. Il riconoscere le variazioni dei parametri corrispondenti ad un gruppo ed ai suoi sottogruppi nelle

---

[17] Cfr. Materials for the Study of Variation treated with special regard to Discontinuity in the Origin of Species by WILLIAM BATESON, London, 1894.

[18] Contributions to the Mathematical Theory of Evolution by KARL PEARSON (*Phil. Trans. of the R. Society of London (A)*, CLXXXV. London, 1895). – La soluzione data dal PEARSON vale solo per la decomposione di un gruppo dimorfico; il Prof. DE HELGUERO ha dato una interessante semplificazione del metodo di PEARSON (*Biometrika* IV, 1, 2 Giugno 1905).

successive generazioni, le correlazioni fra i parametri corrispondenti ad organi diversi, costituisce già al giorno d'oggi un capitolo esteso e complesso nel quale le sottili considerazioni di Laplace e di Bravais[19] sulle probabilità trovano importanti applicazioni.

È in questo modo che possono stabilirsi definizioni matematiche degli elementi fondamentali della scienza dell'eredità e della selezione, così secolare come periodica, onde questi concetti appaiono escire dalla nebbia in cui si trovano avvolti e delinearsi precisi e determinati nella nostra mente.

Si sono già ottenuti in questo campo sopra soggetti di varia natura resultati altamente interessanti. Così, per esempio, Pearson ha trovato che i caratteri morali si trasmettono ereditariamente colla stessa intensità di quelli fisici[20]. Egli ha pure scoperto che le razze civili sono più variabili di quelle selvagge[21]. Davenport ha studiato la filogenia e la distribuzione geografica di certi animali[22], Dumcker la simmetria degli animali aventi

---

[19] Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point, par A. BRAVAIS (*Memoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, t. IX). Paris, 1846.

[20] On the inheritance of the mental and moral Characters in Man and its Comparison with the inheritance of the physical Characters. *The Huxley Lecture for 1903*.

[21] The Chames of Death and other Studies in evolution, 2 vol., London, Arnold.

[22] Quantitative Studies in the Evolution of Pecten. *Proc. of the Amer. Academy of Arts and Sc.* Companion of some Pectens from

simmetria bilaterale[23], De Vries gli ibridi e le mostruosità nei vegetali[24], Ludwig i caratteri specifici di varie specie vegetali[25]; e si potrebbero citare una gran quantità di altre notevoli ricerche per le quali rimando alle speciali bibliografie[26].

*

* *

---

the East and the West Coasts of the U. S. – *Reprinted from the Mark Anniversary, 1903*, ecc.

[23] Symmetrie und Asymmetrie bei bilateralen Thieren in *Arch. Entw.-mech.*, XVII, 533-682.

[24] Sur la loi de disjonction des hybrides. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris*, 26 Marzo 1900. – Sur l'origine expérimentale d'une nouvelle espèce végétale, ibid., 1900. – La loi de Mendel et les caractères constants des hybrides, ibid., 2 feb. 1903. – Die Mutationslehre; Veit, Leipzig 1902, 2 vol. ecc.

[25] Beiträge zur Phytarithmetik, *Bot. Centralbl.*, LXXI, 1897. – Ueber Variationskurven. ibid., LXXV, 1898. – Variationstatistische Probleme und Materialen. *Biom.*, I, 11-29, 316-8, ecc.

[26] Negli ultimi anni gli studii relativi a questo argomento furono molto numerosi ed il citarli in particolare escirebbe fuori dall'indole di questo articolo. Oltre al periodico già citato (*Biometrika*, Cambridge: vedi pag. 25), al *Journal of Genetics* (Edited by W. BATESON and R. C. PUNNETT, Cambridge), a *The Eugenics Review* (London) e ad altri, la fonte più completa a cui ricorrere per indagini bibliografiche è l'*International Catalogue of Scientific Literature* che si pubblica dall'Internat. Council presso la Royal Society di Londra. Vedi i Vol. L. (Biologia generale), M. (Botanica). N. (Zoologia), P. (Antropologia), Q. (Fisiologia), ai Cap. Variazione, Evoluzione, Metodi ed apparecchi (Pesi e misure, biometrici) ecc.

Nella vasta congerie di fatti che si presentavano, due più che altro, i più salienti, ho cercato di mettere in luce: i grandi passi, cioè, fatti dall'economia politica negli ultimi tempi, da che quel ramo di essa, che Cartesio e Lagrange non esiterebbero a chiamare economia analitica, è stato costituito come un corpo a sè di scienza; e l'inizio ancor più recente della biologia a ricerche quantitative e statistiche.

Fanno riscontro nel campo delle matematiche ai nuovi studi economici i procedimenti infinitesimali, che gli economisti impiegano già con maniera sicura; ed al nuovo indirizzo della biologia i metodi dei grandi numeri e del calcolo delle probabilità, metodi che una intera scuola ha rinnovellati.

Col primo di questi potenti e mirabili strumenti la nostra mente spinge acutamente lo sguardo a scrutare i misteri dell'infinitamente piccolo; coll'altro invece mira da lunge, cercando di abbracciare gli ampi contorni di una massa infinitamente grande di fatti.

Nello stesso modo che il microscopio ed il telescopio hanno svelato all'istologo ed all'astronomo due mondi in cui l'occhio non era penetrato, così questi metodi matematici aprono al pensiero orizzonti nuovi e sconosciuti; come quei due apparecchi ottici, così questi due strumenti dell'analisi si differenziano fra loro in parte, ed in parte si rassomigliano. Ma vi è una cosa che rende il giuoco di essi di gran lunga più meraviglioso di quello d'ogni immaginabile sistema di lenti, ed è che ambedue riescono a mostrare soltanto ciò che è utile vedere, e più che altro servono a nascondere tutto il superfluo che confonderebbe lo sguardo.

L'accennare ancora le speranze, forse i sogni dell'avvenire coll'impiego di altri metodi, simili per esempio a quelli energetici, non ancora tentati in modo positivo nelle scienze sociali e biologiche, mi condurrebbe fuori del terreno in cui ho desiderato di rimanere. Porrò invece fine alle mie parole con un accenno al passato.

Se gettiamo lo sguardo sul nascere e sullo svolgersi dei pensieri più originali e più fecondi, che hanno trasformato e vivificato l'umano sapere, riconosciamo subito qual parte cospicua di essi è dovuta al genio italiano. Senza abbandonare quei rami di scienza di cui oggi abbiamo discorso, ricorderò che fu Giovanni Ceva nel XVII secolo che per primo concepì e propugnò i concetti e i principî di cui si vale oggi la economia, e che per trovare i più lontani vestigi del calcolo delle probabilità è d'uopo risalire ad un commentatore di Dante del XIV secolo.

E da quelle epoche lontane si svolge attraverso i secoli fino ad oggi, la serie di coloro che presso di noi condussero al movimento moderno nel quale l'Italia prende sì larga parte.

BETTI, BRIOSCHI, CASORATI

TRE ANALISTI E TRE MODI

DI CONSIDERARE LE QUESTIONI D'ANALISI

Conferenza fatta in Parigi il 6 agosto 1900 alla seduta inaugurale del II Congresso internazionale dei matematici e pubblicata nel *Compte rendu* del detto Congresso. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Nell'autunno del 1858 tre giovani matematici Italiani partivano insieme per un viaggio scientifico allo scopo di visitare le Università straniere e mettersi in rapporto con i più celebri scienziati esteri in modo da conoscere le loro idee, e da rendere noti al tempo stesso i propri lavori scientifici.

Questo viaggio di Betti, Brioschi e Casorati segna una data meritevole di ricordo: l'Italia stava per costituire la propria unità e prender parte ai lavori scientifici internazionali apportandovi il proprio contributo.

Tanto più volentieri rammento questa data oggi che un sì gran numero di matematici si riuniscono per un fecondo scambio di idee.

Non si potrebbero comprendere nè seguire efficacemente i progressi dell'analisi in Italia nella seconda metà del secolo XIX senza approfondire l'opera continuata per lunghi anni con pazienza ed energia dai tre geometri, di cui ho adesso ricordati i nomi, i cui sforzi vennero efficacemente secondati da numerosi allievi. Si deve in gran parte al loro lavoro, al loro insegnamento, allo zelo infaticabile col quale spinsero i giovani matematici Italiani alle ricerche scientifiche, all'influenza da essi esercitata nell'organizzazione degli studi superiori, ai rapporti che stabilirono fra il nostro paese e i paesi stranieri, se in Italia nacque una scuola moderna di cultori dell'analisi.

Eppure basta leggere una memoria sola d'ognuno dei tre matematici per intendere quanto fossero diverse le loro facoltà intellettuali; d'altra parte le loro vite sono trascorse in ambienti ed in modi differenti. Tutto ciò spiega l'orientazione delle loro menti ed il perchè essi considerassero la scienza da punti di vista diversi. Ma appunto perciò l'attività loro nel suo insieme risultò più utile e più completa, poichè essi fecero convergere correnti divergenti sui giovani matematici Italiani e poterono sviluppare nelle loro menti virtù matematiche di diversa natura.

Betti, Brioschi, Casorati sono scomparsi l'un dopo l'altro ed a poca distanza, ma il ricordo ne rimane sempre ed i germi che essi sparsero non andarono perduti. Noi conserviamo verso la loro memoria sentimenti di gratitudine, di affetto e di venerazione. Ed io ho creduto un dovere, essendo stato chiamato a parlare in questa riunione, di rievocarne l'opera.

*

* *

Chi aveva veduto il Brioschi nei suoi ultimi anni non poteva scordarne l'aspetto. I suoi bianchi capelli, l'età veneranda non si accordavano col lampo dei suoi occhi che conservavano la vivezza giovanile.

Ma è appunto da questo contrasto che risaltava la sua individualità, caratterizzata da un'indole sempre giovane unita ad una mente presto divenuta matura.

Egli nacque nell'antica capitale della Lombardia[27] che doveva diventare il più importante e il più ricco centro industriale d'Italia. Ingegnere dapprima, fu presto attirato verso le matematiche pure, ed acquistò rapidamente una vasta conoscenza delle opere classiche di matematica, tanto che all'età di 25 anni fu chiamato all'Università di Pavia come titolare della cattedra di meccanica. Da quell'epoca incominciarono la sua produzione scientifica e la sua influenza nell'insegnamento, le quali non cessarono che il giorno della sua morte.

Una nuova fase della vita del Brioschi s'iniziò colla costituzione del regno d'Italia, poichè l'attività sua si volse subito verso la politica, nella quale ebbe parte notevole. Intuendo l'avvenire industriale del suo paese, fondò e organizzò l'Istituto tecnico superiore di Milano, del quale restò direttore per tutta la vita. Pur tuttavia continuò i suoi lavori scientifici, divenne direttore degli «Annali di Matematica», fu presidente dell'Accademia dei Lincei, mentre compiva funzioni politiche al Senato, s'occupava di lavori pubblici e d'ingegneria, dando prova, in tal modo, d'una attività rara ed ammirevole e di uno spirito versatile e sempre pronto a nuove imprese.

[27] Francesco Brioschi nacque il 22 dicembre 1824 e morì il 13 dicembre 1897. Le sue opere furono pubblicate da uno speciale comitato in 5 volumi. Milano, Hoepli, 1901-1909.

*
* *

La vita del Betti fu calma quanto quella del Brioschi fu agitata. Il Betti nacque[28] in un piccolo villaggio di montagna in Toscana, i cui abitanti semplici ma intelligenti hanno un gusto naturale per l'arte e per la poesia. Da bambino perdette il padre, e la madre ne curò amorosamente l'educazione. Nella tranquilla Università di Galileo fu allievo del Mossotti e incominciò la sua carriera insegnando le matematiche elementari in un piccolo Liceo toscano. E solo all'età di 34 anni ebbe la cattedra all'Università di Pisa che non abbandonò per tutta la vita, riunendo negli ultimi tempi le funzioni di professore con quelle di direttore della Scuola Normale Superiore.

Enrico Betti non ricercò mai le cariche pubbliche, e benchè deputato e negli ultimi suoi anni senatore, non prese mai una parte attiva, come il collega Brioschi, alla vita politica. Durante i pochi mesi nei quali fu sotto-segretario di Stato per l'Istruzione pubblica rimpiangeva la vita universitaria, la calma di Pisa, le vacanze campestri passate in meditazioni solitarie o in colloqui coi suoi più fidi amici.

Egli non amava infatti profondamente che una cosa sola: la ricerca scientifica disinteressata e mirante ad un

---

[28] Enrico Betti nacque il 21 ottobre 1823 e morì l'11 agosto 1892. Le opere matematiche del Betti vennero pubblicate dall'Accademia dei Lincei in 2 volumi. Milano, Hoepli, 1903-1915.

elevato fine filosofico; ricerca non intesa a procurare soddisfazioni all'amor proprio, incurante degli effetti che poteva produrre sugli altri, indipendente anche da ogni immediato fine didattico.

Allorchè aveva soddisfatto il desiderio di giungere ad una scoperta e l'aveva collegata a principii generali in modo da ottenere nella sua mente un sistema logico, il suo scopo era raggiunto, e molto spesso egli non si dava la pena di rivelarne i risultati al pubblico, o talora, accintosi ad esporli, interrompeva l'opera, perchè nuove idee l'orientavano in una diversa direzione, e gli era penoso di non seguire le nuove ispirazioni.

Simile in questo a qualche grande artista della sua Toscana che una volta abbozzate nel marmo le linee di una figura ne abbandonava i particolari perchè il suo genio era ormai sodisfatto.

*
* *

Casorati visse quasi esclusivamente per i suoi allievi e per la sua scuola, ed infatti le opere sue hanno quasi tutte quella speciale impronta che rivela nell'autore il fine di rischiarare qualche punto oscuro o di semplificare qualche risultato o di trattare in maniera critica e metodica un insieme di dottrine.

Ma quale originalità in quella critica, quanta abilità nell'esporre quelle teorie che si rinnovellavano in virtù dello spirito ch'egli v'infondeva, quanti risultati nuovi ed inattesi scaturivano da una sua semplice osservazione!

Il Casorati[29] non abbandonò mai la sua città natale, Pavia, sede dell'antica Università, nella quale suo padre medico aveva pure insegnato e ove egli era stato prima allievo di Bordoni e Brioschi, quindi loro assistente. Percorse tutti i gradi universitari, insegnando da prima la geodesia, poi l'algebra e da ultimo l'analisi infinitesimale, la cui cattedra conservò fino alla morte, ed in tutti questi insegnamenti i suoi corsi erano seguiti ed ascoltati da numerosi, appassionati uditori.

Nella sua mente l'opera di scienziato e quella di maestro si collegavano mirabilmente insieme ed erano indissolubilmente unite ed armoniosamente accordate, tanto che non era raro il caso ch'egli abbandonasse repentinamente l'argomento d'un corso perchè era passato da un lavoro scientifico ad un altro.

*
* *

Le poche parole che ho dedicato ad esporre la vita dei tre geometri e le loro tendenze mi sembra che rivelino chiaramente il loro diverso meccanismo mentale e facciano comprendere come essi siano stati condotti a considerare l'analisi, sia in generale, sia nelle particolarità, in maniera del tutto differente.

Senza esaminare partitamente (il che sarebbe troppo lungo e difficile) le loro singole opere che ad ogni passo ci fornirebbero esempi di quanto ho dichiarato, esami-

---

[29] Felice Casorati nacque il 17 dicembre 1835 e morì l'11 settembre 1890.

niamo un ramo dell'analisi nel quale i tre geometri hanno lasciato tracce profonde.

Di tutte le teorie matematiche moderne quella che negli ultimi tempi ha avuto il maggior sviluppo è indubbiamente la «teoria delle funzioni». Il secolo che adesso finisce potrebbe chiamarsi, dal punto di vista matematico, il secolo della *teoria delle funzioni*, come il secolo XVII potrebbe essere denominato il secolo del *calcolo infinitesimale*.

Ed infatti abbiamo veduto negli ultimi anni tutti i rami dell'analisi contribuire al progresso di questa teoria, mentre da essa le matematiche attingevano le loro più potenti risorse. Perfino certe dottrine e certi metodi della geometria sintetica, sorti in contrapposto e mossi da uno spirito di reazione contro i procedimenti analitici, si sono poco a poco accostati alla teoria delle funzioni legandosi ad essa in modo indissolubile.

Noi non approfondiremo la storia di questa teoria tante volte e da tanti abili geometri rievocata. Ma, gettando uno sguardo sul suo progressivo sviluppo, riconosciamo immediatamente tre fasi diverse che caratterizzano tre periodi della sua evoluzione.

Dapprima si elaborarono teorie particolari il cui svolgimento mostrò la necessità di creare una teoria generale delle funzioni trascendenti ed algebriche che abbracciasse tutti i casi noti e ne prevedesse i nuovi. Durante questa prima fase non esistevano ancora metodi uniformi e conveniva risolvere ogni questione imaginando, caso per caso, i metodi che si presentavano più spontanei ed erano più adattati. Conveniva, in mancanza di principii generali, ricorrere a lunghi e penosi calcoli, ma da essi appunto scaturirono poi, poco a poco, quei principii nella loro limpida semplicità.

I grandi nomi di Eulero, Lagrange, Abel e Jacobi personificano questa prima fase che può dirsi il periodo eroico della teoria delle funzioni, durante il quale fu creata la teoria delle funzioni ellittiche e si gettarono le prime basi di quella delle funzioni Abeliane.

Ma a questo periodo di grandi scoperte, dominato dalla curiosità di giungere rapidamente in possesso delle verità che si svelarono in seguito ad audaci intuizioni, successe una fase nella quale predominarono concetti filosofici e si cercò un metodo generale capace di abbracciare tutto il corpo di dottrina e di racchiuderlo in un unico quadro.

In questa seconda fase predominarono le celebri opere di Cauchy, di Weierstrass e di Riemann i quali, per raggiungere lo scopo, risalirono alle sorgenti stesse dei concetti fondamentali della matematica e sostituirono, poco a poco, le idee ai calcoli.

In un'ultima fase le teorie trovarono alfine le loro più importanti e più feconde applicazioni, la forma più appropriata per la loro diffusione e l'espressione più conveniente per l'esposizione didattica, dopo esser state sottoposte ad una revisione ed a una discussione dominate dal più fine spirito critico che la scienza abbia mai conosciuto.

Queste tre fasi che abbiamo cercato di caratterizzare brevemente furono di fatto successive nella storia della scienza, ma esse corrispondono anche a tre modi diversi di concepire le questioni analitiche tanto che i matematici odierni si riattaccano inconsciamente all'una od all'altra a seconda delle loro qualità mentali più intime e profonde.

*
* *

Brioschi, ingegnere ed uomo pratico, abituato a conseguire lo scopo senza preoccuparsi troppo dei metodi, rimase sempre fedele ai vecchi procedimenti di Eulero e di Jacobi.

Lunghi calcoli non costituivano un ostacolo alla sua infaticabile attività e la sua mente abituata a sbrogliare tante cose inestricabili della vita reale, vedeva attraverso una fitta rete di formule come attraverso un limpido cristallo.

Ecco come parla di lui Beltrami col suo fiorito linguaggio:

«A quel modo che sotto le mani dell'abile musicista tra mezzo al vertiginoso rincorrersi delle note ed al succedersi irrequieto delle modulazioni armoniche spicca sovrana la melodia che incede tranquilla e serena, così egli (il Brioschi) sapeva fare scaturire netto e preciso il resultato analitico cui mirava da un apparato formidabile di simboli artificiosi ma riboccanti di eleganza e di artistica simmetria».

È perciò che Brioschi rimase completamente estraneo al movimento che caratterizzò il passaggio dalla prima alla seconda fase. Egli anzi disdegnava i più moderni procedimenti. Più volte lo intesi lamentarsi dei matematici d'oggidì che non hanno più l'abitudine nè la pazienza per i lunghi calcoli e talvolta io rimasi sorpreso sentendo dalla sua bocca lodi prodigate ad un modesto lavoro perchè la complicazione del calcolo algebrico non aveva spaventato l'autore.

Il Brioschi stesso fece la traduzione ed introdusse in Italia il trattato delle funzioni ellittiche di Cayley, modellato sul vecchio stampo e la morte lo colse mentre pubblicava un'opera sulle funzioni iperellittiche, condotta anch'essa con quegli stessi metodi che egli aveva prediletti fin dal principio della sua carriera.

*

* *

Il Betti possedeva ciò che al Brioschi mancava e questi aveva quanto faceva difetto al Betti. Forse unendo insieme le loro menti si sarebbe avuto uno spirito privo di qualsiasi lacuna.

Il desiderio di raggiungere uno scopo non produceva nel Betti quella spinta continua ed irresistibile che faceva superare al Brioschi, senza deviare, qualsiasi ostacolo. Per la sua indole fine ed artistica gli era più grato pensare che non lavorare in maniera automatica o meccanica e perciò quei lunghi calcoli che formavano la delizia del rude lombardo erano a lui insopportabili; anzi qualora egli si fosse messo ad eseguirli avrebbe forse corso il rischio di commettere degli errori, se non lo avesse soccorso quel suo finissimo intuito matematico che non lo abbandonava mai.

Il suo ingegno largo si compiaceva invece dei sistemi filosofici e ciò spiega senz'altro perchè egli si ricolleghi alla seconda fase di cui abbiamo parlato ed a coloro che ne furono promotori. E sebbene i metodi di Weierstrass e di Riemann siano del tutto differenti fra loro e da alcuni anzi considerati come completamente opposti, l'opera del Betti si riconnette così all'uno come all'altro.

Fu un tratto di genio del Betti l'avere, indipendentemente dal Weierstrass, e primo fra tutti, svolto la teoria della decomposizione delle funzioni intere in fattori primari. Egli pubblicò i suoi resultati nella celebre memoria del 1862[30], la quale, non solo racchiude il concetto fondamentale della scoperta, ma ne contiene anche le più importanti e feconde applicazioni alle funzioni euleriane, trigonometriche ed ellittiche.

Solo quindici anni dopo, comparve la memoria del Weierstrass il quale da lunghi anni continuava in silenzio le sue ricerche. Spetta dunque indubbiamente al Betti il merito della scoperta e delle sue applicazioni.

Ma, allorchè questi venne a conoscenza della pubblicazione straniera, non pensava più alla sua antica memoria del 1862 che aveva lasciata incompleta in alcuni

[30] *La teorica delle funzioni ellittiche*, Annali di matematica pura ed applicata, § I, tomi III e IV. Opere matematiche di Enrico Betti, pag. 228, Tomo I.

punti secondari. Un nuovo ordine di idee suggerito dalle ricerche Riemanniane aveva deviato il Betti dalla primitiva via seguita.

Riemann era venuto in Italia nel 1863 e, durante il suo soggiorno in Pisa, si era legato di amicizia con il Betti che ne abbracciò le idee in maniera tale che da quel momento in poi la maggior parte dei suoi lavori risente dell'influenza esercitata su di lui dallo scienziato straniero.

E così, alla primitiva sua teoria delle funzioni ellittiche, considerate come rapporti di funzioni intere, che egli costruiva mediante la decomposizione in fattori primarî, il Betti ne sostituì una nuova, in cui la costruzione era invece fondata sull'impiego delle caratteristiche al contorno del parallelogramma dei periodi. Quest'ultimo metodo egli tuttavia non pubblicò mai, di modo che soltanto i suoi allievi di Pisa n'ebbero conoscenza; nondimeno, come contributo alla storia di questo ramo dell'analisi, sarebbe utile che esso venisse alla luce, anche se appaia sommamente artificioso e non adatto ad una chiara e suggestiva esposizione didattica.

È ben singolare che una sola mente abbia concepito due teorie così diverse senza preferire l'una all'altra, abbandonando anzi la prima e non dandosi nemmeno la pena di pubblicare la seconda.

Ora questo, se è per noi una nuova prova della sua grande genialità e ricchezza d'idee, disgraziatamente non ha giovato alla fama del Betti; poichè la sua indifferenza per ciò che non fosse l'intima soddisfazione d'una nuova scoperta avvolse nell'oblio risultati e concetti nuovi non maturi per la maggior parte dei matematici d'allora, concetti la cui importanza e fecondità, per quanto concerne specialmente il primo metodo, si son rivelati altissimi solo dopo i lavori del Weierstrass e della sua scuola.

Ma, l'esser riescito a creare per un medesimo argomento due teorie così opposte, trova la sua spiegazione, non solo nella versatilità dell'ingegno, ma anche in un fatto di natura più intima che tocca al meccanismo stesso della sua mentalità: cioè che egli algebrista e fisico matematico ad un tempo, dapprima fu condotto ai metodi inspirati all'algebra, poi fu maggiormente attratto da quelli collegati alla fisica.

Tali infatti appaiono, se ne esaminiamo il senso profondo, i metodi Riemanniani. Essi non sono altra cosa che un trasporto di procedimenti già iniziati nel campo dell'elettricità in quello dell'analisi e della teoria delle funzioni. Questi metodi non potevano a meno di suscitare nel Betti, appassionato cultore della fisica teorica, il più vivo entusiasmo e il desiderio di impiegarli praticamente. La stessa conversazione con lui rivelava l'abitudine di riconnettere i concetti analitici a quelli sui fenomeni naturali. Le idee divenivano nella sua mente più chiare e più suggestive allorchè andavano al di là dello stretto significato analitico per penetrare nel più vasto campo della filosofia naturale, allo stesso modo che per altri geometri le formule diventano più espressive allorchè rappresentano dei fatti geometrici che conferiscono loro un carattere concreto.

Fu quindi, come per un sentimento di reazione, ch'egli abbandonò i procedimenti seguiti da prima che lo avevano condotto ai notevoli risultati dei quali abbiamo parlato; metodi che oggi possiamo assicurare essere più proprii per l'applicazione ch'egli aveva in vista alle funzioni ellittiche.

Ma il Betti non ebbe coscienza di ciò. Li aveva impiegati perchè era stato condotto ad essi dalla iniziazione algebrica dovuta alle sue ricerche più giovanili, ed in realtà la sua prima teoria delle funzioni non può caratterizzarsi che col nome di *una pura teoria di tipo algebrico*. Ma, come già abbiamo detto, tale iniziazione algebrica non ebbe più presa sullo spirito di lui allorchè la sua indole di fisico prese il sopravvento sotto l'influenza esercitata da Riemann.

*
* *

Lo spirito critico del Casorati, la sua passione per l'insegnamento, la sua tendenza alle applicazioni ne ricollegano il nome alla terza fase di cui parlammo.

Nel 1868 egli cominciò a scrivere la poderosa opera sulle funzioni di variabili complesse di cui però non pubblicò che il primo volume[31]. Ma esso racchiude una introduzione storica e critica di una lettura così

[31] *Teoria delle funzioni variabili complesse* esposta dal dott. Felice Casorati. Pavia, 1868.

piacevole e suggestiva e dettata con un senso di così vivo e profondo entusiasmo per le scoperte di cui espone la evoluzione, che costituisce una gemma preziosa della nostra letteratura scientifica. Questo entusiasmo che trabocca da ogni pagina è la causa principale del successo che ottenne quest'opera insigne. L'entusiasmo dell'autore per i grandi lavori di Cauchy, di Abel, di Legendre, di Jacobi, di Riemann e di Weierstrass, che il Casorati espone con chiarezza nelle loro linee generali e commenta con giudizio sicuro, passa irresistibilmente nel lettore, il quale così apprende e si appassiona a molti fra i più sottili e più profondi concetti della matematica moderna.

Questo libro, che servì più di qualsiasi altro a divulgare in Italia la teoria delle funzioni e a spingere ed infiammare i giovani matematici verso i più elevati studi della scienza, si sparse non solo fra i cultori dell'analisi, ma anche, per le sue precipue doti di chiarezza e di perspicuità, presso la numerosa schiera degli studiosi di geometria sintetica, mettendo a loro portata le idee fondamentali di Riemann che ebbero tanta influenza in tutta la giovane scuola dei geometri italiani. In tal modo si costituì un legame e nacquero delle correnti reciproche d'idee fra gli analisti ed i geometri in Italia, le quali tanto giovarono, in un recente periodo, al progresso delle scienze matematiche nel nostro paese.

Se il libro di Casorati sulla teoria delle funzioni rivela in lui delle qualità somme di scrittore, varie pubblicazioni collegate ad una idea che egli non abbandonò mai, e sulla quale ritornò anche nei suoi ultimi giorni, mostrano l'originalità della sua mente. Colpito dalla proposizione sulla impossibilità dell'esistenza di funzioni uniformi, aventi tre periodi distinti, egli cercò di costruirne con un numero qualsiasi di periodi, considerando funzioni con infiniti valori. È per questa via che il Casorati ha cercato di ottenere l'inversione diretta degli integrali Abeliani, ma disgraziatamente egli iniziò appena i primi passi sull'arduo cammino, non andando oltre gli studi preliminari sulle superficie di Riemann ad infiniti fogli.

Ma i suoi scritti sull'argomento non si limitano a questi soltanto. Durante tutta la sua vita numerose memorie si succedettero le une alle altre, e si può dire che non vi sia ramo notevole della teoria delle funzioni al quale egli non abbia portato un qualche utile contributo.

*

* *

Se io posso sperare d'aver dimostrato colle parole che precedono i rapporti mutui che sussistono fra gli spiriti dei tre geometri, sono ben certo di non aver potuto dare un'idea esatta del posto assoluto che ognuno di essi occupa nella storia della scienza di questi ultimi anni. E difatti ho passato sotto silenzio i lavori del Brioschi sull'algebra e sulla meccanica, quelli del Betti di algebra e di fisica matematica, quelli del Casorati sulle equazioni differenziali, perchè uscivano dal campo ove mi era prefisso di rimanere.

Ma, come dissi sino da principio, anche questi altri scritti rivelano le medesime caratteristiche già riconosciute nelle opere sopra esaminate.

Così il Betti è uno dei primi a comprendere, sviluppare e sistematizzare le idee completamente nuove introdotte dal Galois nella scienza; quelle idee che dopo aver trasformato l'algebra sono penetrate un po' dappertutto negli altri rami delle matematiche. In fisica matematica egli cerca per primo un metodo generale per l'integrazione delle equazioni dell'elasticità, e svolge nella teoria della connessione degli iperspazii ricerche riconosciute classiche. È sempre quello stesso spirito potente, filosofico e largamente comprensivo che lo guida anche in questi lavori.

E così Brioschi, che ha cominciato la sua lunga carriera con una teoria sul calore ed ha pubblicato poi il suo celebre trattato sui *determinanti*, sviluppa le teorie sugli invarianti e sui covarianti delle forme algebriche di cui fa applicazioni varie e particolari. Comprende prima di molti altri l'importanza delle ricerche geometriche di Gauss sulle superficie, s'occupa di teorie moderne geometriche ed in meccanica studia questioni statiche. Contribuisce all'impiego dei metodi di Jacobi per la integrazione delle equazioni differenziali e produce importanti lavori di idraulica. Sono perfezionamenti notevoli a teorie note, metodi posti in luce, questioni particolari ed applicazioni che vengono anche in questi altri campi magistralmente da lui trattate.

Ed infine il Casorati, con una semplice interpretazione del calcolo delle differenze finite, dà una nuova teoria delle equazioni differenziali lineari, si occupa poi di equazioni differenziali algebriche e svolge geniali osservazioni di geometria analitica ed infinitesimale che rischiarano di vivida luce oscuri problemi, facilitandone la comprensione a coloro che muovono i primi passi nel cammino della scienza.

*

* *

Ma non potrei finire questo rapido cenno sopra così vari lavori senza parlare d'un celebre problema nel quale Betti e Brioschi hanno acquistato, nei loro giovani anni, una fama imperitura. Mi riferisco alla risoluzione della equazione di quinto grado.

Indubbiamente spicca fra tutti coloro che si affaticarono intorno a quest'ardua questione il matematico francese Hermite il quale acquistò una gloria immortale risolvendola definitivamente. Ma accanto al nome di Hermite conviene ricordare quelli di Betti e Brioschi: il primo come un precursore che spinse molto lungi le sue ricerche, ma a cui mancò la forza di fare l'ultimo passo, l'altro come un continuatore dell'opera di Hermite per avere perfezionato la sua soluzione ed averla illuminata di novella luce.

Finirò con queste parole associando i nomi di Betti e Brioschi, così cari all'Italia, con quello di Hermite, così caro alla Francia, e rievocando l'episodio col quale ho cominciato il mio discorso: il viaggio del 1858, la cui data coincide con quella delle grandi scoperte che ho in ultimo ricordato. Esso segna il principio della cordiale amicizia fra gli scienziati italiani e lo scienziato francese, amicizia che ha durato quasi mezzo secolo, e fu rinsaldata dagli stessi sentimenti di devozione alla scienza e dalla medesima fiducia negli alti destini dell'umanità, simbolo dei fraterni legami fra i due paesi latini.

LE MATEMATICHE IN ITALIA
NELLA SECONDA METÀ DEL SECOLO XIX

Questo discorso fu pronunziato alla solenne inaugurazione del Congresso internazionale dei Matematici in Roma il 6 aprile 1908. Venne stampato nella *Nuova Antologia* (1° giugno 1908) e negli *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici* - Vol. I (Roma, 1909).

Nel novembre dell'anno 1860 un giovane trentenne saliva per primo la cattedra di geometria superiore nell'antica Università di Bologna.

Era l'anno medesimo in cui tante memorabili imprese ricostituivano la nazione e tanti inaspettati avvenimenti rinnovavano tutta la vita italiana. Ma l'eco degli strepiti della guerra ed il clamore che suscitava il costituirsi del nuovo regno non coprivano la voce di Luigi Cremona, il quale dalla cattedra bolognese esponeva il largo programma, che egli stesso e la scuola, che prese il nome da lui, dovevano svolgere e svolsero, e le nobili parole pronunziate nella sua prolusione volarono e si ripercossero per tutta Italia.

È con un sentimento di soddisfazione che oggi, trascorso un mezzo secolo, misurando il cammino percorso, possono rievocarsi gli alti eccitamenti che il Cremona allora rivolgeva ai giovani scienziati italiani. All'appello del nuovo professore rispondevano i sentimenti ed i voti universali in Italia; liete speranze arridevano negli animi nei quali il compiacimento per la Patria novellamente e faticosamente conquistata si associava alla aspirazione verso i più elevati ideali scientifici[32].

---

[32] Prolusione al corso di geometria superiore letta nell'Università di Bologna nel novembre 1860 da Luigi Cremona (*Il Politecnico*, 1861).

Il Betti aveva inaugurato in Pisa, pochi mesi prima, con eguali propositi, il suo insegnamento di alta analisi e geometria. A Pavia, quasi contemporaneamente, il Brioschi iniziava il corso di analisi superiore e lo stesso insegnamento a Napoli Emanuele Fergola incominciava pure in quell'anno, mentre il Battaglini dava principio, nel medesimo tempo, alle sue nuove lezioni di geometria superiore.

L'Italia ebbe allora chiara coscienza che un'alta missione intellettuale le spettava per le sue antiche tradizioni e per il posto che nuovamente veniva ad occupare nel mondo civile.

Il Matteucci, fisico di grande ingegno, che consacrò i suoi ultimi anni alla organizzazione degli studi italiani, negli albori del nuovo regno, preparando gli ordinamenti scolastici, diceva al Parlamento che una nazione la quale vuol essere libera e grande, non vive soltanto di soldati e di strade ferrate, e che male si intenderebbe l'Italia risorta a nazione se nelle arti, nelle lettere e nelle scienze, non ripigliasse quel posto che l'aveva distinta altre volte.

E Quintino Sella, che forse meglio di ogni altro raccolse nella sua grande anima i sentimenti della parte più eletta della nazione, e meglio comprese quali gravi doveri morali incombessero all'Italia il giorno in cui essa prese possesso della città eterna, al Mommsen, che gli diceva che a Roma non si sta senza avere propositi cosmopoliti, rispondeva: «Sì, un proposito cosmopolita non possiamo non averlo a Roma: quello della scienza»;

e solennemente dinanzi al Parlamento affermava: «L'Italia ha un debito d'onore verso l'umanità... la scienza per noi a Roma è un dovere supremo».

Nessuna meraviglia dunque se, nel seguire lo svolgimento delle scienze, si osserva una trasformazione improvvisa nel pensiero italiano, dovuta al rapido suo progredire e diffondersi, ed ai nuovi caratteri di cui si riveste e si arricchisce negli anni che seguono il periodo del risorgimento politico.

Presentare nei brevi termini che mi sono concessi lo sviluppo delle matematiche in Italia negli ultimi anni, ecco il compito che mi sono oggi prefisso.

Di vari elementi bisogna tener conto per ben comprendere quali furono i fattori che contribuirono al recente sviluppo degli studi presso di noi e per ben sceverare la parte che ciascuno di essi ha avuta.

Dobbiamo dapprima aver riguardo ai caratteri proprii del genio italiano rivelatisi in una lunga e non interrotta tradizione che, movendo dalle scuole dell'antichità, giunge fino al nostro secolo; esaminare poi l'effetto prodotto dai nuovi metodi di insegnare e di apprendere, e la proficua emulazione che sortì dal cozzare delle opposte tendenze. Infine è d'uopo vedere l'influenza che le scoperte dei matematici stranieri ebbero su di noi, l'azione che esercitò il carattere sempre più universale acquistato dalla scienza e la feconda virtù dei rapporti internazionali ognor più stretti e delle correnti sempre più vive di pensiero che si stabilirono.

*

* *

Con frase scultoria il Beltrami così giudica un libro del Cesàro: «Al libro spetta davvero il requisito dell'italianità, vale a dire di quel *quid* che risulta dal connubio della serietà coll'agilità della parola e del pensiero, cioè dell' elaborazione artistica del materiale scientifico»[33].

Nessuna parola più efficacemente ed in modo più sobrio e preciso potrebbe caratterizzare la produzione matematica italiana non solo recente ma di tutti i tempi.

Il sentimento artistico, inteso nel suo significato più alto e comprensivo, ha avuto ed ha una gran parte nelle scoperte geometriche. Si comprende quindi come la matematica, la scienza che non solo è la più pura e la più ideale, ma è la più schiettamente artistica delle scienze, abbia potuto trovare, sino dalle epoche lontane, un terreno favorevole per svilupparsi in Italia, ove il genio artistico è innato nelle genti e ben si comprende il carattere dell'opera matematica prodotta dagli ingegni italiani, carattere che si ravviserà nelle varie scuole e nelle diverse tendenze che avremo occasione di esaminare.

Uscirei dai limiti che mi sono prescritto se io volessi seguire la tradizione in tutto il suo lungo cammino, dal-

---

[33] Queste parole sono tolte da una lettera che il Beltrami scrisse al Cesàro. Esse vennero riportate nella biografia del Cesàro che il prof. Alfredo Perna pubblicò nel vol. XLV del *Giornale di matematiche* di Battaglini diretto dal prof. A. Capelli (Napoli, 1907).

l'epoca classica, attraverso il medio evo, il rinascimento, fino ad ora, o se anche solo mi soffermassi alla prima metà del secolo scorso, la quale segna forse il periodo più triste e più oscuro. Triste ed oscuro periodo, nel quale le discordie intestine quasi si rispecchiano nelle intransigenze e nelle intolleranze scientifiche.

È nota, per quanto ne ha scritto il Loria, la storia della scuola matematica che imperò a Napoli al principio del secolo XIX. In essa, uomini che pure erano di ingegno, avversarono le grandi scoperte di Lagrange e quanto era moderno e nuovo nella scienza, stimando opera meritoria il ricondurla indietro di parecchi secoli. È stato molte volte ripetuto che al Battaglini, prima del 1860, non venne affidato nessun pubblico insegnamento; in un concorso egli era rimasto soccombente e la ragione fu che nella trattazione del tema si era inspirato alle nuove e feconde idee del Salmon, anzichè agli antichi metodi di Newton.

Si racconta poi, e mi permetto di ripeterlo come un indice dei tempi, che in Toscana verso il 1835 un cultore di diritto ecclesiastico (studioso anche di lingue orientali) ed un algebrista chiesero le rispettive cattedre dell'Università. Nell'assegnarle vennero per errore scambiate; il matematico fu nominato professore di gius canonico e il giurista ebbe l'algebra. Le proteste degli interessati a nulla valsero perchè i «motupropri» di nomina erano ormai firmati e non si volle mutarli. Il matematico rinunziò, ma il giureconsulto orientalista insegnò algebra, ripetendo a memoria il Francoeur, per tutta la vita.

Nondimeno sarebbe cosa ingiusta il tacere che in questo intervallo di tempo luminosi sprazzi di luce di tratto in tratto si manifestarono in Italia; nomi illustri ed opere ben conosciute lo attestano. Il mio collega prof. Cerruti, nella passata riunione della Società italiana per il progresso delle scienze, ha lumeggiato con rara maestria questo periodo ed ha illustrato alcune importanti ricerche che vi si compirono od iniziarono[34].

Ciò che mancava in quel primo cinquantennio il Cremona lo nota con sagacia e lo enuncia con rude franchezza nella sua celebre prolusione. I retrivi ordinamenti delle nostre scuole ed il piccol numero delle cattedre impedivano che si allargasse il campo della istruzione universitaria e che si atterrassero le colonne d'Ercole dei programmi ufficiali. I nobili sforzi di uomini egregi riescivano il più sovente infruttuosi perchè mancanti di ogni connessione fra loro e perchè avversati spesso dai Governi del tempo pei quali l'ignoranza pubblica era valido sostegno al potere.

Fu primo e luminoso pensiero del Governo nazionale la istituzione delle cattedre speciali di insegnamento superiore delle matematiche, cattedre che affidò agli uomini illustri di cui facemmo i nomi, ai quali, man mano,

---

[34] *Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società Italiana per il progresso delle scienze*, per il prof. V. CERRUTI (Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze – Congresso di Parma, settembre 1907).

altri non meno illustri seguirono. Così d'un tratto un nuovo ambiente si formò ed un'era nuova ebbe principio.

I professori, nel pieno vigore della loro produzione intellettuale e del loro entusiasmo per la ricerca scientifica, erano chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano; gli allievi dovevano assistere alla creazione della scienza con tutte le sue lotte, le sue difficoltà, i suoi pentimenti, le sue crisi, le sue dolci vittorie, e dovevano essi stessi, alla loro volta, lavorare accanto ed insieme agli uomini di genio che li avevano iniziati.

Le scuole che in tal modo si formarono e che valsero, per la connessione degli sforzi e per la continuità degli intenti, non solo a far risplendere gli ingegni meglio dotati, ma anche a rendere proficua l'opera di menti meno elevate, possono facilmente riconoscersi; è poi agevole in esse scoprire e seguire l'origine e la filiazione dei vari e più importanti pensieri.

*

* *

Enrico Betti a Pisa ed Eugenio Beltrami, prima a Pavia e poi a Roma, furono per circa un trentennio i due campioni della fisica matematica in Italia.

Di ingegno e di coltura diversa (già maestro il primo nelle teorie algebriche e scopritore originale l'altro nel campo geometrico, prima ancora che si consacrassero alle applicazioni dell'analisi ai problemi fisici), salirono in alta fama anche in questo ramo di studi, del quale svolsero, nella loro lunga carriera, quasi tutte le parti più astratte e teoriche, lasciandovi l'impronta del loro genio.

Le ricerche che il Betti, parallelamente con i suoi corsi, sviluppò sul potenziale, sulla elasticità e sul calore non possono considerarsi staccate le une dalle altre, giacchè un unico pensiero le guida, pensiero che passò da lui a quelli che lo seguirono, e, man mano, andò affinandosi e completandosi sino a raggiungere gli ultimi e più perfetti resultati.

I concetti ed i metodi fondamentali di Green avevano aperto la via maestra per la integrazione generale della equazione di Laplace, base della teoria del potenziale; scopo del Betti fu di trasportare gli stessi metodi, prima nel campo della scienza dell'equilibrio elastico, poi in quella del calore.

Coi lavori del Betti, come ben mostrò il Marcolongo in un suo succoso riassunto storico[35], si inaugura una nuova e lunga serie di ricerche schiettamente italiane sulla integrazione delle equazioni dell'elasticità, tanto che può dirsi che, se Galileo per il primo adombrò i problemi dell'equilibrio dei corpi elastici, fu merito dei geometri italiani, a più di due secoli di distanza, di aver largamente contribuito a svolgere la teoria generale di quelle equazioni nelle quali il Navier aveva rappresentato

[35] *Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità in Italia* (*1870-1907*), del prof. Roberto Marcolongo, in *Nuovo Cimento*, s. V, t. XIX.

e, per dir così, racchiuso tutto il meccanismo del fenomeno.

Al brillante esordire del Betti nella questione col teorema di reciprocità e colle sue larghe e fondamentali applicazioni, le quali gettano le basi di tutto il metodo, seguono a breve intervallo le ricerche del Cerruti e la scoperta delle formule del Somigliana.

Il Marcolongo, il Tedone ed altri svolgono numerose questioni, ed intanto si iniziano parallelamente a questi studi, mercè le ricerche di Almansi, Lauricella, Levi Civita, Boggio, quelli sulla doppia equazione di Laplace.

Infine si distaccano e si differenziano, per la irriduttibile ed essenziale diversità della questione rivelata dalle qualità delle caratteristiche, i problemi generali di vibrazione da quelli di equilibrio ed assurgono anche questi ad una trattazione sistematica.

Di diversa natura furono le ricerche del Beltrami anche in quello stesso campo nel quale il Betti aveva mietuto così largamente e con tanto frutto.

Per ben seguire il filo ininterotto di idee che guidò il Beltrami in tutta la sua carriera scientifica, bisogna risalire alle prime ricerche di lui che si riferiscono alla teoria delle superficie, alla loro rappresentazione, e si svolsero intorno ai parametri differenziali ed alle variabili complesse; ricerche tra cui brillano, per importanza e per originalità, le memorie relative alla geometria non euclidea, colle quali il Beltrami mirò a dare un substrato reale alle idee di Gauss e di Lobatschewki e quelle celebri memorie che commentarono e interpetrarono le idee di Riemann sugli spazi curvi.

Queste dottrine sullo spazio destarono nuove curiosità negli uomini di scienza e furono l'origine di un nuovo indirizzo di pensiero. È egli possibile accertare, ed in qual modo, se lo spazio abbia o no una curvatura?

L'idea di ricorrere all'esame dei fenomeni naturali che potessero rivelarla venne spontanea. Il Beltrami può ascriversi fra coloro che concepirono il disegno di stabilire in maniera sistematica una teoria dei fenomeni fisici nella ipotesi di una curvatura dello spazio, e ciò spiega la transizione di questo grande matematico dal terreno delle ricerche analitico-geometriche in quello della fisico-matematica, giacchè la evoluzione del suo genio resta dominata da questo alto pensiero.[36]

Ma un lungo periodo di preparazione e di orientamento precede in lui la esplicazione del pensiero stesso, ed a questo periodo si deve una larga produzione di lavori che si riattaccano a ricerche classiche sopra vari campi della meccanica e della fisica. Ciascuno di essi porta per sè un contributo scientifico e rifulge per la squisita fattura e per la limpida trattazione, talchè la loro importanza si manifesta grandissima, non solo per il contenuto, ma anche perchè s'imposero come modello di eleganza ai geometri italiani. Fu detto che la robusta prosa del Carducci insegnò l'arte di esprimere i propri

[36] Il Beltrami morì nel 1900; le sue ricerche appartengono ad un ciclo anteriore a quello delle teorie sulla *relatività*. La prima memoria di Einstein sulla *relatività* risale infatti al 1905.

pensieri a tutta una generazione di scrittori. Io mi domando se in modo analogo gli scritti del Beltrami non valsero a foggiare ciò che chiamerei lo stile matematico della nuova generazione in Italia, la quale si inspirò alla sua arte finissima di svolgere pensieri e calcoli e di fondere mirabilmente gli uni con gli altri.

Con ciò che ho detto fin qui, ed anche se aggiungessi quanto fecero Ernesto Padova, il Cesàro e gli altri che, seguendo le orme del Beltrami, si occuparono di analoghi problemi, non avrei dato che una idea ben incompleta dei lavori italiani nel campo fisico-matematico.

Le ricerche di meccanica, in cui fra gli altri Siacci e Morera rivolsero i loro studi ai metodi di Jacobi, di Lie e di Mayer, le applicazioni delle teorie dei gruppi, di trasformazione al potenziale, dei quali si occupò il Levi Civita, i lavori sulla meccanica celeste, sulla dinamica dei sistemi ed in particolare dei fluidi, e sulla statica, in cui spiccano, oltre i nomi già ricordati, quelli del Chelini e del Turazza e più recentemente del Padelletti e del Maggi, e tanti altri studi sarebbe eziandio necessario analizzare per potere indicare e raccogliere, se non coordinare, il lavoro dell'ultimo cinquantennio in questo ramo delle matematiche. Nè con ciò sarebbe esaurito quanto converrebbe esporre, chè le ricerche fisico-matematiche dalla regione più astratta ed analitica di grado in grado si prolungano con continuità fino a quella della fisica. Io non estenderò la mia analisi a questo intero campo, ma non mi è possibile lasciare senza ricordo le scoperte di Galileo Ferraris, la cui sorgente va cercata nella più pura concezione geometrica, e che nondimeno ebbero tanta importanza nella pratica e dettero origine ad una fiorente scuola di studi elettrotecnici, nella quale divenne nobile tradizione il fondarsi sopra solide e sicure basi matematiche.

*

* *

Ebbi già occasione in uno dei passati congressi, di parlare del Brioschi, del Betti e del Casorati e di porre in luce il modo diverso col quale ognuno di essi concepì la teoria delle funzioni analitiche[37]. I loro metodi si collegano alle tre grandi fasi che, nella sua maestosa evoluzione, questa dottrina, vera dominatrice delle matematiche del secolo XIX, attraversò. Il rivolgersi di ciascuno di questi grandi maestri verso uno degli aspetti col quale la teoria delle funzioni si è presentata, fu una conseguenza delle qualità stesse più salienti del loro spirito, delle loro intime disposizioni naturali, e le attitudini da essi prese di fronte alla teoria stessa si rispecchiano in tutti gli altri atteggiamenti della loro vita scientifica.

Questo io cercai dimostrare otto anni fa e non voglio adesso ripetermi. Parlai allora della feconda virtù che ebbero gli scritti e le lezioni di questi tre matematici sui giovani italiani, molti dei quali, divenuti alla lor volta maestri, consacrarono gran parte della loro attività alla

[37] Vedi l'articolo precedente: *Betti, Brioschi, Casorati, tre analisti e tre modi di considerare le questioni d'analisi*.

teoria delle funzioni, alla loro estensione ed a tutte le altre dottrine direttamente ad essa collegate, sia nel campo delle equazioni differenziali ed integrali, sia in quello delle applicazioni alla geometria ed alla meccanica; tentai pure in quella occasione rilevare in qual modo si esplicò e si esercitò in Italia l'influenza delle opere di Abel e di Jacobi e dei concetti fondamentali posti da Cauchy, da Weierstrass e da Riemann.

È sempre presente a noi la memoria di quel periodo nel quale la teoria delle funzioni si plasmò nella forma che essa ha assunto e conserva, e vivo si mantiene il ricordo degli anni, pieni di intenso fervore, nei quali si conobbero in Italia, esposti dalla bocca stessa del suo scopritore, i fondamentali teoremi del Mittag-Leffler, e in cui le lezioni che l'Hermite dettava a Parigi si spargevano ed erano lette e ripetute, mentre tornavano coloro che, ascoltato il Weierstrass, diffondevano le sue scoperte. Intanto i grandi lavori di Poincaré e di Picard, aprivano vasti orizzonti e spingevano i nostri geometri verso nuovi problemi.

Il solo accenno di quanto fecero il Dini, il Bianchi, il Pincherle, il Pascal, il Morera, il Cesàro, il Tonelli, il Vivanti e molti altri ancora, che lavorarono con tanto successo, mi condurrebbe assai lontano.

Del resto i resultati di cui dovrei parlare, ben conosciuti ed oramai entrati a far parte del patrimonio comune matematico, si riattaccano e si intrecciano colle insigni scoperte che i più illustri matematici stranieri fecero nello stesso tempo, tanto che i resultati italiani non potrebbero considerarsi da soli, ma bisognerebbe esaminarli fusi nella grande corrente che sospinse e trascinò il pensiero matematico dell'ultimo secolo.

Ma, senza intrattenermi ulteriormente sulla teoria delle funzioni analitiche, sulla loro estensione e sugli studi affini, e non accennando nemmeno alle tante dottrine di cui è ricca l'algebra, nelle quali Brioschi, Betti, Bellavitis, Trudi, Faà di Bruno prima, e più recentemente il Capelli, il Pascal, il Bagnera si segnalarono, nè sulla scienza dei numeri, che il Genocchi, il Bianchi, il Cesàro, il Torelli coltivarono con tanto amore, mi sia dato parlare di un ramo di ricerche fiorito presso di noi in disparte dal grande movimento che agitò tutta la matematica in Europa, rimasto qualche anno alquanto dimenticato, ma che recentemente suscitò un po' dappertutto interesse e curiosità.

Intendo dire di quelle ricerche non molto vaste, sebbene irte di sempre nuove difficoltà, aride spesso, ma pur ricche di resultati attraenti per il loro aspetto talora paradossale; di quelle ricerche cioè, sopra le funzioni di variabili reali e le più riposte singolarità loro, che efficacemente furori chiamate gli studi sulle deformità e le mostruosità della matematica, in cui l'aiuto delle leggi, per dir così, fisiologiche della geometria viene a mancare, e non solo ogni intuizione fa difetto, ma tutte le facili e seducenti previsioni inducono il più spesso in errore.

Come in un vasto giardino, nel quale antiche piante secolari, ricche e rigogliose culture, richiamano sole l'attenzione di chi l'osserva per la prima volta, esiste un cantuccio solitario, una serra nascosta, ove l'abile giardiniere sceglie e cura alcune piante singolarissime, nelle quali il suo occhio esperto ha ravvisato delle variazioni e dei caratteri particolari, così nel campo delle ricerche matematiche quel riposto cantuccio con quelle delicate culture è rappresentato dagli studi a cui adesso ho accennato. Ma son quelle umili pianticelle, che probabilmente un giorno daranno belle e nuove varietà e che arricchiranno il giardino di forme rare e preziose; nello stesso modo quei sottili e minuti studi sono destinati a dar vita a nuovi concetti e ad imprevedute applicazioni.

Fu il Dini che introdusse e diffuse in Italia l'amore per queste ricerche colle sue opere, e più ancora, con l'efficace ed originale suo insegnamento. Chi ha subito il fascino delle sue lezioni, nelle quali tanti astrusi pensieri divengono per incanto facili e chiari, risentirà per tutta la vita viva simpatia verso le ricerche stesse.

Weierstrass e Riemann, movendo da idee che si erano un poco alla volta infiltrate nell'analisi, le avevano iniziate, Giorgio Cantor aveva fatto strabiliar tutti colle sue inattese rivelazioni, il Darboux era penetrato addentro a molti oscuri problemi ed aveva scoperto tante belle ed originali proposizioni. Il Dini, coordinando questo insieme di dottrine, arricchendole di nuove verità, ebbe il coraggio di portarle in Italia nella scuola all'inizio stesso degli studi di analisi infinitesimale e come base di essi. Ardita impresa dei suoi anni giovanili, mercè la quale il suo insegnamento acquistò un colorito nuovo, mentre le antiche teorie venivano come vivificate da un soffio di freschezza e di gioventù.

Attratta da questi studi, si formò in Italia una scuola di matematici che consacrarono le forze del loro ingegno allo sviluppo di queste dottrine ed apportarono loro importanti resultati.

E presero gli studi stessi doppia direzione fra noi: l'una condusse l'Ascoli, l'Arzelà ed altri a ricerche concrete sopra la serie, i limiti e la teoria delle funzioni; l'altra mirò, col Peano e colla scuola che ebbe l'impulso da lui, a dare una base sempre più solida ai concetti fondamentali, si fuse con quelle dottrine che approfondivano la critica dei postulati e si spinse di giorno in giorno in regioni sempre più astratte, acquistando un carattere vieppiù filosofico.

*
* *

Ed ora che ho accennato nel mio rapido esame a queste ultime ricerche, nelle quali domina sovrano lo spirito aritmetico, mi sia concesso passare nel campo che ordinariamente suol chiamarsi degli studi geometrici.

Passaggio invero che alcuni anni fa in Italia sarebbe apparso, più che il trascorrere da uno ad un altro ordine di discipline, il varcare i confini di due accampamenti l'un contro l'altro armato. Singolare situazione questa di combattimento, manifestatasi fra noi forse con maggiore intensità che altrove e il cui studio offre argomento ad interessanti e curiose considerazioni.

Analisi e geometria, che furori ritenuti e impiegati come due termini opposti, non possono, nè per la loro origine, nè per la loro storia, nè per la natura loro, farsi corrispondere a concetti che si eliminino e si escludano a vicenda; dirò anzi che non possono porsi a confronto, come non può stabilirsi un rapporto fra il colore ed il volume, fra il peso e la forma dei corpi.

I nomi di analisti e geometri dettero origine a quelle singolari classificazioni o, per dir meglio, a quelle strane confusioni che tanto meravigliano chi, dal di fuori, guarda lo svolgimento degli studi italiani. Una semplice comunanza del linguaggio che adoperavano fece raggruppare insieme cultori di materie essenzialmente diverse, mentre vennero separati fra loro matematici miranti ad un fine comune e che, pel contenuto delle loro opere, non avevano ragione di distinguersi, ma che solo per l'aspetto dei procedimenti impiegati potevano apparire differenti.

Si direbbe quindi che un grande equivoco abbia presieduto a certe lotte di scuole, per quanto certamente vi abbiano anche contribuito il persistere di antiche consuetudini e quelle reazioni che si manifestano verso tutti i metodi quando tendono a varcare certi limiti.

Ma queste lotte, feconde e generose lotte, che giovarono eccitando gli animi e spingendo le ricerche lungo le diverse vie solo in apparenza divergenti per cui la scienza progredisce, sono ormai, come il mio amico

Segre dimostrò nel suo bel discorso letto all'ultimo Congresso, un ricordo del passato[38].

La figura del Cremona predomina e campeggia in tutto lo svolgimento degli studi geometrici in Italia: all'impulso primitivo che essi ebbero da lui, si deve il rapido loro sviluppo ed al suo insegnamento, che fu un apostolato, la larga simpatia che incontrarono e la diffusione che ebbero.

Gli elementi della geodesia, della fisica-matematica e dell'analisi infinitesimale, sebbene in modo ristretto e limitato, erano tuttavia materie di insegnamento nelle nostre Università, anche nella prima metà dello scorso secolo, ma nelle Università stesse in nessun modo si accoglievano le dottrine della geometria superiore, le quali invece fiorivano nelle scuole straniere. Ebbene, poco più di quarant'anni dopo il giorno in cui il Cremona aveva principiato il suo insegnamento, poteva attestarsi che l'Italia era divenuta il centro proprio della ricerca geometrica.

Il Cremona si riattacca direttamente allo Chasles e per esso al Poncelet, nel primo periodo della sua produzione scientifica, poi si fanno più stretti i rapporti suoi col Plücker, col Möbius e principalmente collo Steiner. I suoi lavori sulla teoria delle curve e delle superficie sono opere ormai classiche, e la dottrina delle trasformazioni (che a buon dritto presero il nome di *cremonia-*

---

[38] *La geometria d'oggidì e i suoi legami coll'analisi* per C. SEGRE, *nel rendiconto del terzo Congresso internazionale dei matematici* (Leipzig, B. G. Teubner, 1905).

ne) fu da lui stesso fondata allorchè pose il problema della trasformazione razionale in tutta la sua generalità.

Il Veronese, il Bertini, il De Paolis, il Caporali, il Guccia, il Montesano, suoi diretti discepoli, ed altri, come il Martinetti e il Del Re, che indirettamente a lui si collegano, sebbene distinti fra loro da indirizzi diversi, formano una schiera di valorosi geometri che resero celebre la sua scuola.

Il tempo non mi consente di parlare partitamente delle opere di questi matematici, di classificarle tutte e di mostrare il loro coordinamento; io dovrò quindi limitarmi ad un breve cenno su alcuni indirizzi e tendenze.

Il concetto generale degli spazi a più dimensioni era stato largamente sviluppato, ed in Italia il Beltrami, con gli studi generali della curvatura, ed il Betti, con quelli della connessione, lo avevano reso abbastanza famigliare, allorchè il Veronese iniziò le ricerche in questo campo. Ora, ciò che distingue l'opera sua da quella dei predecessori è il carattere schiettamente geometrico che il Veronese diede alla sua trattazione, carattere che si manifesta nella generazione stessa degli spazi e nelle applicazioni che egli ne ha fatte.

L'ulteriore sviluppo di questi studi in Italia e la nuova direzione che presero sono merito principalmente del Segre col primitivo indirizzo delle sue ricerche, ed a lui vanno uniti il Del Pezzo, il Fano ed altri. Al Segre poi nella seconda fase della sua carriera scientifica, in cui si riattaccò all'opera del Noether, si deve l'inizio di quel complesso di lavori con i quali il Castelnuovo, l'Enriques, il Severi, il De Franchis ottennero i loro importanti resultati sulla teoria delle superficie, di cui i più recenti si collegano alle scoperte del Picard sulle funzioni algebriche e rientrano per questa via nell'orbita della teoria delle funzioni.

Numerosi furono in Italia i cultori della teoria delle forme algebriche, a capo dei quali possono porsi il Battaglini e il D'Ovidio, che seguirono gl'indirizzi di Cayley, Sylvester, Gordan, e interpetrarono geometricamente i risultati dell'algebra. I molteplici lavori di varia indole e in diverse direzioni di Capelli e Pascal, del Gerbaldi, del Maisano, del Berzolari e di molti ancora provano la larga e feconda attività di questa scuola.

Infine non potrei dimenticare l'indirizzo (che dominò costantemente nella seconda metà del secolo scorso) di risalire verso i fondamenti della geometria sviscerandoli ed assoggettandoli ad una critica profonda, la cui influenza si ripercuote in vario modo anche nell'insegnamento elementare. Questa tendenza si manifesta in un gran numero di ricerche e di libri e sistematicamente si esplica in varie opere, fra cui mi restringo a citare quelle del De Paolis, del Veronese e dell'Enriques.

Ma un'altra specie di ricerche geometriche di diversa natura fu pur coltivata e rigogliosamente prospera in Italia. Intendo parlare di quella geometria che fu detta infinitesimale, la quale si innalzò sulla base delle scoperte di Monge e di Gauss e, mercè una lunga serie di lavori fra i quali primeggia l'opera del Darboux, ha fornito aiuti potenti e metodi fecondi alla dottrina delle equazioni differenziali ed ha arricchito di belle e fondamentali interpretazioni la teoria delle funzioni, mentre è stata di valido aiuto nelle ricerche di fisica matematica e di meccanica.

Già parlando del Beltrami accennai ai suoi primi lavori in questo campo di studi, nel quale il Dini iniziò pure la sua carriera scientifica, ma prima di tutti era stato il Brioschi a diffondere fra noi le feconde idee di Gauss afferrandone tutta l'importanza, merito questo grandissimo che non deve andare dimenticato.

Le ricerche più moderne del Bianchi, che tanti importanti e geniali contributi portò alla teoria delle superficie applicabili ed a quasi tutti i rami della geometria differenziale, quelle del Ricci che ha introdotto procedimenti nuovi di grande valore ed efficacia, ed infine le belle memorie del Cesàro sulla geometria intrinseca, nonchè i lavori degli allievi loro, costituiscono un insieme ricco ed armonico di studi che fanno nobile riscontro alle opere di pura geometria e di geometria algebrica di cui ho innanzi parlato.

*

* *

La corsa veloce attraverso il campo di idee e di studi che io volevo percorrere è giunta al suo termine. Come in ogni rapido viaggio, fu possibile cogliere solo l'aspetto di quelle cose che passarono a volo dinanzi. Insieme colla immagine di esse rimane quindi il rammarico di averne tralasciate molte e di avere osservato in modo fuggitivo quanto sarebbe stato degno di esame accurato e profondo. Ma io spero che la regione percorsa possa avere lasciato nel suo insieme l'impressione di essere rigogliosa e fertile e di promettere un fecondo avvenire.

L'Italia nel giovanile ed ardito suo slancio verso i nuovi ideali non scordò le glorie del passato: gli studi di storia delle matematiche si svolsero accanto alla produzione originale. La pubblicazione del Bollettino del Buoncompagni e del Loria che raccolse le ricerche storiche, mentre i periodici del Tortolini, del Brioschi, del Battaglini e del Guccia riunivano le ricerche originali, provano l'interesse che suscitarono presso di noi le antiche opere.

Ma vi fu una grandiosa impresa di ricostruzione storica che deve essere ricordata con onore speciale. Per un sentimento di alto dovere e come un pegno di gratitudine di tutta la nazione risorta verso colui che insegnò a leggere in caratteri matematici entro il libro della natura, la nuova Italia volle la pubblicazione critica e completa delle opere di Galileo, impresa nobile e vasta, per la quale si rese necessaria la rievocazione di tutta un'epoca e di tutto un mondo, e che si compì sotto gli alti auspici di S. M. il Re, munifico sempre nel promuovere e nell'incoraggiare quanto torna a vantaggio e a decoro della Patria. Il nome del Favaro, che diresse il lavoro e gli consacrò le amorose cure di lunghi anni, resta legato a questa insigne pubblicazione.

Ho in principio indicato le influenze didattiche che presiedettero il nascere e lo svilupparsi del brillante periodo di ricerche degli ultimi anni. Oggi, col sorgere del nuovo secolo, nuovi bisogni si fanno sentire che determinano più moderni orientamenti dei nostri istituti scolastici ed in special modo delle scuole degli ingegneri; scuole per lunga e costante tradizione collegate presso di noi colle facoltà di scienze. I problemi, i quali interessano tutta la compagine delle discipline matematiche e che oggi si impongono ed urge risolvere, rendono il momento attuale paragonabile a quello trascorso or sono cinquant'anni, allorchè i nostri studi si costituirono nell'assetto attuale.

Ma è con sicura fede che guardiamo in faccia all'avvenire, sperando nel costante ed armonico sviluppo del pensiero matematico italiano unito con quello delle altre nazioni, giacchè non dubitiamo che gli stessi elevati propositi, congiunti alla esatta intuizione dei bisogni più vivi della nazione, guideranno oggi, come ispirarono mezzo secolo fa, gli uomini al cui senno sono affidate le sorti e l'avvenire della Patria.

PROPOSTA
DI UNA ASSOCIAZIONE ITALIANA
PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

Questo discorso fu pronunziato nella seduta del 15 settembre 1906 del Congresso dei Naturalisti Italiani, promosso dalla Società Italiana di Scienze naturali, tenutosi in Milano dal 15 al 19 settembre 1906 - Fu stampato negli Atti del Congresso - Milano 1907.

Ho creduto che l'attuale Congresso dei naturalisti italiani, al quale hanno fatto adesione illustri Accademie e numerose Società anche non schiettamente naturalistiche, potesse offrire la migliore occasione per presentare una proposta che a mio parere dovrà suscitare l'interesse di tutti gli scienziati in genere: quella cioè di una Associazione italiana per il progresso delle scienze.

Non si tratta di fondare una Associazione nuova per l'Italia, giacchè, come avrò occasione di accennare, l'Associazione stessa ha già lungamente fiorito presso di noi, anzi possiede una storia gloriosa. Ma, a mio giudizio, non conviene risuscitare immutata la vecchia istituzione colle sue antiche tradizioni, sebbene nobili ed altissime. Si dovrebbe invece ricostituire sopra nuove basi una Associazione che ha avuto vita floridissima e che da un trentennio ormai tace.

Non ritengo necessario spender molte parole per dimostrarne la utilità. Esporrò solo alcuni dati i quali sono molto più eloquenti di qualunque discorso e mostrano come le Nazioni più innanzi nella civiltà hanno sentito da lunghi anni il bisogno di fondare e di conservare poi gelosamente delle Associazioni per l'avanzamento delle scienze dalle quali ritraggono non dubbio vantaggio.

La Società britannica per l'avanzamento delle scienze rimonta al 1831, anno in cui fu fondata dal Brewster.

Essa conta 4500 membri. L'Associazione francese ha una data più recente, e venne fusa con l'Associazione scientifica di Francia che era stata già creata nel 1864 dal Le Verrier. Essa pubblica dei resoconti a partire dal 1872. L'America possiede fino dal 1853 una Unione per il progresso delle scienze e delle arti, la quale dà alla luce un rapporto annuale. Esiste una analoga associazione in Australia che conta circa 1000 soci e si riunisce in congresso ogni due anni. La Germania ha costituito dal 1822 la Società dei Medici e Naturalisti ai quali si sono uniti i matematici ed altri scienziati. Nel 1904 la Società accoglieva 2910 membri. Ma la più antica associazione di questo genere appartiene alla Svizzera. La sua origine rimonta al 1815 ed oggi essa conta 800 soci; pubblica degli atti dal 1816, dei resoconti dal 1879 e delle memorie dal 1829.

Il più celebre di tutti questi sodalizi è senza dubbio l'Associazione britannica, sia per il gran numero di soci che ne fanno parte, sia per la ricchezza di mezzi di cui può disporre, sia finalmente per l'importanza dei risultati conseguiti con lungo, perseverante e non interrotto lavoro. Le sue solenni riunioni, che hanno luogo ogni anno in una città del Regno Unito o delle colonie, manifestano l'energia, l'intelligenza e tutte le nobili qualità che fanno la grandezza del popolo inglese.

Non è certamente qui il caso di parlare dei resultati conseguiti dall'Associazione britannica. Mi basti ricordare gli studi sulla questione delle unità assolute compiuti per sua iniziativa, i quali hanno condotto a conseguenze di somma importanza ed utilità nel campo teorico ed in quello pratico.

*

* *

L'Italia ha seguito fin dalla sua origine il movimento iniziatosi sui primi del secolo scorso con i congressi degli scienziati. La prima riunione di scienziati europei ebbe luogo in Svizzera nel 1816 per iniziativa del farmacista M. Gasse di Ginevra, e nel 1839 il primo Congresso degli scienziati italiani aveva luogo in Pisa. Fu il principe Carlo Bonaparte, figlio di Luciano, che, preso d'ammirazione pel Congresso tenutosi in Friburgo nel 1838, ottenne dal Granduca di Toscana che ne fosse tenuto uno in Pisa nell'anno successivo.

La storia di questo congresso è stata narrata da varii autori ed ha un notevole interesse. Abbiamo di esso una relazione ufficiale scritta da Gaetano Savi; una del Corridi, che ne fu il segretario generale; più recentemente Elisa Tacchi[39] ha pubblicato uno studio accurato e diligente prendendo occasione dallo scritto del prof. Bacci intitolato: «Una miscellanea di stampe sul primo congresso degli scienziati in Pisa».[40] Le relazioni ufficiali non riflettono che i risultati scientifici conseguiti, ma dall'articolo ora ricordato e da tutte le

[39] TACCHI ELISA, *Il primo Congresso degli Scienziati Italiani in Pisa* - Studi storici, vol. XII (1903).

[40] BACCI O. *Una miscellanea di stampe del primo Congresso degli Scienziati in Pisa* (1839) - Raccolta di Studi critici dedicata a A. D'Ancona. Firenze, Barbera, 1901.

memorie dell'epoca risulta appieno l'importanza politica del congresso, l'entusiasmo e le speranze che suscitò una riunione di cultori di scienze in Italia quando l'Italia non esisteva ancora come nazione, le diffidenze che destò nei governi di allora, le inquietudini della polizia. Il generale Radestzki scriveva: «I dotti riuniti in Pisa si sono imposti la maggior riserbatezza nel parlare per non compromettere con imprudenze e indiscrezioni l'avvenire di una istituzione destinata a travagliare gli animi in segreto per gettare le fondamenta dell'opera infernale della rigenerazione italiana».

Non mi addentrerò nei particolari del congresso, rimandando chi amasse conoscerli all'articolo citato, ad un bel lavoro del prof. Linaker[41] e ad altri scritti speciali, ma non ho voluto passare sotto silenzio e nascondere che la questione politica, che allora padroneggiava, e ben giustamente, gli animi degli italiani e compenetrava ogni manifestazione di vita civile, dominava nascostamente quella riunione scientifica.

Questo fatto non ho voluto nasconderlo giacchè deve ricercarsi in esso una delle cause principali della rapida decadenza dei congressi degli scienziati italiani dopo che l'Italia cessò di essere una aspirazione ed un sogno e divenne una realtà.

[41] LINAKER A. *I Congressi degli Scienziati e i Congressi pedagogici Italiani. Memorie e speranze* - Rassegna Nazionale, voi. III (1880).

Il successivo congresso si tenne a Torino l'anno seguente, cioè nel 1840. Nel 1841 ebbe luogo a Firenze,[42] nel 1842 a Padova, nel 1843 a Lucca, nel 1844 a Milano, nel 1845 a Napoli, nel 1846 a Genova, nel 1847 a Venezia e fu il nono congresso. Il decimo doveva aver luogo a Bologna, ma ben tre lustri s'interposero fra il nono e il decimo congresso che si riunì nel 1861 a Firenze in occasione della Esposizione italiana. Roma fu sede dell'undecimo convegno che si tenne nel 1872 e l'ultima riunione ebbe luogo nel 1875 a Palermo. Da quell'epoca i congressi sono cessati e non se ne parlò più.

Questi congressi degli scienziati italiani furono sempre frequentatissimi; circa 421 membri intervennero al primo del 1839 in Pisa, 500 a quello di Lucca, al congresso di Milano del 1844 i presenti erano 1159, e si pensi alle difficoltà di comunicazioni e di viaggi in quell'epoca. Trovo finalmente inscritti 788 scienziati all'ultimo congresso di Palermo.

Dei resultati scientifici molti in più occasioni han parlato e non è qui il momento di citarli nè di discuterli. Però per dimostrare l'interesse che suscitarono non può tacersi che fin dalla loro origine richiamarono anche l'attenzione degli scienziati stranieri, e mi basti a titolo d'esempio di ricordare che una delle più celebri scoperte del matematico Jacobi, quella del principio dell'ultimo

---

[42] MICHEL E. *Il terzo Congresso degli Scienziati Italiani in Firenze 1841* - La Rassegna Nazionale, vol. 163 (16 ottobre 1908).

moltiplicatore, venne divulgata dal suo autore nel congresso di Lucca del 1843[43].

Non pertanto al Congresso di Roma del 1872 l'idea di chiudere la serie delle riunioni degli scienziati italiani era nell'animo di molti. Riporterò le parole con le quali l'illustre Mamiani inaugurò il successivo congresso, quello di Palermo

«Due anni or sono, egli diceva, parevano gli scienziati italiani disposti a smettere questa nobile usanza dell'adunarsi in congresso generale in qualche città illustre di fama e di studi. Le cagioni che si allegavano voi le sapete, nè giova di riandarle. Ma il singolar fatto fu questo, che, accolti essi in adunanza copiosa e fiorita nelle stanze del Campidoglio e consigliandosi sulla opportunità di abolire per sempre i congressi generali, ne uscì in iscambio una conferma impensata e solenne. Il che a mio giudizio non accadeva senza una ispirazione degli animi malconscia di sè, ma pur saggia e previdente. E di

[43] Gli atti di questi Congressi vennero volta a volta stampati. Per la parte dei resultati matematici in essi contenuti, il Prof. Cerruti ha scritto un importante studio (Vedi articolo precedente). Per la parte chimica, vedi: *La chimica nei Congressi degli Scienziati Italiani* per Emanuele Paternò, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Vol. I, Roma 1908.

Vedi anche per la storia dei Congressi stessi: SPINGARDI A. *Le medaglie dei Congressi degli Scienziati Italiani*, Rivista Italiana di Numismatica XV (1902) - *Medaglie commemorative degli XI Congressi degli Scienziati Italiani* raccolte e riprodotte per cura di G. Ardizzone, con prefazione del Prof. A. Garbasso - Firenze, 1914.

vero, potevasi egli interrompere una istituzione nata più che altro a testificare e riconfermare l'amicizia e parentela dei nostri popoli, la storia loro scambievole e la devozione ardente nella patria comune, potevasi, dico, interromperla non avendo ancor visitata Palermo, capo di quest'isola incantevole, di questa terra la più preziosa e la più lucente di tutto il Mediterraneo, la quale in ogni tempo insegnava all'Italia come si odia e come si spezza il giogo degli stranieri?»

Dopo il felice esito del Congresso di Palermo non si sarebbe aspettata davvero la fine delle riunioni degli scienziati italiani, tanto più che un nuovo elaborato regolamento fu discusso e approvato, e ne resultò una nuova costituzione della Società. Il regolamento peraltro non venne applicato mai e il Congresso di Palermo fu realmente l'ultimo, giacchè un trentennio è passato e l'Associazione Italiana per il progresso delle scienze non si fece mai viva, nè di fatto esiste.

*
* *

Si tratta ora di cercare di ricostituirla sopra nuove basi. Come ho già detto, un gran numero di persone la ritiene utile ed è in ciò confortata dal luminoso esempio di quello che si fa all'estero. Del resto si può dir male dei Congressi, ma essi rappresentano un bisogno dell'epoca presente, e quanto più essi sono comprensivi, tanto più rispondono di fatto alle esigenze moderne, correggendo la tendenza alla eccessiva specializzazione, riunendo cultori di ricerche diverse, incoraggiando e spronando gli studiosi di una disciplina col mostrar loro quello che si fa nelle altre e quali sono i bisogni delle varie scienze, quali gli aiuti reciproci che esse possono prestarsi.

Il momento per tale ricostituzione sembra a molti di noi oggi opportuno per le ragioni che mi permetto brevemente di esporre.

È indubitato, come ho già avuto occasione di dimostrare, che il pensiero politico dominava nascosto le riunioni degli scienziati italiani fino a che l'Italia non fu costituita. La ragione politica, che aveva ad esse procurato dapprima vita rigogliosa, fu poi fonte di decadenza ed un segno evidente ce lo danno le parole stesse del Mamiani che ho testè citate.

Ora lunghi anni sono trascorsi e la tradizione antica è ormai interrotta. Il rapido sviluppo intellettuale odierno dell'Italia è una garanzia che l'altissimo concetto dell'avanzamento e della divulgazione della scienza, concetto dominante nelle analoghe Società degli altri paesi, può bastare a dar vita e mantenere la nuova Associazione.

Ma un grave pericolo poteva sovrastare all'Associazione stessa, pericolo, agli occhi di molti, tale da comprometterne seriamente tutto l'edifizio.

Questo pericolo però, ritengo che nelle condizioni attuali sia scongiurato. È certo che, se l'Associazione si costituirà, essa sarà composta in gran parte d'insegnanti. La scienza da noi, come del resto in Francia ed anche in Germania, è scienza ufficiale e sono vere eccezioni coloro che si occupano seriamente di studi scientifici senza appartenere al mondo dei professori. Ora un Congresso in gran parte formato di insegnanti universitari e di scuole secondarie, sarebbe stato fatalmente condotto, alcuni anni fa, ad occuparsi, non solo di questioni scientifiche, ma anche di questioni riguardanti i professori come corpo che impartisce l'insegnamento e riceve i suoi mezzi di sussistenza dallo Stato. Di qui l'esame degli ordinamenti scolastici e quello delle condizioni morali ed economiche del corpo insegnante. Dirò, senza tante ambagi, che se tali scottanti questioni fossero cominciate ad infiltrarsi nelle discussioni del nuovo sodalizio, dati gl'interessi che le questioni stesse toccano, le passioni che suscitano, esse avrebbero presto e facilmente preso il sopravvento sopra molte delle vere e proprie questioni scientifiche, e dilagando ed imponendosi avrebbero seriamente potuto compromettere l'avvenire della istituzione, distogliendola dai suoi veri scopi e rendendola forse non simpatica a quella grande maggioranza della parte colta del paese che giustamente desidera assistere a puri dibattiti scientifici.

Fortunatamente però, come ho già detto, un tale pericolo è ai miei occhi scomparso. Esistono già più Associazioni, quelle dei professori di Scuole secondarie e quella recentemente formatasi dei professori di Università, le prime delle quali hanno svolta una azione morale e politica che ha già condotto a nuove leggi per le Scuole secondarie e a nuove ancora condurrà. Quanto all'ultima, la sua azione sta già esplicandosi e svolgendosi rapidamente.

L'esistenza di queste Associazioni, già costituite ed operanti per loro conto con fini e con mezzi chiari e ben determinati, toglie completamente il pericolo che l'Associazione per l'avanzamento delle scienze possa essere distratta dai suoi veri fini e dai veri e propri interessi scientifici.

*

* *

Resta a dire brevemente su quali basi si ritiene più opportuno fondare la nuova Associazione.

La scelta, come base, delle Accademie scientifiche esistenti in Italia, che era quella dell'antica istituzione, sarebbe opportuna in quanto darebbe la sicurezza di poter contare sopra ottimi elementi, ma darebbe luogo, come è facile accorgersi, a gravi inconvenienti. In primo luogo la base stessa sarebbe ristretta e avrebbe un carattere per dir così scientificamente aristocratico. Invece più che altro deve cercarsi che la nuova Associazione abbia una larga base, che possa stendere le sue radici liberamente in tutto il paese e abbracciare tutti coloro che volenterosi amano la scienza; sia quelli che hanno direttamente portato ad essa un contributo, sia quelli che desiderano solamente impadronirsi di quanto altri hanno scoperto. In una parola la nuova Associazione deve essere scientificamente democratica. Si corre, è vero, qualche rischio seguendo questo concetto, ma val la pena di correrlo per fare cosa giovane, vitale e moderna, purchè il coraggio e la buona volontà non manchino.

Del resto, che cosa è che costituisce l'intima virtù delle analoghe Associazioni straniere? È che esse sono largamente aperte e che, in quei giorni in cui si riuniscono a Congresso, sono posti a fianco il vecchio campione della scienza che ha conquistato una fama sicura e durevole, e il giovane che fa i primi passi; quegli che s'interessa solo per proprio diletto delle ricerche scientifiche, e quegli che ne fa oggetto del culto più ardente di tutta la vita.

Ora è certo che sono già sorte da per tutto e per quasi tutte le discipline delle Società speciali aventi questo tipo democratico e moderno la cui azione si esplica parallelamente ed accanto alle antiche e celebri Accademie.

È sembrato a molti di noi che appoggiandosi a queste forze vigorose la nuova Associazione sorgerebbe vitale e robusta. La compartecipazione poi delle antiche e celebri Accademie non farebbe che accrescerne il decoro.

Però queste varie Società costituiscono degli organismi fra loro eterogenei con ordinamenti amministrativi diversi; ed è cosa buona ed utile che ciascuna seguiti a conservare la propria completa autonomia ed individualità e possa continuare ad esercitare la propria azione nell'ambito in cui questa si è sempre svolta, pur contribuendo alla creazione della nuova Associazione.

Per tutte queste ragioni storiche e di opportunità io vi presento il seguente ordine del giorno, il quale mi sembra possa contemperare gl'interessi di varia natura che ho avuto l'onore di esporvi:

«1° Tutti i membri delle Società scientifiche rappresentate al Congresso sono senz'altro membri della Associazione per il progresso delle scienze.

» Sarà sufficiente soltanto che essi dichiarino di accettare di farne parte. Nessuna spesa importa tale accettazione. Il regolamento stabilirà le modalità di ulteriori ammissioni.

» 2° L'Associazione terrà Congressi periodici in epoche da stabilirsi ed in località pure da stabilirsi.

» Coloro che intendono di partecipare a tali riunioni pagheranno una somma che sarà da fissarsi per regolamento.

» 3° Il Congresso si dividerà in sezioni ed in sottosezioni, ciascuna delle quali corrisponderà ad una singola disciplina o ad un gruppo di discipline rappresentate dalle singole Società.

» Sarà dato modo a ciascuna Società che lo creda opportuno di organizzare delle sedute speciali per i propri membri durante il Congresso e indipendenti da quelle generali.

» 4° Una Commissione verrà nominata per studiare sulle basi precedenti uno Statuto ed un regolamento da sottoporsi all'esame delle varie Società, e da approvarsi nella prima riunione dell'Associazione per il progresso delle scienze, che avrà luogo in una città e in un'epoca che la detta Commissione stabilirà.

» La Commissione stessa fungerà da Comitato ordinatore del futuro Congresso. Ogni singola Società si incaricherà delle comunicazioni ufficiali fra i suoi membri e questo Comitato».[44]

[44] Quest'ordine del giorno fu approvato. Una Commissione venne nominata secondo il n. 4, la cui opera ebbe compimento nell'anno successivo in Parma colla fondazione della *Società Italiana per il progresso delle Scienze*, e col suo primo congresso. L'articolo seguente è il discorso inaugurale di questo primo Congresso.

IL MOMENTO SCIENTIFICO PRESENTE E LA NUOVA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

Con questo discorso venne inaugurato in Parma il primo Congresso della *Società Italiana per il progresso delle Scienze* il 25 settembre 1907 - Venne pubblicato negli atti della Società - Roma 1908 e in *Scientia,* Anno I - Volume II n. 4 - Bologna, 1907.

È trascorso ormai più che un trentennio dacchè in Palermo si tenne l'ultimo Congresso degli Scienziati Italiani. Oggi la nobile istituzione si ridesta e saluta il sole nuovo che le splende dinanzi[45].

Nel periodo da allora trascorso le condizioni materiali e morali d'Italia si sono profondamente modificate, mentre il pensiero scientifico universale si è svolto e maturato in modo rapido e sicuro. L'insieme dei fatti scientifici nuovi manifestatisi in questo pur così breve lasso di tempo ha rinnovellato, in una con le abitudini della vita, l'indirizzo generale della cultura, ed ha sviluppato e consolidato un sentimento tutto nuovo, moderno e originale, che chiamerei sentimento scientifico, il quale domina beneficamente la nostra epoca, come altre forme non meno universali di sentimento hanno dominato in epoche passate. Questo sentimento, che ormai pervade ogni manifestazione di vita sociale, patrimonio così dei grandi come degli umili, è frutto della genialità degli spiriti più eletti a cui si devono le grandi scoperte e le grandi idee, e della feconda attività pratica della intera società odierna, che indefessamente le applica. Alla sua opera animatrice si deve oggi il risveglio delle più sane e vitali energie, ed al suo appello risorge anche l'antica nostra Associazione.

[45] Vedi il *Saggio* precedente.

Si può affermare che il concetto della scienza ed il valore di essa presso il pubblico sono oggi profondamente cambiati rispetto solo ad un mezzo secolo fa.

Infatti le più moderne scoperte, quelle stesse a cui la maggior parte della nostra generazione ha assistito, furono viste da tutti (a differenza di quel che avveniva più frequentemente pel passato) nascere e svilupparsi nei gabinetti scientifici e di qui diffondersi nelle officine e invadere il campo della vita pratica.

Perciò il momento storico che attraversiamo ci colpisce con lo spettacolo della moltitudine che, affascinata da quelle invenzioni, che in poco tempo furono fonte di tanto benessere e di tanta ricchezza e influirono così profondamente sui costumi e sulla coscienza sociale, cerca di impossessarsi delle verità scientifiche nel loro insieme, conoscerle nei particolari e, quel che più preme, attende dalla scienza il progresso materiale e morale.

È forse questo stato d'animo di attesa, caratteristico dell'epoca presente, ciò che più alimenta il sentimento a cui ho alluso.

Cercherò di caratterizzare quanto ho affermato con un confronto a tutti famigliare: il confronto che si può istituire fra lo sviluppo delle macchine a vapore e quello delle macchine elettriche.

Storicamente l'uso delle prime ha preceduto l'uso delle altre; infatti il diffondersi delle applicazioni pratiche elettriche e il conseguente trasporto dell'energia è, come tutti sanno, opera dell'ultimo trentennio.

Watt e Stephenson erano due pratici, che col loro genio sono assurti dall'officina all'accademia delle scienze ed all'alta industria; essi attestano che, almeno nel periodo eroico di creazione delle macchine a fuoco, fonte dei più ingegnosi e famosi trovati fu l'officina stessa. Solo in seguito la scienza, scrutando il funzionamento delle macchine industriali, costruì quel mirabile monumento che accoglie tutti i fenomeni della natura e li domina con i concetti della termodinamica.

Fu il contrario per l'elettricità.

La pila già pronta per le sue svariate applicazioni procede direttamente dal laboratorio di fisica dell'Università di Pavia. Faraday col principio dell'induzione getta le basi di tutte le applicazioni elettriche, dalla dinamo al telefono. L'anello di Pacinotti, il campo rotante di Galileo Ferraris, la scoperta delle onde elettriche sono frutto di studi dei gabinetti scientifici.

In breve, mentre la scoperta delle macchine termiche fu il punto di partenza di tante ricerche teoriche, fu invece la elettrodinamica teorica che direttamente creò le varie e meravigliose applicazioni della elettricità.

In questo caso, come in tanti altri, la storia delle parole riassume e rispecchia quella di una lunga e lenta evoluzione di idee. Così la temperatura, che originariamente fu una vaga e rozza espressione delle condizioni atmosferiche, a poco a poco si concretò e determinò scientificamente, fino ad esser concepita dalla termodinamica come il fattore integrante d'una espressione differenziale. Invece il concetto di potenziale, che con i sottili procedimenti del calcolo integrale Laplace creò in meccanica celeste, fecondato poscia dalla mente di Gauss, trapiantato dal genio di Green nel campo della elettrostatica, introdotto da Kirchhoff in elettrodinamica, doveva venire ai nostri giorni, col nome di voltaggio, trasportato dalla bocca dei più umili lavoratori in ogni più lontana e remota plaga, fin dove una lampadina elettrica brilla la notte in un povero villaggio.

Così, discendendo in ogni categoria di persone ed ovunque diffondendosi, giovandoci ed aiutandoci in ogni circostanza dell'esistenza, ravvivando ed intensificando tutta la nostra vita, le applicazioni elettriche ci mostrano ad ogni istante (come nulla potè più assiduamente ed efficacemente farlo finora) la potenza della ricerca scientifica e la utilità delle più astratte meditazioni.

Mentre in tal modo si è stabilita una corrente continua che unisce la vita pratica e quella scientifica, per naturale corrispondenza e per virtù intima di cose, coloro che fanno professione di scienza si sono sentiti attratti verso la moltitudine degli uomini; la loro esistenza non resta chiusa nei laboratori e nei gabinetti di studio, essi si sentono costretti a porsi in contatto intimo e quotidiano con la società ed a partecipare alla vita che agita il mondo.

Così anche la fisonomia dello scienziato moderno è grandemente mutata rispetto a quella del dotto di pochi anni fa.

La mente, per stabilire un confronto che caratterizzi due tipi spiccatamente opposti, si volge verso due uomini sommi, i quali hanno abbracciato con il loro genio tutto il mondo fisico: Gauss e Lord Kelvin.

L'uno, che meditò solitario cinquant'anni, non avvicinato nè avvicinabile, nella modesta Gottinga, dando alla luce solo ciò che ritenne compiuto e perfetto, mentre serbò gelosamente celati, o confidò in segreto a stretti amici, i pensieri più nuovi ed originali, che più tardi suscitarono tanto clamore e tanta rivoluzione d'idee; l'altro, il maggior scienziato oggi vivente, che portò la feconda multiforme sua attività nei due mondi e che ardimentoso affrontò e divulgò le più originali e singolari teorie che si presentarono al suo genio, mentre la sua vita, mescolata sempre al grandioso movimento moderno dell'Inghilterra, fu aperta all'universale ammirazione.

Eppure, quanti punti di contatto fra i due scienziati! Se Lord Kelvin unì l'Europa e l'America col telegrafo transatlantico, Gauss per primo immaginò il telegrafo elettrico che collegò il suo osservatorio col gabinetto di fisica dell'amico Weber. La limpida geometrica eleganza della teoria delle immagini di Lord Kelvin è solo paragonabile alla armoniosa divina bellezza delle proprietà dei numeri che Gauss scoprì.

Non la forma del genio dunque, ma il carattere e più che altro l'ambiente diverso in cui vissero fu l'origine di tanta differenza.

L'intima connessione della scienza con la vita pratica non ha peraltro diminuito il carattere maestoso e solenne di quella, carattere che nutre ed avviva quello che già ho chiamato sentimento scientifico.

Quei moderni portentosi ed immani edifici, non fumanti e strepitosi come le antiche officine, bensì luminosi e tranquilli, ove le dinamo, giganteschi monumenti dell'epoca presente, compiono rapide e silenziose l'opera loro, rievocano per l'augusta, solenne ed austera grandiosità i monumenti di un'altra epoca: le vetuste cattedrali che ergono al cielo le loro mirabili guglie. Sotto le aeree arcate, che l'arte del medio-evo elevò, l'anima si riempie di una commozione solenne che ci fa sentire le aspirazioni ed i palpiti dei lontani secoli. Una commozione altrettanto grande e profonda invade chi penetra nel loco sacro dell'industria moderna ed ei sente suscitarsi nel cuore un'onda di fiero compiacimento e un sentimento di serena fiducia che gli fa guardare sicuro in faccia all'avvenire.

Del recente movimento della scienza verso le pratiche applicazioni l'Italia forse si giovò meglio di ogni altro paese, ond'è che quel sentimento scientifico a cui poc'anzi alludevo, sebbene qui più tardi che altrove sviluppato, fa sotto i nostri occhi sempre più rapidi e lusinghieri progressi.

Era, non son molti anni, ben triste la nostra condizione economica; ma per virtù di uomini e di cose essa risorse in modo mirabile ed inaspettato: una fonte inattesa di ricchezza scaturì abbondante dall'industria che si credeva negata al nostro paese dalla stessa natura.

Allorchè all'Esposizione di Torino del 1884 vennero alla luce i primi trasformatori elettrici, quegli apparecchi, che furono paragonati all'organo rudimentale di ogni meccanismo, la leva, il seme da cui doveva nascere tanta ricchezza era gettato: la energia che i nostri monti e i nostri fiumi serbavano si riversò nel piano e animò mille operose officine e penetrò benefica nelle nostre città.

I fili che vediamo stendersi come in una rete sopra le nostre abitazioni e slanciarsi lontano sono il documento più eloquente della nostra prosperità economica. Nella solitaria campagna romana essi corrono paralleli ai superbi acquedotti. Al genio di Lord Kelvin, che li mirò in un fulgente crepuscolo, essi parlarono un linguaggio altrettanto solenne quanto le maestose vestigia dell'antica potenza dell'Urbe.

*
* *

Ho cercato fin qui di descrivervi nei brevi confini che mi erano concessi e nel modo che le mie forze consentivano l'effetto che il mondo moderno ha risentito dal recente sviluppo scientifico ed ho brevemente accennato alla evoluzione che lo scienziato ha subìto; ma ho potuto mettere in luce (e solo fuggevolmente) un lato appena del gran quadro che le scienze presentano: quello che può considerarsi come il lato esteriore; l'interiore, che senza dubbio offre il maggiore interesse, è rimasto così completamente nascosto.

Eppure il valore della scienza non consiste solo nella sua pratica utilità nè la forza di essa ed il suo punto di appoggio stan solo nel pubblico che si giova dei suoi risultati e ne intuisce con ammirazione le vive sorgenti.

Il valore della scienza, che ha ispirato tanti profondi pensieri e tante pagine eloquenti al Poincaré, si rivela eziandio con altre forme ancor più nobili ed elevate: si rivela per gli stessi intimi caratteri del lavoro scientifico, per le soddisfazioni che esso procura. Nella pura e disinteressata ricerca della verità, che ne è il fine supremo, la gioia maggiore pel sereno ricercatore sta nell'apprendere, non nel sapere.

Ma non è mio compito di parlarvi del movimento interiore delle scienze. Le conferenze generali che vi terranno chiari scienziati, le quali toccheranno i tre grandi rami delle scienze fisico-chimiche, di quelle biologiche e delle sociali; i discorsi di apertura dei presidenti delle singole sezioni, i rapporti sui progressi dei vari capitoli delle diverse discipline, le comunicazioni originali e le discussioni; insomma l'intero lavoro del presente Congresso, quello solo potrà presentarvi lo spettacolo di quanto vive e palpita nell'interno del mondo scientifico; vi mostrerà quali sono i misteri che febbrilmente si cerca di svelare, le vittorie conseguite, le delusioni sofferte, che, per quanto crudeli, non debbono dissimularsi.

Il momento attuale non sarebbe nemmeno opportuno per uno sguardo sintetico sulle varie discipline: troppo positive e fondamentali scoperte si vanno rapidamente accumulando ed attendono di essere classificate, connesse tra loro ed organizzate, mentre una critica profonda, acuta e, direi quasi, spietata, scrutando e anatomizzando ogni singolo atto del pensiero ed ogni forma di speculazione, mina tanti sistematici edifici che ieri sembravano ancora dover sfidare i secoli, oggi formano grandi e sparse rovine, su cui vi è già chi cerca sollecito di ricostruire.

Ma non mi è possibile di passare sotto silenzio e di non ricordare ciò che ogni attento osservatore conosce già per propria esperienza: cioè che quasi tutte le discipline scientifiche traversano oggi una grande crisi, crisi delle condizioni in cui si elaborano, crisi del pensiero filosofico che le informa.

Si manifesta la prima con un singolare contrasto: mentre da un lato il bisogno di raggiungere un'abilità tecnica rende necessaria la specializzazione e la divisione del lavoro scientifico, giacchè una intera vita è in taluni casi appena sufficiente per acquistare quelle attitudini senza le quali nessun progresso positivo è possibile; dall'altro le diverse discipline si sono talmente compenetrate, che non si comprende al dì d'oggi come si possa avanzare nell'una senza conoscerne, e profondamente conoscerne, molte altre e non quelle sole che si ritenevano or son pochi anni affini, ma anche delle nuove, rivelatesi ora strettamente connesse. Il lavoro collettivo che si manifesta più intenso e diffuso nelle scienze maggiormente progredite, come l'astronomia, la creazione di grandi scuole che si aggruppano attorno ad uomini di genio, come avviene nei paesi più avanzati, tendono bensì a coordinare e disciplinare le individuali energie, ma l'equilibrio da cui solo potrà scaturire benefica quella economia degli sforzi a cui tutti aspiriamo, è ben lungi dall'essere raggiunto.

Ciò però non costituisce che uno degli aspetti con cui si manifesta la crisi a cui abbiamo accennato; l'altro, che interessa il pensiero filosofico, impressiona e colpisce ancor maggiormente.

Che le ipotesi siano un mezzo e non un fine nella scienza, che si possa abbandonare domani quella che oggi fidenti abbracciamo, è antica persuasione; tanto antica che già per gli astronomi greci ogni ipotesi cosmica era accettabile, purchè potesse servire a calcolare la posizione degli astri.

Ma il periodo storico attuale si differenzia da quelli che precedettero perchè, non solo le singole ipotesi, ma anche i grandi principii, taluni dei quali non si discutevano più ed erano universalmente accettati e quasi come dogmi insegnati, sono divenuti subitamente oggetto di discussione e di critica, mentre vecchi sistemi, che sembravano da lungo tempo e per sempre seppelliti, ad un tratto inaspettatamente risorgono.

Forse agli occhi dei nostri posteri il momento storico attuale apparirà come a noi quello del Rinascimento, in cui il concetto del sistema del mondo cambiò la base stessa su cui era poggiato.

Centro del movimento critico moderno, il quale ha condotto all'attuale periodo di perturbazione, è stato indubbiamente negli ultimi anni la matematica.

È appena un secolo – osservava acutamente il Mittag Leffler, scrivendo le belle pagine dedicate alla memoria di Abel[46] – che questo grande analista proclamò apertamente essere la matematica fine sufficiente a sè medesima e portare il suo ideale in sè stessa. E pure, può aggiungersi, non vi è secolo in cui la matematica si sia più largamente diffusa al di fuori dei limiti della sua intrinseca attività ed abbia fecondato campi così lontani dal proprio, mentre suscitava una nuova e fiorente filosofia.

La matematica, ripiegandosi su sè medesima, come pensava Abel, onde costituire prima e consolidare poi quella teoria delle funzioni e quella geometria che furon il fondamento delle ricerche degli ultimi anni, condusse a tal perfezione l'analisi del pensiero con l'esame assiduo e profondo dei propri concetti e dei mezzi di cui dispone, che questi acquistarono tanta acutezza, flessibilità e potenza da penetrare e commuovere tutta la speculazione scientifica e filosofica.

È così, per citare un solo esempio famoso, che uno scritto di carattere schiettamente geometrico del Beltrami[47], il quale attingeva le sue origini alle ricerche

---

[46] G. MITTAG-LEFFLER, *Niels Henrick Abel* (*Revue du Mois*, t. VI, 10 luglio, 10 agosto 1907).

[47] EUGENIO BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (*Giornale di Matematiche*, vol. VI). Vedi anche

di Gauss, di Lobatschewski e di Riemann sulla geometria non euclidea, fu di tanto universale importanza da rischiarare di novella luce la teoria della conoscenza e i fondamenti della logica stessa.

La critica moderna dei matematici è penetrata trionfalmente nelle scienze fisiche e vi ha determinato nuove correnti di pensiero.

La meccanica fu la via attraverso la quale il nuovo indirizzo penetrò. Non è nuova del resto per questa scienza la funzione che ha così esercitato.

Ma un fatto capitale è pure intervenuto che tende a mutare la posizione stessa di questa disciplina nel campo delle scienze fisiche.

Noi tutti della nostra generazione (possiamo apertamente dirlo) fummo educati con quei principii che un moderno vocabolo chiama meccanicisti; ed infatti, che tutti i fenomeni, almeno quelli studiati dalla fisica, potessero ricondursi a fenomeni di moto e tutti rientrare nell'orbita della meccanica classica, era un dogma a cui ogni scuola si inchinava e la cui origine si perde nella lontana filosofia Cartesiana.

Ma un poco per volta le teorie meccaniciste si sono trasformate; le difficoltà si sono accumulate; le idee iniziatesi con Rankine, così strenuamente sostenute dal Mach (il quale però occupa una posizione distinta da tutti nella filosofia delle scienze), proseguite da altri, si son fatte strada: e molti han combattuto sotto l'insegna

---

Opere matematiche di Eugenio Beltrami, (t. I, pag. 374, Milano 1902).

che portava il motto celebre: guerra contro la mitologia meccanica.

La energetica si formò ed essa classificò la meccanica a lato delle altre scienze fisiche e non più base comune di queste. Una nuova comune base si costituì poggiata su principii più larghi e più comprensivi.

Quest'orientamento di idee, oggetto di tante dispute e discussioni di matematici e naturalisti, non rappresenta però il limite estremo a cui si è pervenuti. La critica dei fisici matematici che ci appare come la osservazione ultramicroscopica, rispetto a quella ordinaria del microscopio, scruta ora e discute questi stessi principii dei quali è giunta a diffidare.

In verità i concetti moderni sulla costituzione elettrica della materia, mentre sono connessi alle idee atomiche e cinetiche, e riconducono a principii simili a quelli dell'antica meccanica fisica, portano d'altra parte sui concetti di massa e d'inerzia, posti da Newton a base di tutta la filosofia naturale, una profonda rivoluzione resa ancora più grande dalle nuove teorie sulla relatività che vanno in oggi sviluppandosi; talchè ben si comprende che i principii dominanti un mezzo secolo fa mal resistono alla bufera che sembra travolgerli.

Questa crisi si riverbera su tutte le scienze della natura; ed intanto, così in cielo come in terra, mille cose si rivelano che la filosofia non sognava: dall'azione della luce sul movimento degli astri, alle nuove fonti del calore terrestre.

Se si riflette inoltre che a poco a poco le teorie che han per fondamento la emissione sembrano risorgere, mentre pochi anni fa unica vittoriosa padrona nel campo dei fenomeni che si propagano a distanza era la teoria ondulatoria, il sentimento di sorpresa si accresce ancora, vedendo accanto a così nuove e inattese speculazioni apparire, non meno inattesi, antichi concetti, come spettri sorgenti da sepolcri ritenuti ormai chiusi.

Forse ancor più che nella fisica stessa la rivoluzione delle idee si manifesta nella scienza sorella: la chimica; ove i nuovi concetti sulla costituzione dell'atomo, trasformano e sconvolgono le antiche e classiche teorie; ove il sogno degli alchimisti risorge pieno di tanti misteri e di tante promesse; ove un nuovo fiorente ramo, la fisico-chimica, ricco di risultati e di speranze, è spuntato.

Nel vergine campo della fisico-chimica si sono incontrate le più opposte tendenze ed è ben difficile stabilire a quale di esse si debbano i risultati di maggiore interesse. Infatti, se da un lato le teorie schiettamente cinetiche originarono le scoperte di Van der Waals, dell'Arrhenius e di tanti ancora, d'altro canto la energetica ha qui trovato non da distruggere o mutare, ma da edificare fruttuosamente ed in questo campo il suo benefico influsso si è fatto profondamente sentire.

Vi è un tipo caratteristico di ragionamento che non esiterei a chiamare energetico. Potente e fecondo, rimonta con le sue origini a Carnot ed al suo memorabile ciclo; esso domina sovrano in tutta la fisico-chimica teorica, e le dottrine che ad esso si inspirano hanno avuto le più importanti conseguenze. Ma le applicazioni di questo ragionamento di tipo energetico si sono estese molto più lontano ed in scienze diverse e non potrei non ricordare che il risultato a mio avviso più caratteristico e suggestivo della economia matematica, cioè la dimostrazione generale che la equazione differenziale dell'equilibrio economico è illimitatamente integrabile, può fondarsi sopra di esso[48]. È da presumere e da sperare che ben altri risultati ancora possano ricavarsene.

Questo accenno mi condurrebbe naturalmente a parlare dell'influenza che esercitano i metodi matematici sulle scienze morali e delle trasformazioni ed innovazioni che vi determinano, ma in tal modo varcherei i limiti che mi sono prefisso.

E questi limiti mi consentono solo di affermare fuggevolmente che la giovane fisico-chimica, di cui abbiamo discorso, ha apportato alla fisiologia un contributo di fatti nuovi, origine di un nuovo indirizzo di idee.

Ed a proposito delle scienze biologiche dirò soltanto di volo della grande crisi che colpisce i concetti fondamentali della vita, della evoluzione, della eredità e che ha portato tanta perturbazione nella dottrina del Darwinismo, il quale dopo esser stato la guida delle menti per un mezzo secolo, ora, dopo le più recenti ricerche di botanici e zoologi, sembra perdere non certo l'importanza,

---

[48] Cfr. VOLTERRA, *L'economia matematica e il nuovo manuale del prof. Pareto* (*Giornale degli Economisti*, aprile 1906).

ma forse la preponderanza che un tempo gli era riconosciuta.

Diversi sono i fattori che hanno cooperato e cooperano a questa trasformazione di pensiero, nè io posso nemmeno accennarli; ma certo la osservazione attinta a tutte le sorgenti della scienza e della pratica, i nuovi metodi sperimentali della chimica fisiologica e, non ultimi, quelli della biometria (fonte sempre più apprezzata di risultati positivi e di leggi ben definite e sicure) preparano per le discipline biologiche una nuova era[49].

E mi sembra di vedere delinearsi dei metodi che forse un giorno potranno avere una larga applicazione.

Esiste, come osserva il Picard, una meccanica della ereditarietà che si contrappone a quella classica secondo la quale lo stato presente soltanto individua tutto il futuro di un sistema.

Ora il concetto di funzione, che dominò la matematica nell'ultimo secolo, si è esteso, ed a questa estensione si riattaccano nuove questioni che condussero ad utili risultati. È facile intravedere, che dipendentemente da essa possa costituirsi una meccanica della ereditarietà, la quale, riesca a rapprensentare con maggior precisione i fenomeni elastici, magnetici e gli altri, in cui la isteresi ha sì grande importanza[50].

[49] Vedi il primo di questi *Saggi*.
[50] Vedi gli ultimi di questi *Saggi*.

A quale avvenire, io mi domando, questa meccanica, potrebbe essere un giorno destinata, se riuscisse a penetrare nel campo dei fenomeni biologici?

Ma non è prudente fare alcuna profezia. La storia della scienza insegna che è bastata talora la scoperta di un tenue fatto positivo nuovo per sconvolgere tutte le previsioni che sembravano meglio fondate. Le estrapolazioni in un campo in cui le leggi sono incerte od ignote è un pericolo al quale io intendo sfuggire.

*

* *

Ma è pur tempo che io chiuda il mio dire e che riassuma il mio pensiero.

Due fatti ho voluto mettervi contemporaneamente dinanzi agli occhi: l'avvicinamento tra il pubblico e gli uomini di scienza, dovuto allo stato d'animo che nell'uno e negli altri ingenera il sentimento scientifico dominante nel mondo odierno; e la grande crisi che agita oggi tanti rami del sapere. All'uno ed all'altro di essi corrispondono nuovi bisogni della umana società, bisogni cui ogni paese civile deve soddisfare se non vuole che si arresti o languisca la propria vita intellettuale e che si inaridiscano le fonti della propria prosperità.

La crisi interiore che agita e trasforma tante dottrine rende necessaria l'ampia, libera e diretta discussione fra gli studiosi, determina in essi l'urgenza di manifestarsi personalmente i pensieri che li occupano, i dubbi che li tormentano, le difficoltà che li arrestano, le speranze che li sospingono. I libri e le memorie non servono, nè mai potranno servire a tal fine; il bisogno sta precisamente nel dire e nell'apprendere quello che non si osa ancora di pubblicare o che non si pubblicherà mai.

Le antiche accademie sono un campo troppo chiuso, gli istituti di insegnamento hanno già altri intenti determinati, le singole società scientifiche sono un terreno troppo ristretto per prestarsi a questi scopi; essi solo possono conseguirsi in seno ad una vasta associazione che raccolga i cultori di tutte le discipline, qual'è quella che noi oggi inauguriamo.

D'altra parte ogni giorno vediamo moltiplicarsi le opere e le riviste scientifiche che si rivolgono al gran pubblico, il quale accorre sempre più frequente e curioso alle conferenze ed alle lezioni popolari.

Ma, come nasca e si formi il pensiero scientifico e come l'idea dapprima vaga si determini e si concreti nella mente dello studioso, questo nessun libro potrà mai dire, nessun discorso potrà mai rappresentare, nel modo stesso che le preparazioni di un museo zoologico non potranno mai darci l'idea della vita.

Ebbene, tutto ciò che il pubblico non può apprendere nè da libri nè da discorsi, si paleserà quando esso assista e si mescoli alle discussioni degli uomini di scienza, giacchè son le dispute spontanee e vivaci, che mostrano sotto la luce più naturale e più vera il germogliare e l'esplicarsi di quei pensieri che di solito un troppo sapiente artificio divulga.

Non questo solo però il paese richiede alla istituzione che sorge; non la sola soddisfazione della curiosità di sapere, ma proficuo incoraggiamento e sprone ad ogni fecondo studio e ad ogni nuova e vitale ricerca. Gli uomini dedicati alle industrie, ai commerci, alle pratiche professioni, innumerevoli richieste hanno ogni dì da rivolgere alla scienza, la quale è di continuo premuta da un'onda crescente di persone che sperano da lei la soluzione dei nuovi problemi che lor si affacciano complessi e incalzanti e la invocano vittoriosa delle difficoltà ognora risorgenti.

Solo dinanzi ad una Associazione come la nostra, la quale, aperta e liberale, accoglie le più diverse categorie di uomini, tali questioni, che tanto interessano la scienza e la pratica, potranno essere efficacemente poste, giacchè il porle soltanto richiede necessaria la cooperazione delle varie tendenze. Ai laboratori e agli istituti scientifici spetterà poi il compito di maturarle e risolverle.

È perciò che con viva e sincera fede, con caldo entusiasmo, il Comitato ha promosso la nuova Associazione e vi ha qui convocati e gode ora nel vedere quanto numerosi siate convenuti, dalle scuole, dai laboratori, dalle pratiche occupazioni.

Eguale ardore anima tutti per la nascente Società, che coi nostri voti consacriamo a grandi e nobili fini; con eguale speranza ci arridono le sue sorti; il suo avvenire ci appare legato all'avvenire stesso della patria che sicura muove verso i suoi alti destini.

Nel terminare, il pensiero mi corre spontaneo al raffronto cui poc'anzi accennai fra l'epoca presente e il periodo del Rinascimento. Allora, nel mirabile rinnovellarsi di tutte le attività intellettuali, l'Italia divenne il centro del pensiero scientifico universale. Io lancio oggi l'augurio che sorte non meno grande ci sia riserbata, oggi che il sorgere ed il plasmarsi della schietta e genuina anima italiana ha ravvivato tutto il nostro pensiero e ci ha restituita l'antica patria.

ENRICO POINCARÉ

Questo discorso fu letto alla solenne inaugurazione del Rice Institute in Houston, Texas, il 10 Ottobre 1912 e fu stampato in francese nella *Revue du Mois* del 10 Febbraio 1913 e nella nuova Collezione scientifica diretta da Emilio Borel, 1914, insieme a scritti di altri autori sul Poincaré. Fu tradotto in inglese da G. C. Evans e pubblicato nel 3° Volume di *Book of the opening of the Rice Institute* e in *the Rice Institute Pamphlets*, Vol. I, N. 2, Maggio 1915.

Un uomo vale tanto più quanto meno apprezza la vita; ma vi è un caso in cui, anche da parte di chi non tema la morte, può giustificarsene l'orrore. Pensiamo ad uno scienziato, il quale abbia concepito delle idee che comprende essere utili e feconde, mentre sente ch'esse sono ancora vaghe e confuse e che a svilupparle è necessario un lungo e paziente lavoro, affinchè esse siano comprese, apprezzate ed applicate. Se egli riflette allora, che la morte potrebbe da un istante all'altro annientarle, e che lunghi anni potrebbero ancora trascorrere prima che altri le ritrovasse, si comprende come egli possa attaccarsi appassionatamente alla vita e sentir mescolarsi alla gioia del lavoro il timore d'interromperlo per sempre.

Si può imaginare l'angoscia terribile di Abel, il quale sentiva avvicinarsi la morte e sapeva che nessuno di quanti lo circondavano comprendeva le sue idee da lui ritenute irreparabilmente perdute. E così si intuisce quali terribili momenti abbia trascorsi Galois, prima di recarsi a quel duello dal quale non doveva mai più ritornare, quando si pensi ch'egli non aveva ancora scritto una sola parola sulle sue grandi scoperte.

Poincaré è morto nel momento più brillante della sua carriera, nel pieno vigore delle sue facoltà intellettuali, mentre il suo genio, giovane ancora, concepiva idee nuove ed originali. Ha egli avuto coscienza che tutto quanto stava germogliando dal suo potente cervello sarebbe stato distrutto in un solo istante?

Nessuno certo oggi può dirlo; ma io mi auguro per la pace dei suoi ultimi giorni, ch'egli non abbia sentito approssimarsi la morte, sebbene le pagine della sua ultima memoria rivelino tristi presentimenti.

Poincaré adesso riposa e forse son queste le sue prime ore di riposo, giacchè la ininterrotta attività svolta nelle innumerevoli questioni da lui trattate, nei nuovi campi della scienza da lui esplorati, nella divulgazione delle sue idee, dimostra che durante tutta la vita egli non ha per un solo istante cessato di affaticare il suo cervello.

Da buon soldato è rimasto sulla breccia sino all'estremo respiro. Negli ultimi trent'anni non vi fu nessuna nuova questione, più o meno collegata alle matematiche ch'egli non abbia sottomessa alla sua profonda analisi e che non abbia arricchita di qualche feconda scoperta o di qualche acuta osservazione.

Forse nessun altro scienziato ebbe come lui tanti e così costanti rapporti col mondo scientifico dell'epoca sua.

Fra esso ed Enrico Poincaré esisteva uno scambio continuo, rapido ed intenso di idee, che non si è interrotto mai fino a che il suo cuore non ha cessato di battere; ed è perciò che se si volesse personificare con una figura di scienziato l'ultimo periodo storico della matematica, tutti penserebbero ad Enrico Poincaré, a quest'uomo che fu il più celebre matematico degli ultimi tempi.

E poco a poco egli aveva fatto di sè stesso un tipo di dotto e di filosofo al quale molti matematici del suo tempo, per inconsapevole simpatia, cercavano di avvicinarsi senza raggiungerlo.

*

* *

Il movimento scientifico, e nel tempo stesso i rapporti della scienza con la vita, e quelli del pubblico con gli uomini di scienza, sono profondamente cambiati negli ultimi decenni; le cause di ciò sono facili a comprendere, gli effetti ne sono palesi.

Nuove invenzioni, la cui eco si è rapidamente sparsa dappertutto, ed i cui benefici effetti si sono profondamente fatti sentire in una gran cerchia di persone, hanno influito su tutte le manifestazioni della vita. La scienza quindi, e specialmente le matematiche e la fisica, sono andate sempre più divulgandosi, ed il pubblico attende da esse risultati sempre nuovi e sempre più utili. Forse, si è giunti ad avere una fiducia, in queste discipline, superiore alla loro stessa intrinseca potenza.

Lo scienziato che restava ancor pochi anni fa rinchiuso e quasi nascosto nel suo studio o nel suo laboratorio, viene oggi in contatto continuo con altri dotti e col pubblico; è assalito da ogni parte da richieste e purtroppo è sollecitato a rispondere ancor prima che una esatta risposta sia maturata nel suo pensiero. I congressi e le riunioni scientifiche si sono moltiplicati; alle lezioni accademiche si sono aggiunte le conferenze popolari e dalle une e dalle altre il pubblico attende l'ultima parola della scienza.

Ma non si ha più il tempo di aspettare: la vita moderna affrettata e tumultuosa ha invaso i tranquilli rifugi dei dotti. Mentre nei secoli scorsi si pubblicavano grossi volumi, che sintetizzavano il pensiero di una intera vita di studio, oggi i giornali scientifici domandano comunicazioni su lavori che si vengono svolgendo; i rendiconti delle accademie pubblicano, in succinte note, scoperte appena intraviste, e nei congressi si dà notizia di ciò che non si è ancor fatto, si espone ciò che si spera di trovare, si parla di ciò che non si avrebbe mai coraggio di scrivere.

Questo movimento ha creato uno stato d'animo particolare negli uomini di studio, ne ha trasformato la vita, il modo di lavorare e perfino di pensare.

La vita scientifica moderna, che ho rapidamente tratteggiato, presenta grandi vantaggi in quanto il lavoro va diventando in gran parte collettivo, le energie dei singoli scienziati si sommano, le scoperte s'incalzano, l'emulazione sospinge gli studiosi, il cui numero si accresce di giorno in giorno. Ma quanti inconvenienti di fronte a questi vantaggi! Quanto lavoro sottile e minuzioso si perde! Quella pazienza che per Buffon si identificava col genio stesso, è forse stata soffocata nel tumulto dell'ora presente?

*
*   *

Poincaré fu uno scienziato moderno in tutta l'estensione del termine. Tutti i congressi e i convegni di studiosi ne intesero la parola; la maggior parte dei giornali scientifici ebbero da lui memorie e scritti; le università di Europa e di America, ascoltarono le sue letture e le sue conferenze.

Un lavoro così intenso ed assiduo genera fatalmente in un organismo debole un pericoloso sovraccarico intellettuale: quello che forse ha condotto Poincaré alla tomba. Il lavoro scientifico calmo e sereno è invece un riposo per lo spirito, giacchè la soddisfazione dei risultati nuovi che si scoprono improvvisamente, come un bel panorama allo svolto d'un sentiero di montagna, è un sollievo alla fatica della ricerca, e le difficoltà sostenute nell'approfondire un problema sono spesso largamente compensate da soluzioni che scaturiscono quando meno ci si pensa.

Questo lavoro, non molestato da estranee sollecitazioni, che Eulero e Lagrange hanno conosciuto, può paragonarsi ad un viaggio di piacere in un paese pittoresco, mentre quello imposto dalle conferenze pubbliche e dalle lezioni, o richiesto dai giornali ad epoca fissa, stanca ed irrita come un viaggio lungo e rapido attraverso un paese del quale sfuggono le bellezze e le attrattive.

Io credo che anche uno spirito così riccamente dotato, come quello di Poincaré, il quale possedeva, tutte le virtuosità dell'uomo di scienza e dell'uomo di lettere, doveva provare un senso di stanchezza, talora una vera spossatezza davanti alla massa di lavoro, che si accumulava senza tregua, per anni ed anni, e che diventava ogni giorno più incalzante ed intenso.

Ma era questa una necessità della vita moderna alla quale uno scienziato celebre, come Poincarè, popolare fra i matematici, fisici e filosofi non poteva sottrarsi. Forse egli ha considerato come un dovere del suo genio verso l'umanità, quello di divulgare i suoi pensieri senza nasconderne alcuno e perciò egli ha prodigato liberalmente le sue idee, anche le più intime e fondamentali, come un gran signore, che essendo possessore d'un immenso patrimonio, è sicuro, per quanto spenda, di non esaurirlo mai.

Il Poincaré non ha mai esitato fra il desiderio di far conoscere le sue scoperte ad un largo pubblico ed il timore di esporre risultati prematuri: un intuito eccezionale lo preservava dagli errori. Egli ha sempre comunicato i suoi trovati non celando neppure i suoi metodi, senza lasciarsi allettare da quell'arte sottile ed ingegnosa di esporre i risultati nascondendo la via per la quale ci si è giunti, ch'era così cara agli antichi e che è sempre così tentatrice. Nè si è mai fermato a perfezionare le sue scoperte e a dar loro forma sistematica e definitiva.

Eppure, quando si è ottenuto qualche nuovo risultato, è così piacevole fermarsi a considerarlo da ogni lato guardandolo sotto nuovi aspetti, traendone le più variate applicazioni. Ma Poincaré ha resistito a tutte queste tentazioni e sacrificando quelle soddisfazioni dello studioso ad un alto ideale, ha sempre proceduto innanzi. Non venne mai per lui il tempo di occuparsi dei particolari di questioni già trattate; anzi se ne astenne di proposito determinato; l'insieme era tutto, secondo il suo modo di vedere, il particolare non aveva alcun valore.

Questa foga incessante ha dato al suo stile nervoso un'impronta personale che lo caratterizza fra tutti: egli è fra gli scienziati come un impressionista fra gli artisti. Forse perciò è impossibile paragonare Poincaré ad altri studiosi anche dei più recenti.

Certo il suo nome non riman legato alla creazione di teorie universali quali quelle della gravitazione e dell'elettrodinamica, che resero immortali i nomi di Newton, di Ampère e di Maxwell. Nella immensa varietà di metodi ch'egli ha senza posa inventati ed applicati, ve n'è alcuno paragonabile a quelli per cui vanno celebri Archimede e Lagrange? Ci vorrà molto tempo per mettere in luce tutto quello che è contenuto nelle sue opere e per poter discernere quali siano i germi più fecondi.

Ma, se si domanda sin da oggi, all'indomani della sua morte, a qual livello si deve porre il suo genio, si può rispondere ch'esso raggiunge i culmini ove aleggiano i grandi spiriti dell'umanità. Vi è una analisi, una fisica matematica ed una meccanica di Poincaré che non saranno mai dimenticate.

La sua fama durante la vita è stata enorme; pochi uomini di scienza e pochissimi matematici ebbero una celebrità pari alla sua. Si potrebbe trovarne la spiegazione osservando che, come io diceva poco fa, il suo spirito vibrava all'unisono e nella stessa fase con lo spirito della sua epoca. Taluni dei più grandi scienziati hanno lavorato per un impulso interno, senza curarsi di coloro che li circondavano e sono stati disconosciuti, perchè il tono della loro voce non si accordava con quello dei loro contemporanei, sicchè le note emesse hanno risonato in epoche posteriori.

Non vi è cosa più ardua che prevedere quale sarà la fama avvenire d'uno scienziato, dacchè la storia ha dato troppe smentite alle facili previsioni.

Quante volte ciò che ha suscitato ieri l'ammirazione ci è oggi indifferente!

Ma è sicuro che la voce di Poincaré si prolungherà nei secoli. Egli ha trattato un numero così grande di questioni che molti dovranno lavorare per sviluppare ciò che egli ha iniziato e per approfondire l'opera sua. Essa sarà una preziosa miniera per i posteri, ed allora soltanto se ne potrà valutare la ricchezza.

*
*   *

Le precedenti considerazioni valgono a giustificare i criteri che ho seguito in questo studio. Non essendo possibile riassumere in modo adeguato l'intera opera di Poincaré e porgere una sintesi completa della sua mente e della sua mirabile attività, io tenterò di mettere in luce un piccolo numero delle sue scoperte, cercando di tracciarne le linee principali e di fissare il posto che occupano nella storia della scienza contemporanea. Chiedo venia se ricordo fatti conosciuti e se accenno a nozioni elementari, giacchè non potendo essere completo desidero almeno di essere chiaro.

Spero che si comprenderà la scelta che ho fatta dei lavori di Poincaré nell'intento di assumere esempi dai differenti rami delle matematiche, per seguire il corso delle maggiori concezioni uscite dalla sua mente.

*

* *

Comincerò da uno studio che, per primo, pose il Poincaré in luce fra i matematici e rivelò d'un tratto il suo talento di analista. Intendo parlare della teoria delle equazioni differenziali lineari e delle funzioni fuchsiane[51].

La teoria delle funzioni fu la conquista più importante fatta dall'analisi nel secolo scorso; io non ho esitato nel 1900 al Congresso Matematico di Parigi a chiamare il secolo XIX il secolo della teoria delle funzioni[52]. Ed infatti l'idea intuitiva di funzione che tutti posseggono ed è strettamente legata al concetto elementare di quantità variabili secondo leggi determinate, si è largamente sviluppata e precisata nel periodo moderno della matematica ed è penetrata poco a poco in tutti i rami di questa scienza.

La nozione di funzione fu accolta dapprima dalla geometria analitica e dall'algebra; Lagrange fu il primo a trattarne in generale ed in modo sistematico nella

---

[51] Vedi Oeuvres de HENRI POINCARÉ, Tome II, (il solo pubblicato), Paris, Gauthier, Villars, 1916.

[52] Vedi il secondo di questi *Saggi*.

celebre opera sulla teoria delle funzioni analitiche in cui si trovano i germi delle future scoperte[53]. Però per costituire la teoria in modo definitivo e per giungere a riconoscere le proprietà più riposte ed interessanti delle funzioni, fu necessario estendere il campo delle variabili considerando anche i loro valori immaginari e complessi: studiare una funzione senza considerarne i valori imaginari e complessi sarebbe in molti casi un voler conoscere un libro guardando quello che è scritto sul dorso senza leggerne i fogli interni. Cauchy, Riemann e Weierstrass ci hanno insegnato a leggere il libro misterioso e col loro genio ce ne hanno svelato i segreti più riposti.

Ma come spesso accade non si può costituire una teoria generale se prima non si è studiato profondamente qualche caso particolare. È sempre necessaria una guida per orientarsi in una regione nuova ed inesplorata. La guida che si ebbe nella teoria delle funzioni fu lo studio particolareggiato delle funzioni ellittiche. A svolgere questo ultimo ramo della analisi si era stati condotti da numerose questioni di algebra, di meccanica, di geometria e di fisica, ed esso veniva subito dopo quello delle funzioni trigonometriche che erano state collegate da Eulero ai logaritmi e alla funzione esponenziale.

La storia delle funzioni ellittiche è ben nota ed e stata ripetutamente scritta costituendo essa un ramo di specia-

[53] Vedi Oeuvres de LAGRANGE, T. IX. *Théorie des fonctions analytiques*;T. X, *Calcul des fonctions*, Paris, Gauthier Villars, 1881, 1884.

le interesse della storia delle matematiche. Si sa quali sorprese hanno riservato i passi fatti nel suo successivo svolgimento, passi ricollegati ciascuno a qualche meravigliosa scoperta. La teoria generale delle funzioni e tutti i suoi rami particolari svoltisi di poi furono modellati sullo stampo della teoria delle funzioni ellittiche, e così quella delle funzioni fuchsiane che costituisce il ramo più moderno, ne riproduce, secondo il piano immaginato dal Poincaré, le linee fondamentali.

I principii sui quali è costituita la teoria delle funzioni ellittiche sono tre: il teorema d'addizione, il principio dell'inversione, e quello della doppia periodicità.

Chiunque conosca gli elementi della trigonometria sa che esistono formule algebriche semplicissime per calcolare il seno e il coseno della somma di due archi mediante i seni e i coseni di questi. Anche il teorema d'addizione delle funzioni ellittiche ha assunto nella sua espressione definitiva una forma analoga. Ma non si è presentato così fin da principio. Fagnano, geometra italiano di molto ingegno, che viveva in una piccola città delle Marche, lungi da ogni movimento scientifico, lo riconobbe da prima studiando le proprietà della *Lemniscata* di Bernoulli.

Ma fu necessario il genio di Eulero per porre in luce la vera natura di questa proprietà in tutta la sua estensione.

L'altro principio più nascosto, quello della doppia periodicità, non si rivelò che molto più tardi. La periodicità delle funzioni trigonometriche discende immediatamente dalla loro stessa definizione: la doppia periodicità delle funzioni ellittiche non fu scoperta se non quando Abel e Jacobi stabilirono il principio della inversione di queste funzioni, vale a dire se non dopo la profonda rivoluzione che essi suscitarono in questo campo di studi. Mentre Legendre credeva che la teoria delle funzioni ellittiche avesse oramai raggiunto la sua massima perfezione, non se ne era ancora iniziata la parte più brillante.

Abel e Jacobi continuarono poi nella via che avevano tracciato, e andando al di là della teoria delle funzioni ellittiche, costituirono la teoria generale degli integrali delle funzioni algebriche basandola sul teorema di Abel che estende il teorema di addizione, sul principio generale dell'inversione che Jacobi portò alla sua massima estensione, sulla periodicità multipla e sull'impiego delle funzioni che vennero chiamate jacobiane.

Un nuovo principio d'inversione, una concezione nuova della periodicità, un tipo rinnovato di funzioni jacobiane vennero in un sol tratto create dal Poincaré. In questo consiste sostanzialmente la nuova teoria da lui costituita delle funzioni che volle chiamare fuchsiane, la quale è intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali lineari.

L'integrazione delle equazioni differenziali è il problema più importante del calcolo infinitesimale dopo quello delle quadrature. Le più semplici di esse sono le equazioni lineari. Ne abbiamo subito un esempio immaginando una relazione di primo grado fra lo spostamento, la velocità e l'accelerazione d'un mobile e supponendo che i coefficenti dell'equazione siano funzioni del tempo. L'equazione particolare così ottenuta è del secondo ordine perchè la velocità è la derivata prima, mentre l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento. Si possono però trovare facilmente equazioni differenziali lineari nelle quali compaiono derivate di ordine superiore.

Lagrange ed altri matematici le avevano studiate, ma si deve a Gauss di avere penetrato a fondo le proprietà d'una classe speciale di esse ricollegandola alla sua serie ossia alla *funzione ipergeometrica.* Riemann, sia in lavori da lui pubblicati, sia in altri rimasti inediti, era arrivato ancora più lungi e sembra che Weierstrass fosse in possesso di molti resultati che non diede mai alla luce. Ma si deve a Fuchs di aver richiamato l'attenzione del mondo scientifico sul nuovo modo di considerare le equazioni differenziali lineari, con un articolo apparso nel 1866[54]. Per farsi un'idea del punto a cui giunse Fuchs si può paragonarlo a quello al quale era arrivato Legendre nel campo delle funzioni ellittiche prima che apparissero i lavori di Abel e di Jacobi.

Per opera del Poincaré la teoria degli integrali delle equazioni differenziali lineari ebbe uno svolgimento che può in certo modo aver riscontro con quello della teoria delle funzioni ellittiche dopo Legendre; svolgimento del tutto nuovo, giacchè solo un primo passo era stato fatto precedentemente in questa via collo studio della funzione modulare.

[54] *Giornale di Crelle*, T. 66.

Gli integrali delle funzioni algebriche si riproducono con l'aggiunta di costanti allorchè si gira intorno ai punti singolari. Da ciò deriva la periodicità delle funzioni ellittiche. In modo analogo l'insieme degli integrali fondamentali di un'equazione differenziale lineare a coefficienti algebrici subisce una trasformazione lineare allorchè si gira attorno ad un punto singolare. Occorreva far scaturire da questa notevole proposizione le proprietà delle funzioni che dovevan dedursi dalle equazioni differenziali lineari con un processo simile a quello della inversione degli integrali ellittici.

Se l'equazione è del secondo ordine, il rapporto di due integrali fondamentali subisce una sostituzione lineare allorchè si percorre un cammino chiuso attorno ad una singolarità. Dunque la variabile indipendente, considerata come funzione del rapporto di due integrali, deve essere invariante per certe sostituzioni lineari di questo rapporto. La proprietà che conveniva sostituire alla periodicità era così trovata e nel tempo stesso anche il principio d'inversione.

Poincaré ha preso come punto di partenza questa idea fondamentale ed interpretando geometricamente le sostituzioni lineari ha cominciato lo studio di quelle fra esse facenti parte di un medesimo gruppo discontinuo. Infatti era evidente che dovevano escludersi i gruppi continui di sostituzioni, perchè le funzioni monodrome, invarianti per gruppi continui di sostituzioni della variabile, debbono essere costanti.

È noto dalla geometria che le sostituzioni lineari corrispondono a trasformazioni del piano per raggi vettori reciproci composte con riflessioni. Queste trasformazioni hanno precipua importanza nella geometria non euclidea come vari matematici, tra cui Beltrami, hanno dimostrato. Poincaré distingue due specie di gruppi: quelli che chiama kleiniani i quali sono i gruppi discontinui più generali, e i gruppi fuchsiani.

Questi ultimi lasciano fisso l'asse reale, ma composti con una nuova sostituzione mantengono invariabile un cerchio chiamato da Poincaré fondamentale. In tale modo questi riconduce la ricerca di tutti i gruppi discontinui alle possibili divisioni regolari del piano e dello spazio. Egli classifica le sostituzioni fuchsiane in diverse famiglie e calcola tutti i gruppi corrispondenti.

Bisognava ora costruire effettivamente le funzioni che sono invariabili per le sostituzioni di questi gruppi; cioè le funzioni fuchsiane.

Jacobi era giunto, partendo dalle funzioni ellittiche, a costruire la funzione Θ ossia quella funzione che venne denominata Jacobiana. Senza essere periodica essa possiede ciò che si è convenuto di chiamare la periodicità di terza specie, perchè aumentando la variabile d'un periodo la funzione si riproduce moltiplicata per esponenziali. Ma Jacobi aveva anche mostrato che la maniera più semplice di trattare la teoria delle funzioni ellittiche consiste nel definire dapprima la funzione Θ, costruendola mediante una serie, e nel trovarne poi le proprietà con procedimento algebrico.

Una volta calcolata la funzione Θ, le funzioni doppiamente periodiche, ossia le funzioni ellittiche, si ottengono formando semplici rapporti.

Poincaré seguì un cammino analogo per avere le funzioni fuchsiane: cominciò dal calcolare le serie Θ-fuchsiane e determinò i cambiamenti ch'esse subiscono per sostituzioni lineari della variabile appartenenti ad un gruppo fuchsiano. Formando poi i rapporti delle funzioni Θ-fuchsiane ne riconobbe la invariabilità allorchè si assoggetta la variabile indipendente alle sostituzioni del gruppo stesso.

In tal modo vennero ottenute le nuove trascendenti (le funzioni fuchsiane) la cui introduzione nella matematica creò un ramo nuovo dell'analisi. Noi non entreremo in particolari sulle loro proprietà, nè sui legami loro colle funzioni abeliane e con altre trascendenti e nemmeno parleremo delle numerose questioni di aritmetica, di algebra e di analisi che più o meno direttamente vi si ricollegano. Ma ci conviene accennare alla connessione fra le funzioni fuchsiane e gli integrali delle equazioni differenziali lineari a coefficenti algebrici.

Il procedimento che il Poincarè impiegò per ottenere questa connessione è analogo a quello col quale si collegano gli integrali abeliani, alle funzioni Θ generalizzate ossia alle Θ-abeliane. Perciò egli ricavò le funzioni z-fuchsiane dalle fuchsiane ed espresse mediante queste trascendenti gli integrali che voleva calcolare.

Si è più volte domandato se le funzioni fuchsiane hanno avuto qualche applicazione: ma si può replicare con un'altra domanda: quale importanza deve attribuirsi alle applicazioni d'una teoria matematica? È necessario per saggiare una teoria vederla adoperata in meccanica o in fisica? La teoria delle coniche che i Greci portarono a così mirabile perfezione ebbe forse il suo posto d'onore nella geometria solo il giorno in cui si è creduto che i pianeti descrivessero delle coniche intorno al sole? Non costituiva quella dottrina geometrica un superbo monumento artistico ed una gloria del pensiero umano indipendentemente da ogni sua applicazione?

Ma lasciamo da parte questa discussione che ci porterebbe troppo lungi dalla nostra esposizione, la quale deve abbandonare i lavori di analisi del Poincaré, per passare a quelli da lui compiuti in altri rami delle matematiche.

*
* *

Vi sono due specie di fisica matematica che per antica consuetudine si considerano costituenti un sol ramo di scienza e s'insegnano di solito nei medesimi corsi, sebbene esse siano intrinsecamente diverse. Anzi quelli che fan più caso dell'una sdegnano un po' l'altra.

Un'analisi sottile e delicata è penetrata in vari rami della fisica cercando risolvere in maniera completamente rigorosa alcuni problemi fondamentali e sforzandosi di stabilire proposizioni (come i teoremi di esistenza) le quali dal punto di vista matematico e logico formano la base delle varie teorie. Quest'analisi può dirsi costituire la fisica matematica della prima specie.

Io credo di non ingannarmi affermando che molti fisici considerano questa flora matematica come piante parassite del grande albero della filosofia naturale. Ma questo disprezzo è esso giustificato? Nell'evoluzione futura della fisica matematica queste ricerche acquisteranno molto probabilmente importanza sempre maggiore.

Se esponete ad un principiante le proposizioni più elementari di Euclide, egli non si meraviglierà certo degli enunciati, tanto grande è la loro semplicità, ma sarà sorpreso della necessità di dimostrarle, non avendo egli ancora raggiunto un grado di maturità sufficiente per dubitarne. Nello stesso modo certi teoremi che si dimostrano in fisica matematica producono in alcuni un'analoga sorpresa.

Noi non conosciamo abbastanza l'evoluzione preeuclidea della geometria, ma vediamo soltanto la geometria greca nel grado di perfezione a cui Euclide la condusse. Ora è molto probabile che, nel costituirsi della geometria, si sia attraversato un periodo nel quale un disprezzo analogo a quello cui sopra alludemmo si è manifestato, seguito poi da altri periodi nei quali esso è andato poco a poco scomparendo.

Ma vi è un'altra fisica matematica intimamente e inseparabilmente legata alla considerazione intrinseca dei fenomeni naturali, tanto che non si potrebbe concepire alcun progresso nel loro studio senza l'aiuto portato dall'analisi matematica che ne costituisce l'essenza. È possibile pensare alla teoria elettromagnetica della luce, alle esperienze di Hertz, al telegrafo senza fili, senza ricordare che fu l'analisi matematica di Maxwell da cui tutto questo insieme di dottrine, di ricerche e di invenzioni è scaturito?

Il Poincaré dominò le due specie di fisica matematica: egli era un analista senza pari e possedeva il genio proprio del fisico. Noi cercheremo fra i suoi lavori la prova di ciò.

La memoria di Poincaré del 1894 avente il titolo: *Sulle equazioni della fisica matematica* pubblicata nei rendiconti di Palermo[55] è uno dei suoi scritti più importanti. L'autore ricorda in una breve introduzione i lavori di alcuni suoi predecessori; ma la questione ha una lunga storia che io riporterò qui succintamente.

Comincio dall'osservare che il lavoro ha un carattere schiettamente analitico e perciò appartiene alla fisica matematica della prima specie. Donde viene infatti l'interesse della ricerca a cui consacrarono i loro sforzi tanti matematici? Nessun fisico avrebbe potuto dubitare che una membrana elastica deve dare una infinità di suoni di differenti altezze costituenti una scala infinita discontinua che dal tono più grave giunge ai toni più acuti. L'esempio dei suoni prodotti da una corda o da una verga elastica era sufficiente per far intuire ciò che si sarebbe trovato passando dal caso di una dimensione a quella di due dimensioni, ed anche ciò che si sarebbe trovato con-

[55] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. VIII.

siderando un corpo vibrante a tre dimensioni. Ma per i matematici era necessario dare una prova rigorosa di queste verità e la dimostrazione ne era molto difficile e nascosta. Nè si deve credere che la ricerca analitica avesse lo scopo di calcolare effettivamente le altezze dei suoni: ogni applicazione pratica era lungi dal pensiero dei matematici i quali avevano di mira soltanto il lato logico della questione. L'interesse veniva aumentato dalla difficoltà, onde la questione appassionava vivamente le menti dei matematici.

Ci si poteva render conto del resultato a cui si doveva giungere non solamente ricorrendo all'analogia sopra indicata, ma mediante un processo induttivo di singolare importanza filosofica.

Lagrange aveva riservato un intero capitolo ed uno dei più belli della sua meccanica analitica alla teoria dei piccoli movimenti[56]. In esso l'autore riesce ad eseguire completamente la integrazione ottenendo formule di mirabile semplicità. I periodi di vibrazione d'un numero finito di molecole collegate da vincoli arbitrari, e oscillanti attorno ad una posizione di equilibrio, stabile, resultano le radici d'una equazione algebrica.

Ora, ogni sistema continuo può concepirsi come un insieme di infinite molecole disposte in uno spazio a una, due o tre dimensioni; secondochè si consideri una corda, una membrana o un corpo solido. Basta dunque sostituire al numero finito di molecole di Lagrange l'in-

---

[56] Oeuvres de LAGRANGE, Tome XI, Seconde partie, Section VI. Paris, Gauthier Villars, 1888.

sieme adesso considerato, per estendere il suo risultato ai vari casi. Questo processo mostra in modo chiaro e suggestivo l'andamento del fenomeno, ma non costituisce da solo, senza ulteriore sviluppo, una dimostrazione atta a soddisfare i matematici.

La questione analoga a quella della teoria del suono, ora considerata, si presenta in altri casi della fisica matematica, per esempio: nella teoria delle vibrazioni elettromagnetiche ed in quella del calore.

Un solo risultato era stato ottenuto in maniera sicura e completamente soddisfacente fin dal 1885, ed era la dimostrazione analitica dell'esistenza del suono fondamentale ossia del primo armonico, il quale corrisponde alla mancanza di nodi e di linee nodali nella membrana vibrante. Ad esso era giunto Schwarz studiando la teoria delle superficie minime, cioè di quelle in cui si dispongono in equilibrio le lamine liquide sottili dotate di tensione superficiale, come quelle d'acqua saponata[57]. Nel problema di calcolo delle variazioni al quale si era così condotti, conveniva distinguere i massimi dai minimi e per conseguenza considerare la questione seguente: una funzione di due variabili si annulla al contorno di un campo a due dimensioni; il rapporto del suo parametro del secondo ordine al suo valore è una costante negativa in tutti i punti del campo. Qual'è il minimo valore assoluto di questo rapporto? Ora poichè il problema dei suoni dovuti alle vibrazioni d'una membrana consiste nel

[57] *Acta societatis scientiarum Fennicae*, T. XV.

trovare tutti i valori di questo rapporto, così il problema approfondito da Schwarz non ne costituisce che un caso particolare.

Si trattava dunque d'andare innanzi e di trovare tutti gli altri valori successivi al minimo di Schwarz. Picard aveva scoperto delle notevolissime proprietà e dimostrato l'esistenza del secondo armonico. Poincaré aveva già attaccata la questione in un lavoro pubblicato nel giornale americano di matematica, ma in questo lavoro egli fu ben lungi dall'ottenere la soluzione generale.

Lo scopo venne pienamente raggiunto in quello che ci proponiamo di esaminare.

Il teorema di Lagrange faceva intuire che i differenti suoni avrebbero corrisposto alle radici di una funzione trascendente e perciò Poincaré si propose la costruzione di una di tali funzioni o per dir meglio cercò provarne l'esistenza. A tal fine egli aggiunse un termine alla sua equazione e così, quella che egli prese a considerare era costituita da tre termini: il primo, il parametro differenziale di secondo ordine; il secondo, la funzione incognita moltiplicata per una nuova variabile indipendente; l'ultimo, una funzione arbitraria.

Noi chiameremo questa equazione, l'equazione ausiliaria: l'equazione primitiva si otterrà sopprimendone l'ultimo termine. Poincaré calcola la funzione arbitraria componendo linearmente le funzioni mediante coefficienti costanti indeterminati e sviluppa la funzione incognita (nulla al contorno) in una serie di potenze della nuova variabile introdotta, resultato che egli raggiunge impiegando le funzioni di Green. Egli ottiene così una funzione analitica il cui sviluppo è valido nell'interno d'un cerchio e che può calcolarsi come rapporto di due funzioni, una delle quali (il denominatore) è indipendente dalle variabili d'integrazione. Con un procedimento di mirabile sottigliezza mostra che si posson scegliere i coefficienti indeterminati, di cui parlammo sopra, in modo che queste due funzioni siano intere.

Allora sostituisce alla funzione incognita il rapporto di queste funzioni e dà forma intera alla equazione moltiplicandone ambo i membri per il denominatore. Si vede subito che allorquando questo si annulla la equazione ausiliaria si riduce all'equazione primitiva; perciò tutte le radici del detto denominatore danno i valori che si cercano. Niente dunque di più semplice di questo processo che si è potuto riassumere così brevemente. Ma quale finezza di pensiero e quale fecondità di risultati in esso si racchiude!

Io non ho esposto che la prima parte della memoria di Poincaré: lo studio delle radici, quello delle funzioni che risolvono l'equazione primitiva, le loro proprietà, gli sviluppi che ne seguono, le applicazioni ai problemi acustici e a quelli della teoria del calore, ne costituiscono le parti successive, e formano un insieme di risultati di fondamentale importanza che vennero poi impiegati da altri nello studio di numerosi problemi analoghi.

Questa classica memoria è uno dei più bei monumenti innalzati dal genio di Poincaré, però nell'evoluzione successiva della scienza si sono aperte altre vie per studiare gli stessi problemi giovandosi delle equazioni integrali. Noi non entreremo in questi sviluppi, oggi ben conosciuti, ma intraprenderemo l'esame di altre questioni e di altri lavori del Poincaré.

*
*   *

Pochi anni fa, in un certo periodo, si è forse potuto sospettare che le teorie atomiche e corpuscolari declinassero, giacchè taluni pensavano di poter tutto spiegare in natura col continuo. In fisica matematica le equazioni differenziali alle derivate parziali dei vari problemi si ottenevano abbandonando le ipotesi molecolari e nella chimica stessa si insinuava l'idea dell'inutilità degli atomi.

Ma le leggere nubi che sembravano offuscare le teorie corpuscolari si dileguarono rapidamente e le teorie stesse sono risorte vittoriose illuminando di più vivida luce l'intero campo della filosofia naturale. Fu anzi necessario sviluppare ulteriormente le vecchie teorie atomiche. L'elettricità si dovette ritenere di natura corpuscolare e, poco a poco, in ogni ramo sono sorti nuovi atomi: così l'energia raggiante diede luogo alla teoria dei *quanta*. I fatti via via scoperti si accordavano mirabilmente colle nuove teorie ed esse divennero alla lor volta sorgente ricca e feconda di altre scoperte, tanto che il credito loro venne aumentando di giorno in giorno. E si fece talmente solido che, quando fatalmente si presentarono delle contraddizioni, non si pensò a liberarsi dai nuovi concetti, ma al contrario non si esitò a sacrificare antichi principî ritenuti per l'innanzi come indiscutibili.

Poco a poco quelle teorie classiche che sembravano poggiate su basi incrollabili furono scosse; la meccanica che, dall'epoca di Galileo e di Newton, si considerava come la scienza più solida è stata sconvolta, ed una nuova meccanica, quella della *relatività*, si è costituita. Ma già oggi la prima forma di essa appare una meccanica invecchiata ed una nuova relatività spunta sull'orizzonte scientifico.

Poincaré ebbe larga parte nella trasformazione dell'antica fisica, e nella creazione della più recente. La sua critica e la sua analisi penetrarono e s'infiltrarono nelle concezioni moderne. Egli si appassionò per queste questioni fino agli ultimi suoi giorni e dedicò vari articoli per sviscerarle e talune delle sue ultime conferenze per volgarizzarle. Perciò, come Poincaré può annoverarsi fra i creatori della prima specie di fisica matematica, può anche dirsi maestro nella seconda.

*
* *

Dopo le scoperte di Maxwell ed i lavori di Hertz l'elettrodinamica dei corpi in riposo non presentò più serie difficoltà, mentre quella dei corpi in moto diede luogo a numerose discussioni. L'ipotesi proposta da Hertz per passare dal caso della quiete a quello del movimento dovette abbandonarsi, perchè in contraddizione coi dati sperimentati, i quali invece confermarono la teoria di Lorentz.

La celebre scoperta di Zeeman fu un brillante trionfo di quest'ultima perchè verificò lo sdoppiamento delle righe dello spettro in un campo magnetico che i calcoli di Lorentz facevano prevedere.

La teoria di Lorentz fu la sorgente di nuovi concetti, perchè diede origine alla *meccanica della relatività*. Infatti una questione fondamentale si presentò subito, se era cioè possibile mettere in evidenza il moto assoluto dei corpi o piuttosto i loro movimenti per rapporto all'etere mediante fenomeni ottici o elettromagnetici. In altri termini si fu condotti a verificare se i fenomeni ottici o elettromagnetici possono servire ad individuare il moto assoluto della terra.

Se si tien conto soltanto della prima potenza dell'aberrazione il moto della terra non ha influenza sui fenomeni stessi come l'esperienza verifica abbastanza facilmente, mentre la teoria di Lorentz spiega perfettamente questo resultato negativo.

Ma un'esperienza celebre di Michelson e Morley nella quale si poteva tener conto anche di termini dipendenti dal quadrato dell'aberrazione diede pure, come è ben noto, resultato negativo.

In una memoria classica del 1904 Lorentz mostrò che si poteva dar ragione anche di questo risultato coll'ipotesi che tutti i corpi siano soggetti ad una contrazione nel senso del moto terrestre[58]. Questa

[58] Amsterdam Proceeding, 1903-1904, pag. 809.

memoria fu il punto di partenza delle successive ricerche e dei lavori di Poincaré, di Einstein e di Minkowski.

Poincaré nel 1905 pubblicò nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences una succinta esposizione delle sue idee mentre un'estesa memoria di lui apparve poco dopo nei rendiconti di Palermo[59].

Base fondamentale di tutte queste ricerche è la negazione aprioristica di esperienze atte a mettere in evidenza il moto assoluto, ed essa costituisce il *postulato della relatività*. Lorentz aveva mostrato che quelle trasformazioni alle quali si è dato il suo nome non alterano le equazioni di un mezzo elettromagnetico. Due sistemi: l'uno immobile, l'altro in traslazione, sono così l'immagine esatta l'uno dell'altro, per cui si può imprimere ad ogni sistema un moto traslatorio senza che nessuno dei fenomeni apparenti venga modificato.

Nella teoria di Lorentz un elettrone sferico si contrae nella direzione del moto e assume la forma di un ellissoide schiacciato longitudinalmente rimanendo invariati gli assi trasversali. Poincaré ha trovato la forza che spiega contemporaneamente la contrazione di un asse e la invariabilità degli altri due la quale consiste in una pressione esterna costante agente sull'elettrone deformabile e compressibile; il lavoro di questa forza è proporzionale alla variazione di volume dell'elettrone. In tal modo se l'inerzia e tutte le forze fossero di origine elettroma-

[59] Sur la Dynamique de l'électron par M. H. Poincaré, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, T. 21, 1906.

gnetica il postulato della relatività potrebbe essere stabilito rigorosamente.

Ma, secondo Lorentz, tutte le forze, qualunque ne sia l'origine, sono affette dalla sua trasformazione nello stesso modo delle forze elettro-magnetiche. Come dovremo dunque modificare le leggi della gravitazione in virtù di questa ipotesi?

Poincaré trova che la propagazione della gravitazione deve farsi con la velocità della luce, ma si poteva dubitare, in seguito alle classiche ricerche di Laplace, che ciò fosse in contraddizione con le osservazioni astronomiche. Questo dubbio può dissiparsi, perchè, secondo il Poincaré, vi è un compenso che toglie ogni contraddizione. Egli fu così condotto a proporsi ed a risolvere la seguente questione: trovare una legge che mentre soddisfa alla condizione di Lorentz si riduce alla legge di Newton allorchè i quadrati delle velocità degli astri sono trascurabili rispetto al quadrato della velocità della luce.

Tali sono i concetti fondamentali di Poincaré che colpirono subito per la loro profondità ed il loro interesse il mondo scientifico. Egli fece uso nella sua trattazione del principio della minima azione e della teoria dei gruppi di trasformazione giacchè le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo[60]. Ci basti di aver ricordati questi concetti. Essi hanno formato l'oggetto di tanti lavori scientifici e di tante conferenze

[60] Cfr. MARCOLONGO e BURALI FORTI, Analyse Vectorielle générale II. Applications, Cap. VI, Pavia, 1913.

popolari che sono ora universalmente noti e la loro importanza è ovunque apprezzata.

*
* *

Noi finiremo coi lavori di meccanica del Poincaré, i quali costituiscono la parte della sua opera più difficile ad analizzarsi. Egli si è occupato di quasi tutti i rami della meccanica analitica: dei problemi di stabilità, di meccanica celeste, d'idrodinamica, del potenziale. Il problema dei tre corpi fu oggetto di numerose e celebri sue ricerche che sollevarono una profonda rivoluzione nei metodi classici. È ben noto che la memoria del Poincaré sul *problema dei tre corpi e sui problemi della dinamica* fu premiata nel 1889 nel concorso istituito dal re Oscar di Svezia[61]. Questa memoria fu seguita da poderose opere del Poincaré fra cui ricordiamo i tre volumi sui nuovi metodi della meccanica celeste e le sue lezioni della Sorbona[62]. L'ultima opera didattica del Poincaré fu consacrata all'esposizione e alla discussione delle diverse ipotesi cosmogoniche[63].

Le idee fondamentali che lo guidarono nei problemi di astronomia matematica furono: la considerazione del-

---

[61] *Acta mathematica*, T. 13, Stockholm, 1890.

[62] *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste par* H. POINCARÉ, Paris, Gauthier Villars, 1892-1899. *Leçons de Mécanique céleste* proféssées à la Sorbonne par H. POINCARÉ, Paris, Gauthier Villars, 1905-1910.

[63] *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* professées à la Sorbonne par H. POINCARÉ, Paris, Hermann, 1911.

le soluzioni periodiche, lo studio delle serie che risolvono il problema dei tre corpi, l'impiego degli invarianti integrali.

Le soluzioni periodiche del problema dei tre corpi si presentano allorchè le loro mutue distanze sono funzioni periodiche del tempo. Alla fine di un periodo i tre corpi si trovano nelle stesse condizioni relative iniziali, giacchè tutto il sistema non ha fatto che ruotare d'un certo angolo.

Il Poincaré è condotto a distinguere tre classi di queste soluzioni considerando le eccentricità e le inclinazioni. Egli esamina anche le soluzioni assintotiche che si avvicinano indefinitamente a quelle periodiche per valori infinitamente grandi, positivi o negativi del tempo.

Gli studi sulle soluzioni periodiche, oltre ad essere di notevole interesse teorico, hanno ancora importanti applicazioni pratiche. È facile comprendere che nei casi reali è poco probabile avere delle condizioni iniziali del moto tali da corrispondere a soluzioni periodiche; nondimeno prendendo una di esse come punto di partenza si può giungere a studiarne altre poco diverse dalle periodiche impiegando procedimenti di approssimazioni successive.

È ben noto che una bella applicazione di questo metodo alla teoria della luna, era stata già fatta in modo originale da Hill.

La questione della divergenza delle serie della meccanica celeste ha grande importanza e si presentò subito come una delle questioni più interessanti delle matematiche. È possibile impiegare serie divergenti e per mezzo di esse giungere alla soluzione approssimata di problemi pratici? L'esempio della serie di Stirling fa rispondere affermativamente a questa domanda. Serie analoghe si presentarono in meccanica celeste, ed il Poincaré dimostrò che esse possono fornire soluzioni sufficientemente approssimate per i bisogni pratici.

Il celebre teorema sulla non ulteriore esistenza di integrali uniformi, il quale stabilisce che il problema dei tre corpi non ha integrali uniformi, oltre quelli già da lungo tempo conosciuti, è uno dei risultati della teoria del Poincaré che ha maggiormente interessato i cultori della meccanica celeste.

Gl'invarianti integrali ebbero parte notevole nell'insieme di ricerche di cui parliamo. Essi sono espressioni (calcolate eseguendo quadrature sulle variabili delle equazioni differenziali) le quali restano costanti. Tali invarianti sono strettamente collegati al problema fondamentale della stabilità.

Ma non sarebbe possibile ricordare tutte queste teorie e tanto meno esporle in maniera succinta, nè ci sono qui consentiti troppi lunghi sviluppi. Come noi abbiamo fatto per le memorie di analisi e per quelle di fisica matematica, così anche in meccanica cercheremo di approfondire una ricerca speciale del Poincaré atta a svelarci la potenza del suo genio e la sua mirabile originalità.

Quella che sceglieremo si collega da un lato alla idrodinamica, dall'altro alle questioni classiche di meccanica celeste e, come mostrò Sir Giorgio H. Darwin, alle più moderne ed interessanti teorie cosmogoniche.

Si tratta del problema dell'equilibrio d'una massa fluida rotante[64], questione che si è presentata fin dall'epoca stessa nella quale venne creata la teoria della gravitazione universale.

Mac Laurin riconobbe per primo che l'ellissoide di rivoluzione è una forma di equilibrio e questo teorema è forse il più bel risultato apportato alla scienza da questo grande matematico.

Jacobi, con geniale intuizione, dubitò della necessità che la figura di equilibrio d'una massa fluida rotante dovesse essere simmetrica rispetto all'asse di rivoluzione, il che prima di lui era ritenuto come cosa evidente ed ottenne la soluzione del problema di equilibrio mediante ellissoidi a tre assi diseguali.

Ma i risultati di Mac Laurin e di Jacobi sono soluzioni particolari del problema generale, il quale ne ha infinite altre. Inoltre è da osservare che le dette soluzioni si ottengono solo con una verifica a posteriori, mostrando cioè, che allorquando certe condizioni sono soddisfatte, gli ellissoidi verificano le leggi dell'equilibrio.

Prima di giungere alle ricerche del Poincaré, ricordiamo che Thomson e Tait avevano dimostrato nel loro trattato di filosofia naturale[65] che oltre gli ellissoidi esistono delle forme anulari di equilibrio ed avevano

---

[64] Sur l'èquilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation par H. POINCARÉ, *Acta Mathematica*, T. VII, Stokholm, 1885.

studiato la stabilità della massa fluida sia imponendo certi vincoli (come quello di aver forma simmetrica di rivoluzione, o di aver forma ellissoidale) sia sopprimendo qualsiasi vincolo.

L'idea feconda escogitata dal Poincaré fu quella degli *equilibri di biforcazione*. Consideriamo un sistema il cui stato dipenda da un parametro, per esempio una massa fluida animata da un moto di rotazione; in tal caso il parametro sarà la velocità angolare. Supponiamo che ad uno stesso valore di esso corrispondano diversi stati di equilibrio del sistema. Mutando questo valore cambiano pure le configurazioni o le figure di equilibrio e, può avvenire che avvicinandosi ad un certo limite, due di esse vengano a confondersi l'una nell'altra, ossia costituiscano una *forma unita*. Oltrepassando il valore limite possono presentarsi due casi. Le figure di equilibrio spariscono e ciò si esprime con linguaggio algebrico dicendo che divengono imaginarie: questo è il primo caso ed allora la forma unita si chiama una forma limite. Ma può accadere che, oltrepassando il valore limite, le due figure ricompariscano. Questo è il secondo caso ed allora si dice che la forma unita è una *forma di biforcazione*. Supponiamo che si possa rappresentare ogni singola figura di equilibrio con un punto d'un piano le cui coordinate sono il valore del parametro ed una variabile che individua la figura. Se facciamo variare il parametro si otterrà una curva, la quale, nel secondo

[65] *Treatise on natural philosophy* by SIR WILLIAM THOMSON and P. G. TAIT, Vol. I, Part. II, Cambridge, 1883.

caso, sarà costituita da due rami intersecantisi nel punto di biforcazione. Ora Poincaré ha scoperto un teorema di straordinaria importanza relativo alla stabilità delle figure corrispondenti ai vari punti dei due rami.

Supponiamo che il parametro si annulli nel punto di intersezione; se per i valori negativi di quello vi è stabilità sul primo ramo e instabilità sul secondo, il contrario avverrà per i valori positivi cioè vi sarà instabilità sul primo ramo e stabilità sull'altro.

Ciò si enuncia dicendo che vi è scambio di stabilità fra i due rami al loro incrocio, e questa proposizione fu chiamata dal Poincaré il teorema dello *scambio di stabilità*.

Applichiamo ora questi risultati al problema della rotazione dei fluidi omogenei. Tanto nella soluzione di Mac Laurin che in quella di Jacobi l'asse di rotazione è sempre l'asse minore dell'ellissoide e perciò i suoi rapporti con gli altri assi sono minori dell'unità, e sono uguali fra loro nel caso di Mac Laurin, diversi in quello di Jacobi. Se noi prendiamo questi rapporti come coordinate d'un punto del piano, ogni ellissoide sarà individuato da un punto indice ed il loro insieme da una linea. La bisettrice *OA* degli assi (vedi fig. 1) rappresenterà gli ellissoidi di Mac Laurin ed il punto *A* situato all'unità di distanza dagli assi corrisponderà alla forma sferica e quindi ad una velocità angolare nulla. Gli ellissoidi di Jacobi saranno rappresentati da una linea *BCD*.

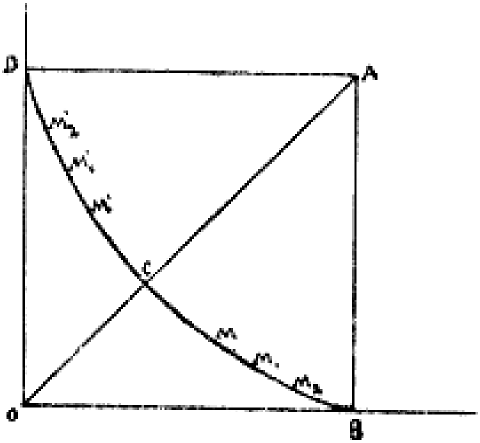

Fig. 1.

Ma Poincaré ha trovato nuove figure di equilibrio deformando questi ellissoidi e ne ha calcolato esattamente la forma che, nel caso più semplice, è quella d'una pera (vedi fig. 2) mediante le funzioni di Lamé. Si dimostra che vi sono infiniti ellissoidi di Mac Laurin corrispondenti ai punti della retta *CO* per i quali esiste una figura di Poincaré infinitamente vicina che è

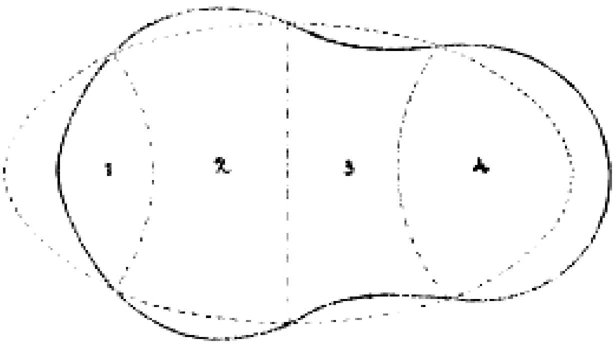

Fig. 2.

pure figura di equilibrio. Vi sono inoltre un'infinità di punti M, M_1, M_2,.... M, M'_1, M'_2.... della curva per i quali esiste una figura di Poincaré vicina che è pure figura di equilibrio.

Esaminiamo ora la stabilità. Gli ellissoidi di Mac Laurin sono stabili nel tratto AC instabili in quello CO. Gli ellissoidi di Jacobi sono stabili a partire da C fino al primo punto M o M' per il quale si incontra per la prima volta una figura di Poincaré, instabili dopo aver oltrepassati i punti M e M'.

Ciò posto passiamo ad una applicazione di questa teoria. Cito le parole stesse di Poincaré[66]:

«Consideriamo una massa fluida omogenea animata inizialmente da un moto di rotazione e che lentamente si raffreddi. Se il raffreddamento è molto lento l'attrito interno determina la rivoluzione dell'insieme con la stessa velocità angolare in tutte le sue parti, mentre il momento di rotazione rimane costante.

» Al principio la densità essendo debolissima, la figura della massa è un ellissoide di rivoluzione poco diverso da una sfera. Il raffreddamento avrà dapprima per effetto di aumentare lo schiacciamento dell'ellissoide, il quale nondimeno si conserverà di rivoluzione.

» Il punto indice descriverà il segmento AC che corrisponde agli ellissoidi di Mac Laurin fino in C, punto nel quale essi cessano di essere stabili (fig. 1).

[66] *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* par H. POINCARÉ, già citate, pag. 188.

» L'indice non potendo prendere il cammino *CO* prenderà allora, per esempio, la direzione *CM*, l'ellissoide diverrà a tre assi ineguali e ciò fino in *M*, punto nel quale gli elissoidi di Jacobi cessano di essere stabili. A partire da questo momento la massa non può più conservare la forma ellissoidica poichè essa è diventata instabile; prenderà dunque la sola forma possibile, quella della superficie vicina all'ellissoide la quale ha una figura piriforme, presentando una specie di strozzamento nella regione segnata 3 (fig. 2), mentre le regioni 2 e 4 tendono a gonfiarsi a spese delle regioni 1 e 3, come se la massa tendesse a dividersi in due parti ineguali.

» È difficile prevedere ciò che avverrà poi. Si può pensare che si formerà un solco sempre più profondo nella regione 3 e la massa finirà per spezzarsi in due corpi distinti».

I risultati che abbiamo ora presentati sono di massima eleganza e di immenso interesse. Sir Giorgio H. Darwin ha pensato che il processo che abbiamo seguito possa aver avuto parte importante nell'evoluzione del sistema cosmico e questa teoria sembra confermarsi in seguito alle osservazioni di molte nebulose. Anche certi satelliti potrebbero esser stati formati in questo modo a spese del loro pianeta. È anzi probabile che ciò sia avvenuto nel caso del sistema terra-luna date le grandezze relative delle due masse.

Termineremo l'analisi dei lavori del Poincaré con questi grandiosi concetti che accoppiano le teorie più sottili ed ingegnose della meccanica alle più ardite ipotesi della cosmogonia.

*

* *

Non ho potuto dare in questo scritto se non una pallida idea del grande lavoro compiuto dal Poincaré, dei problemi ch'egli ha trattati, dell'immenso campo della scienza ch'egli ha scoperto ed esplorato e che le future generazioni dei matematici coltiveranno.

È destino dei sublimi ingegni, i quali hanno dato la chiave di tanti oscuri problemi ed hanno appagato tanta curiosità scientifica, di accrescere la curiosità stessa ed il desiderio di sapere, coll'aprire nuovi orizzonti alla scienza e coll'allontanare la mèta delle aspirazioni scientifiche.

L'EVOLUZIONE
DELLE IDEE FONDAMENTALI
DEL CALCOLO INFINITESIMALE

Questa lettura fu fatta alla Sorbona (e ripetuta alla École Polytechnique) come conferenza preliminare alle lezioni: Sopra le funzioni di linee, tenute dall'Autore nel 1912 alla Sorbona; venne pubblicata nella *Revue du Mois* del 10 marzo 1912 e posta come introduzione alle Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.

Mi propongo di esporre in queste pagine alcuni nuovi concetti matematici che si sono principalmente sviluppati in questi ultimi anni ed i metodi analitici che vi si riferiscono. In modo particolare desidero stabilire la derivazione di tali concetti e metodi dalle idee svoltesi nel campo delle matematiche dalle epoche più remote e la loro correlazione con questioni moderne della filosofia naturale. Emergerà così la loro vera situazione nella storia generale delle scienze matematiche e qualche dato, che permetterà di giudicare del loro avvenire.

Comincerò dal notare l'esistenza di un sentimento, che tutti gli analisti provano, pur senza rendersene sempre conto. In uno dei suoi ultimi scritti Enrico Poincaré, studiando la questione dei *quanta*, dopo aver mostrato come non sia possibile far a meno dell'ipotesi che l'energia varii con discontinuità, dice: «Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles?»[67]

Queste parole che racchiudono indubbiamente un senso di rammarico, manifestano lo stato d'animo di ogni matematico, indotto a ritenere che uno strumento ammirabile quale il calcolo infinitesimale, debba essere abbandonato nello studio di qualche fenomeno. Infatti,

[67] *Comptes rendus*, t. 153, p. 1103.

dalle età più remote fino ai nostri giorni, l'idea del continuo ha dominato le speculazioni matematiche e tutte le loro applicazioni più interessanti e feconde. Quando le condizioni dei problemi l'hanno permesso, si è sempre cercato di ricondurre (talvolta anche intuitivamente ed incoscientemente), i casi di discontinuità a casi di continuità, con procedimenti, che si potrebbero chiamare di natura statistica; anzi, nella pratica dei calcoli, a volte si è stati indotti, dalla potenza dei metodi infinitesimali, a prescindere dalle concezioni ed ipotesi più probabili, riferentisi alla natura stessa dell'argomento, pur di potervi applicare i procedimenti infinitesimali. D'altra parte si è riconosciuto che, volendo rendere rigorose le considerazioni relative a questi metodi, bisognava esaminare prima casi di discontinuità e arrivare dopo al continuo, mediante passaggi al limite, per modo che l'origine delle più importanti proprietà del calcolo infinitesimale, è stata l'estensione al calcolo stesso di proprietà conosciute dell'algebra finita e dell'aritmetica. Si è dunque avuta un'azione reciproca; i casi di discontinuità sono stati studiati con metodi infinitesimali e, nello stesso tempo, ogni questione infinitesimale è stata considerata come caso limite di questioni riguardanti il discontinuo. Non occorre moltiplicare gli esempi, per provare ciò che ho detto: se ne trovano le prove più eloquenti nella fisica-matematica, a cui la dottrina sulla costituzione molecolare dei corpi non ha impedito l'uso del calcolo infinitesimale. Infatti il Fourier, nella teoria del calore, come il Cauchy ed il Poisson nella elasticità, e tutti i matematici classici partirono dall'ipotesi della discontinuità della materia, ma risolsero i problemi che si erano posti, con l'aiuto delle equazioni differenziali e dei loro integrali; e, anche nelle più recenti applicazioni all'economia politica e alla statistica, si è seguito lo stesso cammino.

*

* *

L'uso di quantità infinitamente piccole risale certo alle prime ricerche sistematiche di geometria[68]. Eudosso di Cnido, che visse nel quarto secolo avanti Cristo, conobbe i metodi infinitesimali e li applicò al teorema sulla eguaglianza delle piramidi che hanno la stessa altezza e basi eguali. Non è infatti possibile[69] dimostrare questa proposizione mediante la decomposizione dell'intero volume in un numero finito di parti, vale a dire in modo simile a quello che si tiene per le aree. Eudosso, e forse anche altri prima di lui, comprese che bisognava ricorrere alla decomposizione del volume in un numero infinito di strati infinitamente sottili: ed è questo il primo esempio che si conosca, di metodi infinitesimali. Euclide l'espone nella settima proposizione del dodicesimo libro, ma fa uso del metodo di esaustione; egli riduce il caso del continuo al caso limite d'una somma di un numero finito di termini. Si vede così apparire il primo germe dei metodi moderni

---

[68] Ringrazio il prof. Vacca, dell'Università di Roma, delle notizie storiche che mi ha favorito.

[69] DEHN, *Ueber den Rauminhalt* (Math. Ann., t. LV, p. 465).

del calcolo integrale e del principio di Dedekind, che è stato solo parecchi secoli dopo formulato in modo completo ed astratto.

Ma l'applicazione sistematica dei metodi infinitesimali, si trova per la prima volta in Archimede, di cui abbiamo potuto penetrare l'intimo pensiero, grazie alla celebre scoperta del Heiberg[70]. Dalla lettera di Archimede ad Eratostene si rileva come egli facesse uso per le sue scoperte del metodo delle quantità infinitamente piccole, e, solo per esporre i risultati al pubblico, ricorresse al metodo dell'esaustione e a quello delle serie. Basta ricordare le differenti soluzioni ch'egli ha date, allo scopo di trovare l'area della parabola, per riconoscere i principî fondamentali, mediante i quali il calcolo infinitesimale si è sviluppato da quell'epoca remota fino ai nostri giorni. La più elegante e la più suggestiva delle soluzioni è quella che si ottiene, mostrando che un segmento di parabola ed un triangolo rettangolo isoscele (avente la stessa base del segmento e un'altezza doppia) posti l'uno accanto all'altro sul braccio di una leva il cui punto d'appoggio sia nel mezzo, sono in equilibrio, poichè ogni coppia simmetrica di ordinate della parabola ha lo stesso momento della coppia corrispondente del triangolo[71].

---

[70] Vedere l'interessante pubblicazione del Painlevé e del Reinach: *Un traité de Géométrie inédit d'Archimède*, (Revue générale des Sciences, t. XVIII, 1907). – *Archimedis, Opera Omnia*. Ed. Heiberg, Vol. II, p. 427. Lipsiae, 1913.

[71] Basta guardare la figura 3, in cui sono segnate punteggiate le ordinate aventi lo stesso momento rispetto al punto d'appoggio *O*

Non ricorderemo qui i differenti risultati ai quali Archimede è stato condotto dall'applicazione dei suoi metodi; basta infatti classificarli, come ora abbiamo fatto, in tre gruppi; quello degli infinitesimi, quello di esaustione ed infine quello delle serie, per veder delinearsi tutte le concezioni fondamentali del calcolo infinitesimale.

Gli ultimi metodi si riallacciano evidentemente alla teoria dei limiti, che si ritrova poi negli stadi successivi del calcolo infinitesimale.

*

* *

Ma Archimede era troppo profondo per essere facilmente compreso: egli gettò sul terreno un seme, che ha impiegato dei secoli per germogliare. I continuatori ed i commentatori di Archimede non penetrarono in tutte le sue concezioni, e gli Arabi trovarono più comodo di sviluppare la teoria delle coniche, che non presentava difficoltà così grandi.

Solo durante il Rinascimento si cominciò a comprendere la vera grandezza di Archimede, e

---

della leva *AB*, per comprendere la dimostrazione.

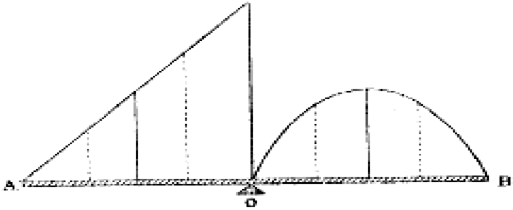

Fig. 3.

Tartaglia[72] riprodusse in parte le opere del grande geometra, senza forse riuscire ad appropriarsi i suoi metodi infinitesimali. Una conoscenza più profonda di questi si trova, invece, in Maurolico[73] e Commandino[74], che, oltre riprodurre le dimostrazioni di Archimede, ritrovarono anche quei risultati sul centro di gravità, da lui scoperti, e che erano andati perduti. Ma i veri continuatori ed i primi allievi di Archimede, quelli cioè che ne ereditarono lo spirito, furono Galileo e Keplero.

Per studiare con successo i problemi della dinamica, bisogna impiegare metodi infinitesimali, ed infatti la questione più semplice, quella della caduta dei gravi, è stata risoluta dal Galilei decomponendo il tempo della caduta in piccoli intervalli e considerando il movimento in ogni intervallo, come uniforme[75].

Questo passaggio dei procedimenti infinitesimali della geometria alla meccanica segna una data memorabile e mostra tutta la portata dei metodi stessi. Fra i nomi più

---

[72] TARTAGLIA, *La terza parte del general trattato dei numeri et misure*. Lib. III, Venetia 1560. - Opera Archimedis Syracusani. Venetiis 1543.

[73] MAUROLICO, *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica, quae extant, etc*., p. 177, Panormi 1685 (questa opera è stata scritta nel 1548 ed è stata pubblicata solo dopo la morte dell'autore).

[74] COMMANDINO, *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae, 1565 (foglio 42, r.).

[75] GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida 1638, p. 171 e seg. (Edizione nazionale, vol. VIII, Firenze, 1898).

specialmente legati ai progressi del calcolo infinitesimale, ricorderò quelli di Keplero, Cavalieri, Descartes, Fermat, Torricelli, Wallis.

Keplero ha spinto le quadrature più innanzi di quanto facesse Archimede ed è riuscito a calcolare volumi di solidi di rivoluzione e ad integrare funzioni trigonometriche[76]; Cavalieri, nella sua Geometria degli indivisibili[77], ha reso sistematici i procedimenti infinitesimali ed ha dato la chiave per fare le quadrature più semplici; Descartes, Fermat e Torricelli considerarono poi nuovi casi; Pascal e Fermat ritornarono al metodo di esaustione, che era stato abbandonato, e dettero così rigore e nuovo sviluppo a tutto un vasto insieme di ricerche.

Anche Wallis, pur essendo meno rigoroso del suo contemporaneo Pascal e pur non essendo riuscito al celebre concorso sulla *roulette*, portò un nuovo contributo al calcolo infinitesimale, sia studiando gli integrali, che ora chiamiamo *integrali euleriani*, sia studiando i prodotti infiniti e le serie[78].

*

* *

[76] KEPLERO. *Nova stereometria doliorum Vinariorum*, Lincii 1615 (Opera omnia, vol. IV). - *De motibus stellae Martis*, Pragae 1609 (Opera omnia, vol. III, p. 390).

[77] CAVALIERI, *Geometria Indivisibilibus continuorum*, Bononiae, 1635; *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae, 1647.

[78] WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, Oxonii, 1655.

Vediamo dunque che, dopo un periodo di diciassette secoli, durante il quale erano restate nascoste e come sopite, le idee feconde del calcolo infinitesimale si svegliano e risorgono d'un tratto, prendendo con slancio improvviso, un grande sviluppo; in circa due secoli esse sorpassano notevolmente i loro limiti primitivi e, quel che è più importante, escono dalla Geometria e creano, mediante la loro penetrazione nella Filosofia naturale, la Scienza moderna.

Si deve ad Huygens la continuazione dell'opera del Galilei, mediante lo studio infinitesimale dei problemi della Dinamica: così le questioni della *catenaria*, della *tautocrona* e lo studio delle leggi fondamentali della Meccanica, costituiscono progressi sempre più cospicui nell'uso dei metodi infinitesimali.

Nello stesso tempo, va sviluppandosi anche l'Analisi pura con l'introduzione dei logaritmi, fatta da Neper, con l'integrazione per serie che conduce Mercator alla serie logaritmica, e con la scoperta dei processi d'integrazione per parti e per sostituzione, fatta da Barrow, movendo da considerazioni geometriche.

Fin qui noi abbiamo seguito lo sviluppo del *calcolo integrale*; il *calcolo differenziale*, invece, parte dal problema delle tangenti che gli antichi avevano già studiato per le spirali e le coniche. Si deve a Descartes l'aver concepito la tangente come limite di una secante[79], a Torricelli e Roberval l'aver ottenuto le tangenti dalla

[79] DESCARTES, *La Géométrie*. 1637, trad. latina di Schooten, Amstelædami, 1659, p. 43.

composizione di movimenti, a Fermat l'aver considerato quello che noi chiamiamo *rapporto incrementale*[80].

Ai tempi di Barrow già si aveva un metodo generale, e tutto era maturo, perchè le operazioni di differenziazione e d'integrazione, considerate come operazioni inverse l'una dell'altra, divenissero le basi di una nuova scienza, che permettesse di risolvere sistematicamente i problemi della Geometria e della Meccanica.

In tal modo sorse il calcolo differenziale ed integrale, che Newton eresse a sistema, integrando le equazioni differenziali, per approfondire i problemi che si presentavano nelle applicazioni della sua legge[81] alla Meccanica celeste. Leibniz dette al nuovo calcolo le notazioni che ancora adoperiamo[82].

Come abbiamo visto, il concetto fondamentale del calcolo infinitesimale è il continuo considerato in se stesso, o riguardato come un limite, e le operazioni fondamentali sono l'integrazione, a cui si arriva trasportando il concetto di somma dal finito all'infinito, e la derivazione, che è l'operazione inversa dell'integrazione.

*

* *

---

[80] Fermat, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, (Oeuvres de Fermat, t. I, p. 133 e t. III, p. 121, Paris, 1891-96).

[81] Isaaci Newton, *Epistola prior*, 13 junii 1676, *Epistola posterior*, 24 octob. 1676 (Opuscula, Lausannae et Genevae, 1744. t. I).

[82] Leibniz, *Nova methodus, etc*. Acta eruditorum, Lipsiae, 1684.

Arrivati a questo punto, possiamo domandarci: le operazioni di cui abbiamo parlato, sono le sole in cui è eseguibile il passaggio suddetto? Si comprende facilmente che la estensione dal finito all'infinito può farsi, non solamente per la somma, ma anche per altre operazioni, sia per mezzo del procedimento detto delle serie, sia con un processo simile a quello del calcolo integrale, in cui si considera cioè, (a quel modo che faceva Galileo per studiare la caduta dei gravi) la variazione di una quantità, come l'insieme delle successive variazioni infinitamente piccole, che si ottengono dividendo la variazione totale in intervalli parziali.

Così, per trovare l'integrale di una equazione differenziale ordinaria, in un certo campo, si possono eseguire prima delle operazioni algebriche in intervalli parziali, e poi passare al limite, facendo diminuire indefinitamente la grandezza degli intervalli ed aumentandone indefinitamente il numero. Tale è il metodo di Cauchy, che ordinariamente si segue per dimostrare l'esistenza degli integrali, parallelamente ai metodi delle serie ed al metodo di Picard delle approssimazioni successive[83].

Il principio su cui è basato il metodo di Cauchy, si presta in infiniti modi a ricondurre problemi complicati

[83] CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathémalique*, Paris, t. I, 1840, p. 327. – LIPSCHITZ, *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, (Annali di Matematica, II serie, t. II, 1868-1869, p. 288). – VOLTERRA, *Sui principii del calcolo integrale* (Giornale di Matematiche, vol. XIX, 1881).

a problemi più semplici e già risoluti. Per dare un esempio, consideriamo il problema dei tre corpi; e, per semplicità, supponiamo che la massa del terzo corpo *C*, sia trascurabile rispetto a quelle degli altri due corpi *A* e *B*, per modo che il movimento di questi ultimi segua le leggi di Keplero; ci resterà allora da determinare soltanto il movimento del terzo corpo *C*. Ora, in un intervallo di tempo piccolissimo, si può trascurare lo spostamento dei corpi *A* e *B* e, per conseguenza, ritenere il moto di *C* come quello di un corpo attratto da due centri fissi: tale movimento è noto, poichè Legendre ne ha esposta e discussa la soluzione in tutti i suoi particolari. Decomponendo quindi un dato intervallo di tempo in intervalli parziali piccolissimi, potremo decomporre il movimento di *C*, approssimativamente, in successivi movimenti noti; al limite, facendo diminuire indefinitamente questi intervalli, si avrà il movimento di *C* in tutto l'intervallo dato.

In prima approssimazione, si potrà anche supporre costante la forza agente su *C*, durante ogni intervallo parziale di tempo, in ciascune dei quali *C* descriverà un arco di parabola; quindi si potrà considerare il moto di *C* come una successione infinita di movimenti parabolici infinitamente piccoli. Potremo infine supporre che il movimento di *C* sia uniforme in ogni intervallo parziale di tempo: calcolando di istante in istante la variazione della velocità, si otterrà il movimento come una successione di un numero infinito di movimenti uniformi.

*
* *

Ritorniamo al passaggio dal finito all'infinito, nella sua applicazione più generale alle operazioni. Abbiamo già fatto parola, accennando all'opera di Wallis, dei prodotti infiniti, che si ottengono estendendo il concetto di serie dal caso della somma a quello del prodotto. Nello stesso modo, possiamo trasportare l'idea di integrazione, di cui abbiamo parlato, dal campo della somma a quello del prodotto, ottenendo così l'integrazione logaritmica.

Ma è possibile portare la nostra attenzione su tipi ancor più generali di operazioni, che comprendano la somma e la moltiplicazione; basterà considerare ad esempio la deformazione di una figura piana. I tipi più semplici di tali deformazioni consistono in una dilatazione, o in una contrazione, ottenute moltiplicando le dimensioni della figura, per un certo parametro. La risultante di più deformazioni di questo genere si avrà facendo il prodotto dei parametri che definiscono ogni singola deformazione.

Consideriamo ora la trasformazione lineare più generale di una figura piana. Essa potrà ottenersi, dal punto di vista analitico, mediante una sostituzione lineare sulle coordinate. Eseguendo successivamente più trasformazioni lineari della figura, ossia più sostituzioni lineari sulle coordinate, verremo a fare ciò che comunemente si chiama un *prodotto di sostituzioni*. L'ordinaria moltiplicazione, e anche la somma ordinaria rientrano come casi particolari nella moltiplicazione delle sostituzioni.

Moltiplichiamo fra loro infinite sostituzioni lineari di cui ognuna corrisponda ad una trasformazione geometrica infinitamente piccola. Ciò corrisponderà ad un passaggio dal finito all'infinito, analogo a quello che conduce dalla somma di un numero finito di termini ad una integrazione. È evidente anzi, che la ordinaria operazione di integrazione non è che un caso particolare di quella che abbiamo per ultimo definita.

Ora, questa successione infinita di trasformazioni infinitesime corrisponde ad una trasformazione finita, e l'operazione sopra indicata che ad essa conduce, può chiamarsi l'*integrazione delle sostituzioni lineari*. L'inversa di questa operazione, si potrà denominare la *derivazione delle sostituzioni*; si avrà così un calcolo integrale e differenziale delle sostituzioni, simile in tutto al calcolo integrale e differenziale ordinario.

Questo calcolo corrisponde a quello che in Analisi si chiama l'*integrazione delle equazioni differenziali lineari*, tutta la teoria delle quali può esporsi da questo nuovo punto di vista, coordinando fra loro molti resultati, di cui non apparivano gl'intimi legami. In tal modo, dai teoremi dei residui di Cauchy si passa ai teoremi di Fuchs, e la teoria algebrica dei divisori elementari, e la geometria delle omografie, si riannodano alla teoria delle equazioni differenziali lineari, mediante un legame analitico, che conduce a nuove proposizioni[84].

*

* *

Le dottrine relative al passaggio dal finito all'infinito, dal discontinuo al continuo, ricevono nuovo impulso e sono suscettibili di maggiore estensione, quando il concetto fondamentale che le ispira si trasporti nel campo della teoria delle funzioni.

Prima di accennare a questo argomento, che è il più delicato che io debba trattare, dirò qualche parola sull'idea generale di funzione. Questa idea e quella di legge fisica son nate nel medesimo tempo; d'altro lato, la teoria della dipendenza analitica fra le qualità variabili è derivata naturalmente dal progresso dell'Algebra. Nondimeno tale teoria non si sarebbe potuta costituire in modo completo, nè il concetto di funzione si sarebbe potuto ampiamente sviluppare, senza il sussidio di una rappresentazione di valore concreto e di efficacia intuiti-

[84] Questa teoria è sviluppata nelle seguenti memorie: VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali lineari* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 15 maggio 1887): *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. II, 1888); *Sui fondamenti della Teoria delle equazioni differenziali lineari* (Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL. I^a^ Parte, 3^a^ serie, vol. VI, 1887; 2^a^ Parte, 3^a^ serie, vol. XII, 1899).

Cfr. SCHLESINGER, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig, 1908.

va, quale ci viene offerta dalla Geometria analitica. E infatti solo quando lo studio di una curva è stato ricondotto da Descartes allo studio della variazione simultanea delle sue coordinate, la teoria delle funzioni si è costituita come elemento necessario per lo sviluppo della scienza.

Ora, come spesso accade, i concetti fondamentali esistevano di già, direi quasi nascosti, e molti casi particolari erano stati studiati completamente, prima che Leibniz[85] pronunciasse la parola *funzione* e prima che alcuno pensasse a considerare, in modo sistematico e generale, la dipendenza fra le quantità che variano simultaneamente, e tanto meno a creare dall'insieme di nozioni, che scaturivano oramai da ogni lato, una speciale dottrina. Il momento in cui tutti questi concetti si riunirono e coordinarono fra loro dando origine ad un nuovo ramo delle Matematiche segna una data memorabile nella storia della Scienza.

Come ho detto, diversi elementi concorsero a creare la teoria delle funzioni. Essi non si sono mai completamente fusi, tanto che, anche nei trattati moderni, è facile riconoscere le suture fra tali materiali eterogenei. Così, per esempio, nonostante i rapporti che si possono continuamente stabilire fra esse, la teoria delle funzioni analitiche, quella delle funzioni nel senso di Dirichlet, e la teoria geometrica delle funzioni, vengono sviluppate, in generale, con metodi differenti.

---

[85] LEIBNITZ, *Werke*, (Ed. Gerhardt, Math. Schrift., vol. V, p, 307).

Dapprima prevalse l'indirizzo geometrico, perciò non fu necessaria neppure una parola speciale, per designare la funzione; bastavano il linguaggio fornito dalla geometria, il concetto più o meno vago di curva, e la conoscenza delle sue proprietà.

Lagrange[86] si pose invece da un punto di vista opposto: egli volle, con uno sforzo ardito, mediante la teoria delle funzioni analitiche, riallacciare il calcolo integrale e differenziale all'algebra, rendendolo indipendente dalla considerazione di quantità infinitamente piccole e dai metodi di passaggio al limite, da cui il calcolo differenziale, come abbiamo visto, era nato. Bisogna quindi, se non si vuol risalire alla scoperta primitiva della serie di potenze di Taylor, concepire le funzioni analitiche, partendo dai concetti di Lagrange.

Come nei varii rami del calcolo differenziale ed integrale, così anche nella teoria delle funzioni, i bisogni e le richieste della fisica e delle scienze naturali hanno contribuito ad orientare le ricerche, ad approfondire ed estendere nuovi concetti destinati a concretarsi e fissarsi in forma matematica.

La storia della rappresentazione delle funzioni arbitrarie è molto conosciuta: esse sono state introdotte non appena si son cominciati a studiare problemi di Fisica matematica, in cui bisognasse integrare delle equazioni alle derivate parziali. I principî fondamentali sono stati

[86] LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris. 1797.

stabiliti da D'Alembert, Eulero, Bernoulli ed infine da Fourier, ma la teoria è tuttora in via di svolgimento.

Nelle applicazioni fisiche sarebbe stato impossibile limitarsi a considerare funzioni di una sola variabile, e già Newton vide l'interesse che poteva avere l'introduzione delle funzioni di più variabili. Le forze e gli elementi, che definiscono le proprietà di un campo fisico, dipendono dalla posizione e, spesso, anche dal tempo; di qui la necessità di considerare funzioni di tre o quattro variabili. Inoltre, se un fenomeno deve riguardarsi come la conseguenza di più cause, i parametri che lo definiscono, saranno funzioni dei parametri che individuano le varie cause. Anche la Geometria, per esempio la Geometria analitica solida, la Geometria dei complessi di curve, e l'Algebra, quando si applichino le sue operazioni a più quantità, conducono spontaneamente alle funzioni di più variabili. La teoria di tali funzioni si è svolta parallelamente a quella delle funzioni di una sola variabile, sia dal punto di vista analitico, sia sotto altri rapporti.

*

* *

A questo punto sorse un'idea ben naturale, che altro non è se non l'estensione dei concetti fondamentali del calcolo integrale al campo della teoria delle funzioni, vale a dire un passaggio dal discontinuo al continuo, del tutto simile a quello con cui si passa dalla somma all'integrale e col quale si arriva alle operazioni più generali di integrazione, di cui abbiamo parlato[87].

È possibile nella Filosofia naturale limitarsi alle funzioni di un numero finito di variabili? Evidentemente, quando si studia un fenomeno come conseguenza di un numero finito di cause, si fa una astrazione, poichè si vengono a trascurare degli elementi, che si considerano come piccolissimi, di fronte ad altri preponderanti. In tal modo l'esame del fenomeno è soltanto approssimato, onde si intravedono facilmente casi nei quali, per approfondire convenientemente la questione, sarà necessario tener conto di un numero infinito di variabili. Un esempio si presenta subito, esaminando un campo fisico: se supponiamo che varino la posizione ed il tempo, siamo condotti a considerare funzioni di quattro variabili, ma se supponiamo che vari anche il campo riguardato come qualche cosa di continuo, i mutamenti dei fenomeni dipenderanno da una infinità di variabili. Inoltre, se in un dato fenomeno si conserva memoria del passato, il presente viene a dipendere da tutta la storia, e quindi, poichè il tempo è continuo, da un'infinità di elementi o di variabili, che individuano i fatti passati[88].

---

[87] Ho introdotto questa idea nel 1887. I primi lavori su tale soggetto sono le mie tre note: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. (Rend. R. Acc. dei Lincei. 2° semestre 1887).

[88] Vedere: VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità* (Rend. Acc. dei Lincei, 2° semestre 1909).

Non si può asserire che una tale eredità sia stata concepita da Leibniz, il quale tuttavia espone nella sua *Monadologia* considerazioni che possono riferirvisi[89]. Egli usa espressioni talmente vaghe, che è ben difficile afferrare in esse il suo pensiero, che abbraccia così il tempo, come lo spazio. Il traduttore tedesco non riesce a riprodurne l'idea, che con una parola: *Nachwirkung*, di cui i fisici moderni hanno fatto largo uso. Il Picard ha detto su questo argomento parole profonde, distinguendo la Meccanica in due parti ch'egli chiama: la *Meccanica ereditaria* e la *Meccanica non ereditaria*[90]. Per chiarire questa distinzione, basta ricordare i ben noti fenomeni della elasticità studiati da Boltzmann[91], nei quali si rivela appunto una specie di eredità lasciata nella forma del corpo da tutte le azioni che lo hanno sollecitato. È evidente che in tal caso la deformazione attuale dipende da una infinità di elementi, caratterizzati dalle forze, (variabili in generale ad ogni istante), che hanno agito sul corpo.

Queste considerazioni si riallacciano a questioni elementari di Geometria, di cui con molto interesse si occuparono i Greci: per esempio, all'antico problema di

---

[89] LEIBNIZ, *La Monadologie* (61) Oeuvres philosophiques de Leibniz, Paris, 1900 p. 716.

[90] *La mécanique classique et ses approximations successives* (Riv. di Scienza, vol. I. 1907).

[91] BOLTZMANN, *Zur theorie des elastischen Nachwirkung* (Wien Berichte. 1874; Pogg. Ann., Bd. 7, 1876. Vedere anche Wiss, Abh., I Bd., Leipzig, 1909, p. 616).

Zenodoro[92] di cercare fra le curve piane, di data lunghezza, quella che racchiude l'area più grande.

Se si studia, per esempio, il problema degli isoperimetri, si considera cioè un'area piana come dipendente dal contorno, abbiamo una quantità che varia con la forma di una curva, ossia ciò che ho chiamato una *funzione di linea* e che ho studiato in modo sistematico. Poichè una curva si può rappresentare con una ordinaria funzione, l'area può ritenersi come una quantità che dipende da tutti i valori di questa funzione. L'area stessa è quindi una funzione di infinite variabili, e difatti si può considerarla come il limite di una funzione di più variabili, supponendo che il numero di queste cresca indefinitamente, allo stesso modo che una curva si può considerare come limite di un poligono, di cui il numero dei lati aumenti all'infinito.

Ma le aree non sono che casi molto particolari. Si possono trovare molti altri esempi di funzioni di linee: basta immaginare una quantità che dipenda, in un modo arbitrariamente dato, dalla forma di una curva, o una quantità che dipenda da tutti i valori di una o più funzioni[93]; così l'azione di una corrente elettrica filiforme e flessibile su di un ago magnetico dipende dalla forma del circuito, e per conseguenza è una funzione di linea.

---

[92] P. TANNERY, *La Géométrie grecque*, Paris, 1887, p. 25.

[93] VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1887).

Considerando le funzioni di linee come tipo di tutte le funzioni ad infinite variabili, si hanno molti vantaggi, perchè il nome stesso richiama alla mente un'immagine concreta ed offre una rappresentazione intuitiva molto utile. Si capisce come si potrà passare poi allo studio di quantità dipendenti dalla forma di superficie, ed anche, (nel caso degli spazi a più dimensioni) di ipersuperficie.

Tutto ciò che abbiamo detto, mostra che, sia dalle questioni geometriche, sia dai problemi della fisica, si è condotti naturalmente a fare, nella teoria delle funzioni, quel passaggio dal finito all'infinito, che abbiamo già visto compiersi a poco a poco, in modo costante, durante parecchi secoli, fino alla costituzione del calcolo infinitesimale.

Ci possiamo qui domandare se non vi sia una via analitica pura, per arrivare alle stesse nuove concezioni. La teoria delle ordinarie funzioni comprende lo studio delle proprietà di ogni quantità, ottenuta mediante operazioni algebriche. Quindi, come ha notato Lagrange[94], l'Algebra non è che un ramo della teoria delle funzioni; infatti i risultati delle operazioni algebriche sono le funzioni più elementari, considerate dall'Analisi. Allo stesso modo, si può trovare in concetti analitici l'origine della teoria delle quantità, che dipendono da tutti i valori di una o più funzioni di forma variabile. Il cammino da seguire è già tracciato: basta sostituire alle operazioni dell'Algebra, fatte su un numero finito di variabili,

---

[94] LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, Paris, 1806. Leçon première.

operazioni analitiche su di un insieme continuo, ovvero su tutti i valori di una funzione.

Conosciamo di già operazioni di questo genere, per esempio l'integrazione delle sostituzioni o, in generale, delle equazioni differenziali. Ripetendo queste operazioni elementari e combinandole fra loro, si arriverà, evidentemente, a calcolare delle classi speciali di funzioni del nuovo tipo. Generalizzando la frase sopra riferita di Lagrange, diremo che tutte queste operazioni e le loro teorie sono comprese nella teoria delle funzioni generalizzate di cui si è detto sopra[95]. Si conservano dunque i tre tipi di concezione fondamentale; geometrica, analitica, e il tipo astratto e generale legato all'idea di legge fisica.

*

* *

Una volta in possesso di questi concetti fondamentali si presentava naturalmente il compito di coordinarli, di rendere sistematiche le ricerche, di studiare i problemi che si riannodano più o meno direttamente alle nuove idee[96]. È necessario compiere un tale lavoro, poichè la

---

[95] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913, cap. II.

[96] Ho principiato tali studii fino dall'anno 1883, ma solo nel 1887 ne ho iniziato la pubblicazione in maniera sistematica colla mia prima nota: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 2° semestre 1887), a cui fecero seguito gli altri lavori pubblicati negli stessi rendiconti fino al 1891 e quello degli Acta Mathematica nel 1889. Ho interrotto le pubblicazioni su questi argomenti dal 1891 al 1895

concezione da cui son nati i nuovi studi s'impone e perchè sarebbe impossibile trattare numerose questioni, senza entrare nell'ordine delle idee esposte. Non si possono ancora classificare i vari rami che oggi esistono e che si svilupperanno in questa categoria di studi, ma si possono indicare i principali indirizzi, a cui si è naturalmente e necessariamente condotti dalla corrente costante di idee e di metodi che abbiamo visto svolgersi.

Se una quantità dipende da una linea, possiamo studiare le sue variazioni, corrispondentemente alle modificazioni di essa; se queste modificazioni sono piccole e limitate all'intorno di un punto della curva, arriviamo alla nozione di derivata d'una funzione di linea; se sovrapponiamo più modificazioni nei singoli punti, giungiamo poi a quella di differenziale o variazione. Questa è espressa da un integrale; infatti una funzione di linea può considerarsi come funzione di infinite variabili; la somma che esprime il differenziale di una funzione di più variabili, condurrà quindi, con passaggio al limite, ad un integrale[97].

Si può proseguire lo studio dei successivi differenziali ed arrivare ad uno sviluppo analitico analogo a quello di Taylor per le funzioni di più variabili: le somme dop-

---

nei quali anni ho dovuto occuparmi di altre ricerche, riprendendole nel 1896 colle note dell'Accademia di Torino sulla *inversione degli integrali definiti*. Le ho poi ininterrottamente proseguite.

[97] Vedere: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. 1ª nota, § 2. (Rend. R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1887).

pie, triple ecc., che figurano nella serie ordinaria, vengono sostituite da integrali doppi, tripli ecc.

Possiamo anche proporci problemi di massimo e minimo, come abbiamo visto pel caso di un'area piana concepita come funzione della linea di lunghezza costante che la racchiude, anzi possiamo in generale studiare i massimi e minimi delle funzioni di linee. Tale studio, che corrisponde a quello delle condizioni in cui si annulla il differenziale, è assai complesso e conduce a questioni di natura molto varia: ponendo il problema sotto la forma più generale, si arriva infatti sia ad equazioni differenziali, sia a relazioni di natura integrale e a relazioni che sono al tempo stesso dei due tipi, o anche più complicate. Il primo caso corrisponde al calcolo delle variazioni, che è la creazione più grandiosa di Lagrange, ma non esaurisce, come abbiamo detto, la questione dei massimi e minimi delle funzioni di linee; ne costituisce bensì un capitolo. Ora, se si pensa che, partendo dalla Meccanica classica, si può cercare di ricondurre le differenti questioni naturali a problemi di massimi e minimi di certe funzioni del tipo generalizzato, corrispondenti all'azione meccanica, si vede delinearsi un vasto campo di ricerche[98].

Abbiamo or ora parlato dello sviluppo di una funzione di linea in una serie di integrali, che corrisponde allo

---

[98] Vedere: VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica* (Transunti della R Acc. dei Lincei, 3ª serie, vol. VIII): *Sopra una estensione della teoria Iacobi-Hamilton* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1890).

sviluppo di una funzione analitica in una serie di polinomi omogenei, ossia in serie di Taylor; se consideriamo i diversi termini di tale sviluppo, si arriva alle forme analitiche di infinite variabili.

Di qui ha preso le mosse una nuova Algebra, che ha già fatto grandi progressi[99]. Possiamo infatti domandarci: a che cosa conduce la corrispondenza fra l'Algebra ordinaria e la nuova Algebra? Si vede facilmente che ogni problema dell'Algebra ordinaria porta ad un nuovo problema, il quale si ottiene passando dal discontinuo al continuo, col processo uniforme precedentemente considerato. Inoltre, nella maggior parte dei casi, la corrispondenza ci addita soluzioni pratiche e feconde, poichè, se i nuovi problemi possono considerarsi come limite dei problemi algebrici ordinari, le loro soluzioni assai spesso non sono che il limite delle soluzioni note dell'algebra. Ciò appunto si verifica allorchè si passa dal discontinuo al continuo, nella teoria generale dei sistemi di equazioni algebriche.

La prima e la più elementare questione, che mi si sia naturalmente presentata in questo ordine di idee, nacque dal considerare il primo termine dello sviluppo generalizzato del Taylor, di cui sopra ho parlato. Essa può essere enunciata come la risoluzione di infinite equazioni algebriche lineari con un numero infinito di

[99] Non farò citazioni, poichè la letteratura del soggetto è molto nota e può trovarsi in M. T. LALESCO, *Sur les équations intégrales*, Paris, 1912. – G. VIVANTI, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari,* Milano, 1916.

incognite. Il principio generale, ora esposto, ci fornisce immediatamente la soluzione come limite della soluzione algebrica ordinaria, mediante l'impiego di determinati infiniti, ossia applicando ai determinanti lo stesso passaggio dal discontinuo al continuo, che abbiamo visto applicarsi alla somma, al prodotto, alle sostituzioni. La questione comprendeva l'antico problema delle equazioni integrali che Abel, Liouville, Sonine e parecchi altri avevano considerato e risoluto con speciali artifizi solo in casi particolari, e per le quali mancava un metodo uniforme e generale per condurne lo studio in modo sistematico; esso è stato trovato il giorno in cui le equazioni integrali sono state poste fra le questioni generali ora accennate e riannodate alle funzioni di linee, ossia il giorno nel quale sono state considerate come caso limite di un sistema di equazioni algebriche di primo grado[100].

Mentre l'Algebra procede nell'indirizzo ora esposto, altri rami dell'Analisi si sviluppano nel medesimo senso; basta ricordare la teoria degli integrali delle funzioni di più variabili, che sono, per la loro stessa natura, funzioni del contorno e rientrano quindi nelle funzioni generalizzate, di cui abbiamo parlato. Ma ciò che più interessa, è che la teoria delle equazioni differenziali,

[100] VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definiti*, quattro note (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXI, 1896).

per effetto delle stesse idee, può estendersi e raggiungere resultati notevoli di varia natura[101].

*

* *

Ponendoci dal punto di vista newtoniano dobbiamo prevedere e seguire l'evoluzione delle cose. L'evoluzione istantanea o elementare è individuata dalla flussione; se questa è conosciuta in ogni istante, ossia se essa dipende esclusivamente in modo noto dalle circostanze esterne, si chiama una *evoluzione forzata*. Tutti gli stati sono determinati a partire da uno stato iniziale conosciuto, mediante la somma o integrale delle infinite evoluzioni elementari.

L'evoluzione degli esseri organici, nelle teorie di Lamarck e Darwin, sarebbe del tipo dell'evoluzione forzata. Ma l'evoluzione può anche essere originata da *cause interne*, ed allora sono da distinguersi due tipi: se ad ogni istante essa dipende dalle condizioni attuali, sarà una *evoluzione non ereditaria* e tutti gli stati potranno essere determinati a partire da uno stato dato, mediante l'integrazione delle equazioni differenziali; se invece essa dipende da tutti gli stati attraversati, sarà una *evoluzione ereditaria* e le equazioni differenziali non basteranno più; bisognerà ricorrere alle *equazioni integro-differenziali* ed a quelle alle *derivate funzionali*. È evidente che l'evoluzione forzata differisce da quella

[101] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913, capitoli III, V e seguenti.

interna, anche perchè la prima cessa con l'annullarsi delle cause esterne, mentre la seconda no.

I tre tipi di evoluzione possono presentarsi contemporaneamente; così l'oscillazione di una verga può risultare da oscillazioni forzate, da oscillazioni dovute ai suoi propri periodi di vibrazione e, in generale, sarà affetta da azioni di *isteresi* e di *traînage*.

Anche l'evoluzione organica, secondo le più recenti vedute, non può essere dovuta a sole cause esterne, ma probabilmente, poichè si verificano fenomeni di eredità, anche a cause interne. Si arriverà un giorno ad applicare le Matematiche al mondo organico? Se il tipo di evoluzione organica si confermerà quale oggi si crede, l'analisi conveniente per studiarla sarà quella delle equazioni integro-differenziali e alle derivate funzionali, diversa quindi dall'analisi propria della Meccanica celeste. Probabilmente la biometria potrà dare le leggi sulle quali lavoreranno poi i Matematici.

Ma guardiamoci dal passare troppo, pensando all'avvenire, i limiti della Scienza presente, tanto più che sognare l'avvenire, o, per meglio dire, esporre dei sogni sull'avvenire è sempre pericoloso. Torniamo dunque all'eredità nel mondo inorganico, in cui essa ha pure un posto molto importante. Fino a pochi anni fa, mancando un'analisi per trattarle, bisognava abbandonare, non appena poste, le questioni di questo tipo; ma oggi l'analisi è capace di darne soluzioni complete, generali, rigorose, quanto quelle dei problemi in cui non entra l'eredità[102]. La guida per trovarle è sempre la stessa; bisogna ricorrere all'idea semplice e feconda che seguì Archimede, studiando, ventidue secoli fa, la quadratura della parabola.

[102] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitoli VI, VII, VIII e XIV.

L'APPLICAZIONE DEL CALCOLO AI FENOMENI DI EREDITÀ

La sostanza di questa conferenza fu la lezione di chiusura del corso fatto alla Sorbona nel 1912 sulle *Funzioni di linee*. Venne pubblicata nella *Revue du Mois* del 10 maggio 1912 e riprodotta nelle mie *Leçons sur les fonctions de lignes* Paris, 1913.

La storia della Meccanica ha notevole importanza non solo per sè stessa, ma anche come studio della evoluzione del pensiero umano. Infatti i diversi rami delle scienze si valsero bene spesso della Meccanica come guida nel loro sviluppo ed in essa trovarono la fonte di cospicui progressi e di notevoli resultati. Perciò lo studiare lo svolgimento storico dei principî fondamentali di questa disciplina e dei mezzi impiegati per risolverne i maggiori problemi è utile anche dal punto di vista generale e filosofico.

Sarei tentato di seguire lo sviluppo della Meccanica classica, dai primi passi fatti già in età antica fino agli ultimi resultati, ma poichè parecchi autori hanno di recente trattato ampiamente questo argomento, mi limiterò a rimandare agli scritti di Picard, Painlevé, Vailati, Duhem, Vacca, Mach, ricordando soltanto che i maggiori progressi si dovettero all'opera di Lagrange. Questi riuscì a sintetizzare tutti i principî della Meccanica in una formula sola, la quale riconduce i varî problemi alla risoluzione di certe equazioni. Da allora in poi ad ogni progresso compiuto nel loro studio ha corrisposto un progresso nei diversi rami della Meccanica.

Coloro che dopo Lagrange hanno portato più larghi contributi alla Meccanica analitica, come Hamilton, Iacobi ed i loro continuatori, non han fatto che spiegare, perfezionare, allargare i suoi concetti, sviluppare i suoi metodi e trarne nuove applicazioni.

Più tardi però, a fianco della Meccanica analitica di Lagrange, altri modi di concepire la meccanica sono sorti e si sono sviluppati, per l'influenza delle nuove scoperte della Fisica. Hertz ha costruito una Meccanica in relazione con le idee di Maxwell e di Helmholtz, in cui le forze sono sostituite da vincoli e masse nascoste. Oggi si va costituendo una nuova Meccanica, quella del principio di relatività, in cui i concetti fondamentali di massa, tempo, spazio e le loro mutue relazioni sono profondamente modificati e in cui si cerca di costruire a poco a poco sulle nuove basi un insieme logico, che possa spiegare i nuovi fatti scoperti dall'esperienza, eliminando le contraddizioni, e che permetta di prevedere altri fatti, da sottoporsi poi alla conferma sperimentale.

Infine ricorderò le mutue relazioni esistenti fra la Meccanica e l'energetica, per le quali si è cercato di ricondurre l'energetica alla Meccanica, ed anche, con tendenza inversa, di considerare quest'ultima come un capitolo della prima. Da tali ricerche è derivato tutto un nuovo insieme di idee filosofiche.

Lasciando da parte, perchè estranea al nostro scopo, la Meccanica di Hertz, quella della relatività e l'energetica, torniamo alla Meccanica classica ed in modo particolare consideriamo la dinamica, il cui principio fondamentale è stato stabilito ed enunciato da d'Alembert. I concetti di accelerazione, di forza, di massa e di vincolo ne dominano tutto lo svolgimento; i tre primi sono sufficienti per stabilire la dinamica dei sistemi liberi, mentre è necessario ricorrere ai principî che regolano l'azione dei vincoli, per trovare le leggi del movimento dei sistemi non liberi.

Per fissare le idee, prendiamo, come problema tipico sui sistemi liberi, quello della Meccanica celeste. Poichè per la legge di Newton si conosce la forza che sollecita qualsiasi punto, se ne può dedurre in ogni istante l'accelerazione in funzione della posizione che occupa rispetto al resto del sistema.

Come problema tipico sui sistemi vincolati, prendiamo quello del moto di un corpo rigido; in questo caso alle forze applicate occorre aggiungere forze a due a due eguali e contrarie, che obblighino i punti del sistema a soddisfare alle condizioni dei vincoli, cioè a conservare distanze costanti fra loro, di modo che in qualunque istante l'accelerazione d'ogni punto viene a dipendere dalla forza che è ad esso applicata e dalle forze dovute ai vincoli. Queste sono incognite e non sono, in generale, determinabili in modo completo, ma possono essere eliminate tenendo conto delle condizioni indipendenti, che esprimono l'invariabilità delle distanze.

Parleremo ora dei mezzi analitici che bisogna impiegare per trattare i problemi che così si presentano. Newton è stato condotto per la prima volta all'integrazione di equazioni differenziali, allorquando ha cercato di dedurre il movimento dei pianeti dalla legge da lui stabilita; le equazioni differenziali da lui considerate furono equazioni differenziali ordinarie.

La determinazione del movimento e l'integrazione di queste equazioni non formano che un solo problema; e dai tempi di Newton fino ad oggi i progressi della Meccanica e della teoria delle equazioni differenziali sono stati simultanei.

Ma fermiamoci un istante a notare, come in ciò che abbiamo detto, sia contenuto un principio del maggiore interesse: perchè il movimento sia completamente determinato in tutti i tempi futuri, basta conoscere la posizione attuale del sistema e le velocità attuali dei suoi punti, vale a dire il movimento può essere predetto nell'avvenire, quando è noto il suo stato attuale.

Per esempio, in Astronomia si può calcolare la posizione futura degli astri, se se ne conoscono la configurazione e il movimento presenti.

*
* *

Abbiamo parlato fin qui della Meccanica; passiamo ora alla Fisica matematica. Per trovare ricerche veramente utili e feconde in questo ramo di scienza bisogna arrivare a tempi relativamente recenti; infatti si possono considerare come fondatori della Fisica matematica Laplace, Fourier, Ampère, Poisson, Gauss, Green, Cauchy, Maxwell. Le teorie della propagazione del calore, dell'elasticità, dell'ottica e dell'elettrodinamica furono costruite, prendendo come modello e come guida la Meccanica, ma le equazioni differenziali ordinarie divennero insufficienti per queste nuove dottrine nelle quali convenne ricorrere alle equazioni alle derivate parziali.

Vediamo di renderci conto delle cause di questo fatto.

Per trattare i problemi di Fisica matematica si suppone che la sede dei fenomeni sia un mezzo continuo; ma questa ipotesi deve essere considerata più come un artificio analitico che come una realtà: in altri termini bisogna immaginare che i fenomeni si verifichino, almeno in modo approssimativo, come se il mezzo che si considera riempisse lo spazio.

Tale è lo spirito dell'ipotesi.

Per stabilire le relazioni fondamentali si può procedere in due modi diversi: o partire dalla costituzione molecolare della materia ed arrivare poi al continuo, con un metodo di tipo statistico, oppure partire direttamente dal continuo. In quest'ultimo caso conviene immaginare che gli elementi infinitamente piccoli, che lo formano e che sono contigui, esercitino gli uni sugli altri azioni reciproche secondo leggi note, ovvero che certi scambi abbiano luogo fra di loro. Allo stesso modo, se il fenomeno non è statico, ma variabile col tempo, bisogna considerare quello che succede, non solo fra gli elementi contigui nello spazio, ma ancora fra elementi contigui nel tempo.

Si arriva così ad equazioni alle derivate parziali, poichè gli elementi che individuano i punti dello spazio e il tempo (e che costituiscono quindi le variabili indipendenti) sono quattro, riducibili a tre nei casi statici o stazionari.

L'ultimo metodo è stato preferito ed usato da molti autori moderni. Come esempio, vediamo in che modo esso possa condurre alle equazioni generali della elasticità. Ricordiamo che ogni mezzo può essere decomposto in elementi infinitamente piccoli, la deformazione dei quali dipende da sei quantità; ricordiamo anche che la legge di Cauchy sulla trasmissione delle tensioni fra elementi contigui, fa vedere come lo stato di tensione in ogni punto dipenda da sei altre quantità. Basta allora stabilire, mediante la legge di Hooke, un legame fra le sei deformazioni e le sei tensioni, per avere le equazioni dell'equilibrio elastico; per passare poi da queste alle equazioni del movimento del mezzo, è sufficiente applicare il principio di d'Alembert.

In modo analogo si procede nella elettrodinamica classica. La legge di Maxwell conduce alle equazioni del campo elettromagnetico legando, da un lato le variazioni della polarizzazione elettrica nel tempo alle variazioni della forza magnetica nello spazio e alle correnti elettriche, e dall'altro riallacciando le variazioni della polarizzazione magnetica nel tempo alle variazioni della forza elettrica nello spazio. Per arrivare ad equazioni differenziali analoghe a quelle delle vibrazioni dei corpi elastici basta stabilire che, in ogni istante, fra la polarizzazione elettrica e la forza elettrica, la polarizzazione magnetica e la forza magnetica, passano delle relazioni lineari.

Nel caso della elasticità, come in quello dell'elettrodinamica, se si conosce in un istante dato lo stato del sistema, resta determinato completamente tutto il suo stato futuro.

Ad analoghe conclusioni si arriva anche nella teoria del calore e nello studio dei fenomeni in cui si deve tener conto, contemporaneamente, delle leggi della elasticità, di quelle della propagazione del calore e della termodinamica.

È così che Bjerknes[103] ha potuto provare che la questione generale dei movimenti dell'atmosfera si può formulare in un modo determinato. Infatti se si conoscessero in un dato istante lo stato di tutta l'atmosfera e le azioni esterne, si potrebbe determinarne lo stato futuro. La previsione del tempo diverrebbe perciò un problema perfettamente risolubile.

Abbiamo così intravisto la estesa classe dei fenomeni, che rientrano nella Meccanica e nella Fisica matematica classiche. Dall'esame fatto scaturiscono due conseguenze d'ordine generale. L'una che un solo strumento analitico è necessario per trattarli: le equazioni differenziali, sia ordinarie, sia alle derivate parziali. L'altra che i fenomeni stessi obbediscono alla legge: lo stato presente determina gli stati che verranno. Questi due fatti, rispettivamente d'ordine matematico e fisico, sono fra loro intimamente legati.

---

[103] V. Bjerknes and J.-W. Sandström, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, prima parte. – V. Bjerknes, Th Hesselberg and O. Devik, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, 2ª parte. Publications of the Carnegie Institution of Washington.

Lascerò da parte le questioni particolari, relative all'estensione del campo in cui il futuro è determinato, quando è noto lo stato presente in una certa regione, questioni che si possono risolvere mediante la teoria delle caratteristiche e dei loro inviluppi[104]; ho voluto solo insistere sul principio che regola i fenomeni considerati. Esso è una conseguenza della concezione, secondo la quale ogni azione si manifesta solo nell'istante in cui agisce, senza lasciare eredità nel futuro, ossia della ipotesi che il sistema non conservi memoria delle azioni, che lo hanno precedentemente sollecitato.

*

* *

A questo punto viene fatto di domandarsi se i fenomeni naturali si esplichino realmente così, o se non sia invece da supporre che esista effettivamente una eredità dei fatti passati, in modo che il trascurarla rappresenti una approssimazione introdotta solo per comodità di studio. Per dare una risposta bisogna esaminare attentamente e discutere i risultati dell'osservazione e dell'esperienza.

Si trova subito una gran quantità di fatti, che sembrano non rientrare nelle teorie di cui ci siamo occupati: essi si sono manifestati prima nella pratica, indipenden-

[104] VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastíques isotropes* (Acta mathematica, t. XVIII). – HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* (Paris, 1903).

temente dalle esperienze dei laboratori, e solo più tardi sono divenuti oggetto di ricerche scientifiche sistematiche.

Tutti gli ingegneri sanno, per esempio, che un ponte costruito da molto tempo non si deforma oggi, sotto l'azione di un carico, come si deformava subito dopo la sua costruzione.

Se si assoggetta l'estremità di una sbarra elastica orizzontale, fissata all'altro estremo, a pesi che vanno dapprima crescendo e poi diminuiscono a poco a poco, il corpo, mentre si va alleggerendo, non riprende le stesse deformazioni per cui è passato mentre lo caricavamo, e non presenta la stessa flessione, in corrispondenza allo stesso peso flettore[105].

Dunque la deformazione attuale non dipende solamente dal carico attuale, ma da tutti i carichi precedenti: sembra perciò che si possa enunciare il principio che ogni azione che si è esercitata lasci un ricordo nel corpo, il quale conserva perciò la memoria di tutti i carichi che ha sopportato.

Anche nel Magnetismo si possono citare fenomeni di *isteresi* e di *traînage*: essi sono stati sottoposti a studio accurato, dato l'interesse che presentano nella elettrotecnica.

I fenomeni nei quali non si considera l'azione ereditaria, si possono raggruppare, secondo la denominazione di Picard, nella Meccanica e nella Fisica non ereditaria,

---

[105] C. CANTONE, *Influenza dei processi di deformazione sulle proprietà elastiche dei corpi* (Nuovo Cimento, 1894-1895).

mentre gli altri si possono comprendere nella Meccanica e nella Fisica ereditarie.

*

* *

Prima di proseguire, è necessario esaminare una obiezione fondamentale che potrebbe a prima vista distogliere da queste ricerche. In un articolo pubblicato nel volume: *Les Méthodes dans les sciences*, comparso nella bella raccolta *Nouvelle collection scientifique* del Borel, il Painlevé si è occupato dei metodi della Meccanica, ed ha detto qualche parola anche intorno all'influenza del passato sull'avvenire dei sistemi materiali[106]. Egli nota che lo stato di un corpo materiale in un dato istante dipende, evidentemente, dalle circostanze anteriormente attraversate, ma che, per prevedere gli stati futuri, basta conoscere le condizioni nell'istante considerato, senza sapere come il sistema vi sia stato condotto.

«Toutefois, dans beaucoup d'applications, et notamment quand l'état moléculaire des corps du système intervient d'une façon appréciable dans les phénomènes, il peut être très difficile, il peut même être impossible encore à notre technique expérimentale de déterminer directement avec une précision suffisante les conditions initiales d'un système.

» Considérons, par exemple, deux clous sortis identiques de la même fabrique, mais dont l'un a été martelé

[106] Prima serie, 2ª edizione. Parigi, 1910, pagine 114-115.

à plusieurs reprises, tandis que l'autre restait dans un tiroir. Le premier clou n'est pas dans le même état moléculaire que le second, il a subi des déformations permanentes; une étude microscopique suffisamment précise nous le montrerait. Mais si nous ne possédons pas de microscope assez puissant, les deux clous nous sembleront identiques; nous serons incapables de discerner les différences de leur état moléculaire actuel. Qu'on nous dise alors que le premier clou a été martelé et comment il l'a été: nous serons avertis du genre de déformation qu'il a subi; la connaissance du passé du clou supplée provisoirement à l'absence du microscope.

» L'histoire d'un corps vient en aide à l'impuissance actuelle de notre technique, ou supprime les complications que cette technique entraînerait. C'est là un stade nécessaire de l'étude moléculaire des corps, mais ce n'est qu'un stade, et il faut se garder de tirer d'une méthode transitoire des conclusions aussi aventureuses qu'injustifieés, et notamment de l'opposer à la doctrine copernicienne».

Esiste dunque una corrente di idee, secondo la quale la Meccanica e la Fisica ereditarie non avrebbero ragione di esistere, potendosi porre come postulato, che lo stato futuro di un sistema qualsiasi dipende solo dal suo stato attuale. Painlevé e molti altri hanno una vera ripugnanza ad ammettere che un'azione possa avere effetto ereditario, vale a dire un effetto che si manifesti dopo che essa si è esercitata. Ma possiamo dedurre da questo, che si debba abbandonare ogni concetto ereditario e tutta l'analisi che vi si riferisce? O si deve cercare un'altra strada, per lo studio dei problemi di cui ho parlato? Io credo di no, e penso che il trarre simili conseguenze sarebbe un fraintendere il pensiero di Painlevé. Secondo me, è ragionevole ammettere che i procedimenti della eredità siano i soli possibili, per lo meno allo stato attuale della scienza, per abbracciare i fenomeni di cui abbiamo parlato. Possono esservi delle divergenze di principio, ma credo che tutti debbano essere d'accordo sulla questione pratica e sui metodi da seguire.

È utile a questo proposito richiamare il ricordo di Newton, il matematico e filosofo, che per primo ha trattato in modo sistematico ed analitico le azioni a distanza. Egli ha affermato[107] che sentiva una viva contrarietà ad ammettere che un corpo può agire dove non è; trovava dunque dal punto di vista filosofico una difficoltà fondamentale ad accogliere la concezione delle forze a distanza, che è nondimeno la base dei suoi lavori. Tuttavia egli l'ha introdotta nella filosofia naturale e dopo di lui essa è stata universalmente

---

[107] *Opera quae exstant omnia*. Comm. illustr. S. HORSLEY, Londini, 1779-85, vol. IV. – Lettere al dottore Bentley, pagine 429-442. (Newton a Bentley, letter III. Cambridge, feb. 25, 1693). «That gravity should be innate, inherent and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of any thing else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it».

impiegata; i resultati che se ne sono dedotti sono stati in generale verificati dalla osservazione e dall'esperienza.

Sostituiamo ora all'idea di spazio quella di tempo, e potremo ripetere presso a poco, per le forze che si esercitano a distanza nel tempo, quello che si dice per le forze che si esercitano a distanza nello spazio. Si può provare per le une e per le altre una eguale ripugnanza, ma io credo che le une e le altre siano egualmente utili.

Oggi che le concezioni di spazio e di tempo vanno sempre più allacciandosi, il confronto che ho stabilito, mi pare meritevole della più profonda attenzione. Esso mostra il legame che, secondo me, si potrebbe stabilire, anche partendo da concetti recenti, fra le azioni ereditarie e le forze a distanza, che sembrano, a prima vista, non presentare nessun rapporto.

Debbo aggiungere che in tutti i tempi si è cercato di sostituire alle forze a distanza le azioni fra elementi contigui nello spazio. Sono ben note le ricerche classiche del Maxwell[108], che ha cercato di spiegare le forze newtoniane, mediante le tensioni e le pressioni in un mezzo, come sono anche note le difficoltà, che si sono incontrate, quando si è voluto andare in fondo alla spiegazione. Non ho bisogno di richiamare, a questo proposito, i begli studi di Beltrami[109] e di Brillouin[110],

108 *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit par G. SÉLIGMANN-LUI, t. I, chap. V. Paris, 1885.

109 BELTRAMI, *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (Accademia di Bologna, Memorie, t. VII, 1886).

110 BRILLOUIN, *Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la*

ma noterò che, sebbene la questione sia stata studiata sotto vari rapporti, conviene anche oggidì trattare con il metodo newtoniano la maggior parte dei problemi ordinarii dell'astronomia e della meccanica celeste.

Io credo che, allo stato attuale delle cose, i fenomeni, dei quali abbiamo sopra parlato, non possano considerarsi dal punto di vista matematico, se non facendo uso dell'analisi creata per approfondire lo studio delle azioni ereditarie. Se si cerca infatti di abbandonare i metodi ereditari, si incontrano molte difficoltà. Prendiamo la particella M di un corpo: nell'ipotesi ereditaria, tutte le azioni che essa ha subito, determinano lo stato presente; quindi anche il futuro dipende da tutto il passato. Sarà possibile sostituire alla conoscenza di tutte le azioni a cui è stata assoggettata la particella, la conoscenza dei valori di un numero finito di parametri? Sarà, in altre parole, sufficiente un numero finito di elementi, per individuare lo stato presente della particella? Non sarà necessario, invece, determinare un numero infinito di parametri per conoscere il suo stato attuale, come lo conosciamo, quando sono date tutte le azioni passate?

Nella teoria del calore, per esempio, si possono dare i valori al contorno di tutte le temperature passate, oppure quelli della temperatura attuale nei diversi punti interni; ma si passa così da una infinità di elementi, che

---

distance. (Annales de l'École Normale supérieure, 1877).

individuano un certo stato, ad un'altra infinità di elementi, che pure lo definiscono[111].

Se qualche cosa di analogo si presentasse per ogni particella M del corpo, che sopra abbiamo considerato, si arriverebbe tanto col metodo ereditario, quanto senza questo, a quantità dipendenti da un numero infinito di variabili, e allora quale vantaggio avremmo, abbandonando il metodo ereditario? E sarà in ogni caso possibile di rinunciare ai procedimenti analitici proprii di questo metodo?[112]

---

[111] Se si caratterizza lo stato del corpo, mediante i valori al contorno delle temperature passate, bisogna conoscere una funzione di 3 variabili: il tempo e i due parametri che individuano i punti al contorno. Se si caratterizza lo stato mediante la temperatura attuale dei vari punti interni, è evidente che si deve ancora conoscere una funzione di 3 variabili: si è avuto quindi un cambiamento solo nell'interpretazione dello stato caratteristico del corpo. Supponiamo trascurabili due dimensioni del corpo, sia questo dunque una linea: supponiamo un estremo a temperatura costante, l'altro a temperatura variabile. Lo stato attuale può essere definito, così da una funzione del tempo che esprima tutti i valori delle temperature passate del secondo estremo, come da tutte le temperature attuali dei punti della linea. Simili esempi sono comunissimi nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, i cui integrali possono essere individuati indifferentemente, sia da tutti i valori di certe funzioni arbitrarie, sia da tutti quelli di certe altre funzioni arbitrarie.

[112] Notiamo che alcuni fenomeni, non di natura ereditaria, le cui leggi si esprimono mediante equazioni differenziali, per esempio, la propagazione del calore, possono condurre a questioni che si pongono sotto forma ereditaria e si risolvono con metodi ereditari. Così la relazione che esiste in ogni istante fra il

Le considerazioni esposte conducono a questioni che sono ben lungi dall'essere risolute, nè qui vogliamo approfondirle. Forse un giorno sarà possibile fare a meno di considerare le azioni ereditarie, come sarà possibile che si rinunzi alle forze newtoniane, ma possiamo aspettare prima di pronunciarci su questo, anche se ci sentiamo guidati da una spontanea intuizione.

Ricorderò a tale proposito un celebre fatto storico: Galileo e molti studiosi del suo tempo combattevano le forze a distanza, che allora chiamavano in modo vago *influenze occulte*. Fra l'altro, non si voleva ammettere l'influenza della luna sulle maree, che pure dal tempo di Eratostene al medio evo era stata varie volte riconosciuta; per por fine alla questione, Galileo cadde in un errore ben noto sulla teoria delle maree, e solo più tardi Keplero e Newton han rimessa la questione sulla vera via.

*

* *

Come può applicarsi l'analisi allo studio dei fenomeni ereditari? Per semplicità, non porremo qui la questione generale, ma tratteremo un caso speciale assai facile, che richiede soltanto considerazioni di matematica elementare.

Consideriamo la torsione di un filo: sia ω l'angolo di torsione e M il momento di torsione. Nell'ordinaria

---

livello del mercurio di un termometro e la temperatura variabile del serbatoio, è data da un'equazione integrale analoga a quella che troveremo fra poco, che lega la torsione ed il momento di torsione nel caso ereditario.

teoria della elasticità si parte dall'ipotesi che ω sia proporzionale ad M e si scrive

$$(\mathrm{I}) \qquad \omega = kM$$

dove k è un coefficiente costante; si stabilisce così in ogni istante una relazione fra la torsione e l'azione esterna.

Se si scrivesse in generale

$$\omega = F(M)$$

dove F è simbolo di una funzione, si potrebbe cercare di determinare F, in modo da studiare il fenomeno con maggiore approssimazione.

Supponendo, per esempio, che la funzione sia sviluppabile in serie di potenze, avremo

$$\omega = kM + k_1M^2 + k_2M^3 + \ldots.$$

In tal modo si trascura sempre il fenomeno ereditario, cioè non si tiene alcun conto delle azioni precedenti, poichè qualunque sia F, essa stabilisce sempre una dipendenza fra la torsione attuale ω e l'azione attuale M.

Se si vuole che ω dipenda da tutta la precedente storia del momento di torsione, bisogna correggere l'equazione (I) scrivendo

$$\omega = kM + \varphi$$

dove φ dipende da tutti i valori presi da M, dai tempi più lontani fino all'istante attuale t.

Denotiamo con f (τ) la funzione M del tempo τ; secondo il concetto fondamentale di *fenomeno* *ereditario* consistente nel riguardare lo stato attuale di un sistema come dipendente da tutta la sua storia anteriore, avremo che φ sarà una quantità che dipende da tutti i valori della funzione $f(\tau)$ dal tempo $t = -\infty$ fino a: $\tau = t$, se con t denotiamo l'istante attuale. Ciò si scrive, adottanto una notazione che ho introdotto fino dal 1887[113], con la formula

$$\varphi = \varphi\left(\left[\, \begin{matrix} f^{t}(\tau) \\ -\infty \end{matrix} \,\right]\right)$$

Se si chiama C la curva che ha per equazione $M = f(\tau)$ nell'intervallo $-\infty t$, noi potremo anche porre

$$\varphi = \varphi([C])$$

e potremo dire che φ *è una funzione della linea C.*

Ammetteremo il *postulato fondamentale della dissipazione dell'azione ereditaria* che si enuncia nei termini seguenti:

Ogni azione ereditaria svanisce indefinitamente col tempo, il che significa che la eredità dovuta ad una azione esercitata in un dato istante va continuamente ed indefinitamente decrescendo coll'andar del tempo.

È evidente che se noi cambiamo la estrema ascissa t della curva C, o la forma della curva C stessa ossia $f(\tau)$, o contemporaneamente i due elementi, φ in generale

113 Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes professées à la Sorbonne en 1912*, par V. VOLTERRA, Paris, 1913, cap. II. Cfr. pure l'articolo precedente del presente volume di Saggi scientifici avente per titolo: *L'evoluzione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale*.

cambierà. Diamo a t e a φ (τ) una modificazione simultanea consistente in una traslazione della curva C di una lunghezza h parallelamente all'asse τ; in altri termini sostituiamo alla curva punteggiata C della figura 4, la curva C' a tratto continuo. Se φ non cambia qualunque sia h e qualunque sia f, avremo che φ *sarà un invariante per tutte le traslazioni di* C nella direzione dell'asse τ, e quindi φ dipenderà soltanto dai valori di $f(\tau)$ non dal punto t estremità della curva.

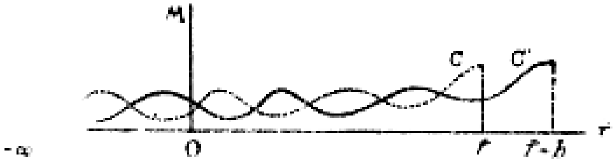

Fig. 4.

Ne segue che φ sarà una *pura funzione della linea*, e dal punto di vista ereditario ciò sarà caratterizzato dal fatto che lo stato in un certo istante non dipenderà dall'istante stesso, ma sarà completamente determinato dal modo con cui si è svolta la storia anteriormente a questo istante, cioè *la legge ereditaria sarà invariabile col tempo*. Noi esprimeremo questo dicendo che in tal caso vi è *invariabilità dell'eredità* e potremo rappresentare il verificarsi di questo caso con la formula

$$\varphi\left(\left[f(\tau^{t+h}_{-\infty} - h) \right]\right) = \varphi\left(\left[f^{t}_{-\infty}(\tau) \right]\right)$$

Supponiamo ora che ogni qualvolta $M = f(\tau)$ è periodica, anche φ considerato come funzione di t sia periodica collo stesso periodo di f. Evidentemente la stessa periodicità sussisterà anche per ω.

Prendiamo un punto A avente per ascissa $M = f(\mathrm{t})$ e per ordinata $\omega = \omega(t)$. Col cambiare di t, A descriverà una curva e tornerà al punto di partenza dopo decorso il periodo che denoteremo con T. Ne segue che A percorrerà un *ciclo chiuso* col periodo T.

Quando questo caso si verifica diremo che *è soddisfatta la condizione del ciclo chiuso col periodo T*.

L'importanza di questa condizione è notevole, giacchè nei fenomeni di isteresi magnetica ed elastica i quali costituiscono i fenomeni tipici ereditarii, si verifica appunto la condizione del ciclo chiuso per un periodo arbitrario.

È quindi naturale porsi la domanda: a quale conseguenza questo fatto potrà condurre riguardo alla legge dell'eredità? La risposta è fornita da un teorema generale che ho dimostrato[114] ed è il seguente: *Se la condizione del ciclo chiuso è soddisfatta per tutti i periodi possibili, vi è invariabilità dell'eredità*, e reciprocamente, *se vi è invariabilità dell'eredità, la condizione del ciclo chiuso è verificata per tutti i periodi*.

Ho chiamata questa proposizione, il *principio del ciclo chiuso* e questa denominazione è giustificata da quanto fu detto precedentemente. Analiticamente essa sarà espressa dalla formula già scritta sopra

[114] Cfr. *Leçons* ecc., cap. VII.

$$\varphi\left(\left[\begin{matrix} f(\tau^{t+h} - h) \\ -\infty \end{matrix}\right]\right) = \varphi\left(\left[\begin{matrix} \varphi^{t}(\tau) \\ -\infty \end{matrix}\right]\right)$$

e quando una funzione di linea soddisfa a questa condizione diremo che essa appartiene al ciclo chiuso.

Premesse queste considerazioni generali ritorniamo all'equazione già ottenuta.

$$\omega = kM + \varphi$$

Se si possono trascurare le azioni che han preceduto un certo istante t_o (per esempio in virtù del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria), φ dipenderà da tutti i valori presi da M dall'istante t_o fino a quello t.

Si può ora in prima approssimazione ammettere che φ dipenda da M mediante una relazione lineare, introducendo una ipotesi analoga a quella che abbiamo posta, quando si è ammessa F funzione di primo grado di M. Dal punto di vista fisico, questo equivale a supporre che gli effetti della sovrapposizione dei momenti di torsione, nei tempi passati, si sommino: l'eredità si dice allora lineare[115].

Immaginiamo ora che un momento di torsione unitario sia stato applicato al filo, nell'intervallo infinitamente piccolo dt, compreso fra due istanti infinitamente vicini τ e $\tau+d\tau$; esso avrà prodotto una certa torsione e, poichè l'azione è ereditaria, al tempo t resterà un'azione residua. Designamola con $\varphi\ (t,\ \tau)d\tau$,

[115] Cfr. *Leçons* ecc., cap. VI.

allora al tempo t, la torsione $\omega(t)$ sarà data da $kM(t)$ più la somma di tutti i residui

$$\varphi\,(t\ \tau)M(\tau)\,d\tau$$

dovuti alle azioni precedenti, vale a dire all'eredità. La relazione che ne risulta, è quindi l'equazione integrale

$$\omega(t) = kM(t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi\,(t, \tau)M(\tau)\,d\tau,$$

in cui la funzione $\varphi(t, \tau)$ è il *nucleo coefficiente di eredità*.

Posti i principi precedenti, si presentano molte questioni. Possiamo domandarci: noto il coefficiente di eredità e note le successive torsioni, si possono determinare i momenti di torsione che sono stati applicati? Come si può determinare il coefficiente di eredità quando è incognito?

La prima questione si riconduce alla risoluzione di una equazione integrale lineare; infatti quando è trascurabile l'eredità anteriore ad un certo istante, che assumiamo come origine dei tempi, tutto è ridotto alla risoluzione rispetto a M(t), dell'equazione integrale

$$\omega(t) = kM(t) + \int_{0}^{t} \varphi\,(t, \tau)M(\tau)\,d\tau$$

Per risolvere la seconda questione, vale a dire per determinare il coefficiente di eredità, supponiamo che sia soddisfatta la condizione del ciclo chiuso per tutti i periodi. In tale ipotesi il principio del ciclo chiuso ci dice che dovrà verificarsi la condizione dell'invariabilità delle eredità e perciò il coefficiente di eredità non dovrà dipendere che dal tempo trascorso da quando l'azione s'è esercitata, fino all'istante in cui si misura l'eredità che ha lasciata, quindi dovrà essere funzione della sola differenza $t - \tau$ o, come suol dirsi, è un nucleo appartenente al gruppo del ciclo chiuso. Ne segue che il coefficiente di eredità si potrà ottenere conoscendo le leggi di variazione dell'angolo e del momento di torsione, mediante la risoluzione di un'equazione integrale dello stesso tipo di quella che abbiamo considerata. Infatti l'equazione:

$$\omega(t) = kM(t) + \int_0^t \varphi\,(t-\tau)M(\tau)\,d\tau$$

quando si ponga $t - \tau = \sigma$, viene scritta così,

$$\omega(t) = kM(t) + \int_0^t \varphi\,(\sigma)M(t-\sigma)\,d\sigma$$

da cui, se supponiamo che

$$M(t),\ \frac{dM(t)}{dt},\ \frac{d^2M(t)}{dt^2},\ldots\ \frac{d^{n-1}M(t)}{dt^{n-1}}$$

siano nulle, mentre

$$\frac{d^nM(t)}{dt^n}$$

è diversa da zero, avremo

$$\text{(II)}\qquad \omega^{(n)}(t) = kM^{(n)}(t) + \int_0^t \varphi\,(\sigma)M^{(n)}(t-\sigma)\,d\sigma$$

da cui

$$k = \frac{\omega^{(n)}(o)}{M^{(n)}(o)}$$

Derivando l'equazione (II) si trova l'equazione integrale

$$\omega^{(n+1)}(t) + kM^{(n+1)}(t) = M^{(n)}(o)\,\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\sigma)M^{(n+1)}(t-\sigma)d\sigma$$

che determina $\varphi(t)$ in funzione di $\omega(t)$ e di $M(t)$.[116]

Il problema finora considerato è un problema statico, ma per passare al problema dinamico corrispondente, quello delle oscillazioni del filo, basta applicare il principio di D'Alembert, sostituendo al momento di torsione la differenza fra questo momento e l'accelerazione di torsione moltiplicata per una costante. L'equazione che così si trova, non è più integrale, ma integro-differenziale ed è della forma

$$\omega(t)=k\left[M(t)-\mu\frac{d^2\omega}{dt^2}\right]+\int_0^t\left[M(\tau)-\mu\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right]\varphi(t,\tau)d\tau$$ [117]

Tale equazione, che può integrarsi, riconducendola ad una equazione integrale, dà anche un nuovo mezzo per calcolare il coefficiente di eredità quando si sia determinata, mediante l'osservazione diretta, la legge di

---

[116] VOLTERRA, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (Acta mathematica, t. XXXV, p. 324).

[117] Cfr. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* p. 139.

oscillazione. Siamo dunque in possesso di due metodi per calcolarlo: il metodo statico e il dinamico; dal punto di vista pratico, l'ultimo è il più interessante.

Ripetendo per la flessione e la vibrazione di una sbarra quanto si è detto per la torsione di un filo, si arriva ad una equazione integro-differenziale del quarto ordine[118] invece che del secondo: questo caso è stato recentemente sottoposto a ricerche sperimentali dirette, di cui parleremo tra poco.

Nel caso più generale di un corpo elastico qualunque, si presentano maggiori complicazioni analitiche, poichè dallo stesso caso statico si è condotti ad equazioni non integrali, ma integro-differenziali. Per esempio, il problema generale della sfera elastica si risolve facilmente nel caso ereditario e la soluzione si presterà certo alle applicazioni dei problemi della rotazione terrestre[119].

Il principio del ciclo chiuso ha in tutte queste considerazioni una grande importanza, poichè permette di dimostrare che i coefficienti di eredità sono funzioni sulla differenza di due variabili e quindi formano un gruppo di *funzioni permutabili* al quale si dà per questa ragione il nome di *gruppo del ciclo chiuso*. Si può quindi impiegare la teoria della *permutabilità* per risolvere tutti i problemi corrispondenti; si semplificano così notevol-

---

[118] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo VI. Nello stesso Capitolo abbiamo dato un esempio sulla determinazione d'un coefficiente di eredità col metodo dinamico.

[119] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo IX.

mente le soluzioni e si può riuscire ad esprimerle mediante serie rapidamente convergenti e di facile uso nella pratica.

Una analisi analoga si può sviluppare nello studio dell'elettro-magnetismo; si trovano così equazioni integro-differenziali del medesimo tipo delle precedenti, che si trattano con gli stessi procedimenti[120].

*

* *

Non voglio terminare senza far parola delle applicazioni sperimentali della teoria ereditaria; ricorderò le applicazioni all'acustica, fatte dall'insigne fisico americano Webster; desidero anzi parlare della parte più pratica delle sue ricerche. Egli si è proposto questa interessante questione: Quale è la materia migliore per la costruzione dei diapason? Il Webster crede che la scienza non abbia ancora dato una risposta soddisfacente a questa domanda. Una parte della energia di vibrazione del diapason, più grande di quel che ordinariamente si pensi, va dissipata nella sostanza stessa del corpo vibrante, senza essere impiegata per l'emissione del suono.

Il Webster ed il Porter han cercato dapprima le leggi di questa dissipazione. Si presentavano loro due teorie: quella della viscosità, che è stata esposta dal Voigt, nel suo trattato sulla fisica dei cristalli, e la teoria ereditaria.

Il metodo sperimentale adottato dai due fisici consiste nello studio dello smorzamento delle vibrazioni trasver-

---

[120] Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo VII.

sali di una sbarra, che vibra normalmente; ogni vibrazione normale ha un decremento diverso, che può misurarsi con processi fotografici; le vibrazioni sono prodotte mediante elettromagneti; la sbarra è sostenuta nel vuoto da sostegni che non danno luogo a dissipazione, situati con tutta l'esattezza possibile ai nodi del corpo vibrante.

Si è fatto uso di una sbarra di acciaio, di una di bronzo e di una lamina di vetro, ognuno dei quali corpi vibrava in tre modi diversi con due, tre o quattro nodi. Lo smorzamento cresce col numero delle vibrazioni, ma non proporzionalmente; sembra anzi che si avvicini ad un limite.

Se si applica la teoria della viscosità, si trova che i decrementi debbono essere proporzionali al quadrato della frequenza; ora, siccome una tal legge non è verificata dalle esperienze del Webster e del Porter, si è dovuta abbandonare la teoria della viscosità ed impiegare quella dell'eredità. Il Webster ed il Porter hanno trovato una corrispondenza fra i risultati sperimentali e la teoria, partendo dall'equazione integro-differenziale del quarto ordine, a cui si arriva, tenendo conto dell'eredità nello studio delle vibrazioni trasversali di una sbarra elastica.

Essi hanno determinato ciò che può chiamarsi la «memoria delle sostanze» che hanno sperimentate: sembra, per esempio, che l'acciaio abbia una memoria debolissima.

*

* *

Credo di aver dimostrato che le teorie ereditarie, almeno quelle di cui ho parlato, possano essere studiate mediante equazioni integro-differenziali; si può così sviluppare lo studio teorico dell'eredità senza fare alcuna ipotesi speciale sulle funzioni che la caratterizzano, ossia sui coefficienti di eredità. Nelle questioni di Fisica matematica, come in quelle di Meccanica, è utile lasciare, finchè si può, indeterminate le costanti, e fissarle numericamente, solo quando si applichino le formule a problemi concreti.

Questa è la ragione per cui l'applicazione dell'Algebra alla filosofia naturale è cresciuta sempre d'importanza. Anche nelle questioni sull'eredità riesce utile lasciare indeterminate le leggi speciali con le quali l'eredità stessa si manifesta, risolvendo i problemi corrispondenti nel modo più generale possibile.

I coefficienti di eredità possono, quando occorra, determinarsi comparando le formule generali coi risultati dell'osservazione e fissandole così nei varî casi particolari che si presentano.

Spero che le considerazioni precedenti siano riuscite a dare un'idea dei caratteri essenziali, dell'utilità e della portata delle funzioni che dipendono da altre funzioni; esse conducono naturalmente alle equazioni integrali ed integro-differenziali e allo studio delle questioni ereditarie. Senza questi procedimenti, lo sviluppo analitico relativo ai casi di eredità non sarebbe possibile, ovvero si dovrebbe arrestare ai primi passi.

INDICE

Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali

Betti, Brioschi, Casorati: tre analisti e tre modi di considerare le questioni d'analisi

Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX

Proposta di una Associazione italiana per il progresso delle scienze

Il momento scientifico presente e la nuova Società italiana per il progresso delle scienze

Enrico Poincaré

L'evoluzione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale

L'applicazione del calcolo ai fenomeni di eredità